

FONCTIONS COMBINÉES D'INTERPOLATION PAR MORCEAUX ET LEURS PROPRIÉTÉS

par

Doina Brădeanu

1. Définitions. L'intervalle $[a, b]$ de l'axe réel Ox est partagé en N sous-intervalles égaux par les points $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, avec le pas $x_j - x_{j-1} = h$, $h = (b-a)/N$ et $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, 1, \dots, N$. On associe à chaque noeud x_j la fonction combinée $\varphi_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(1) \quad \varphi_j(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x_j - x}{h} \exp(r(1 - \frac{x_j - x}{h})) & , x \in [x_{j-1}, x_j] \\ (1 - \frac{x - x_{j-1}}{h}) \exp(r \frac{x - x_{j-1}}{h}) & , x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & , x \notin (x_{j-1}, x_{j+1}) \end{cases}$$

($r \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, N-1$)

$$(2) \quad \varphi_0(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x - x_0}{h}) \exp(r \frac{x - x_0}{h}) & , x \in [x_0, x_1] \\ 0 & , x \notin (x_0, x_1) \end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x_N - x}{h} \exp(r(1 - \frac{x_N - x}{h})) & , x \in [x_{N-1}, x_N] \\ 0 & , x \notin (x_{N-1}, x_N) \end{cases}$$

(combinaison de fonctions linéaires et exponentielles)

Les fonctions φ_j sont définies par morceaux et sont continues dans tout l'intervalle $[a, b]$.

Nous considérons l'axe Ox à l'origine au noeud x_j et orienté dans le sens de l'axe Ox et la transformation de coordonnées

$$s = \frac{x - x_j}{h} = \frac{x - x_0}{h} - j \quad .$$

Nous obtenons alors la forme suivante des fonctions φ_j

$$(3) \quad \varphi_j(s) = \begin{cases} 1 + s \exp(r(1+s)) & , \quad s \in [-1, 0] \\ (1 - s) \exp(rs) & , \quad s \in [0, 1] \\ 0 & , \quad s \notin (-1, 1) \end{cases}$$

Dans l'intervalle $e = [-1, 0]$ les fonctions φ_j sont définies par

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi_j^{(e)}(s) &= 1 + s \exp(r(1+s)) \\ \varphi_{j-1}^{(e)}(s) &= -s \exp(r(1+s)) \quad . \end{aligned}$$

Nous avons de la même manière dans l'intervalle $\tilde{e} = [0, 1]$

$$\begin{aligned} \varphi_{j+1}^{(\tilde{e})}(s) &= 1 - (1-s) \exp(rs) \\ \varphi_j^{(\tilde{e})}(s) &= (1-s) \exp(rs) \end{aligned}$$

La fonction dérivée φ'_j est définie comme suit

$$(5) \quad \varphi'_j(s) = \begin{cases} (1 + rs) \exp(r(1+s)) & , \quad s \in (-1, 0) \\ -(1 - r + rs) \exp(rs) & , \quad s \in (0, 1) \\ 0 & , \quad s \notin (-1, 1) \end{cases}$$

La fonction φ'_j n'est pas continue dans l'intervalle $(-1, 1)$

$$\begin{aligned}\varphi_j'(-1-) &= 0, & \varphi_j'(-1+) &= 1 - r \\ \varphi_j'(0-) &= e^r, & \varphi_j'(0+) &= -1 + r \\ \varphi_j'(1-) &= -e^r, & \varphi_j'(1+) &= 0.\end{aligned}$$

2. Propriétés des fonctions φ_j . On déduit de (1)-(4)

$$(6) \quad \varphi_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}, \quad j = 0, 1, \dots, N$$

$$(7) \quad \varphi_j^{(e)}(x) + \varphi_{j-1}^{(e)}(x) = 1$$

(8) φ_j sont des fonctions à support compact dans $\Omega = [a, b]$.
($\varphi_j(x) \neq 0$ pour $x \in (x_{j-1}, x_{j+1})$, avec $\varphi_j(x_{j-1}) = \varphi_j(x_{j+1}) = 0$).

$$(9) \quad \int_{-1}^1 \varphi_j(s) ds = 1$$

$$(10) \quad (\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx \begin{cases} \neq 0 & \text{pour } |k-j| \leq 1 \\ = 0 & \text{pour } |k-j| > 1. \end{cases}$$

On fera remarquer que l'intégrale est non nulle au seul cas où $k = j-1$, $k = j$, $k = j+1$.

Nous considérons les constantes réelles $c_0, c_1, \dots, c_N$ et la produit scalaire $(\dots)$. En posant $\forall x \in \Omega$,

$$\sum_{j=0}^N c_j \varphi_j(x) = 0$$

il résulte que pour tout k , $k = 0, 1, \dots, N$ nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^N (c_j \varphi_j, \varphi_k) &= 0 = \sum_{j=0}^N c_j (\varphi_j, \varphi_k) = c_{k-1} (\varphi_k, \varphi_{k-1}) + \\ &+ c_k (\varphi_k, \varphi_k) + c_{k+1} (\varphi_k, \varphi_{k+1}), \quad (c_{-1} = 0, c_{N+1} = 0).\end{aligned}$$

En se reportant à la propriété (10) on dit que le système de fonctions $\{\varphi_j\}_{j=0, N}$ est presque orthogonal; de plus, la matrice Gram de ce système de fonctions est une matrice tridiagonale.

Le système de fonctions $\{\varphi_j\}_{j=0, N}$ est linéairement indépendant.

Les fonctions φ_j définies par morceaux sont continues dans $\Omega = [a, b]$, à dérivées du premier ordre discontinues dans Ω , mais de carré intégrable (ou de degré d'intégrabilité fini). Par conséquent, φ_j appartient aux classes de fonctions $C(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$, que nous désignerons par S .

L'ensemble

$$H_N = \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N\} =$$

$$= \left\{ v_N \mid v_N = \sum_{j=0}^N c_j \varphi_j, \varphi_j \in S, c_j \in \mathbb{R} \right\}$$

constitue un sous-espace dans S , c'est-à-dire $H_N \subset C(\Omega)$, $H_N \subset W_2^1(\Omega)$.

Le sous-espace H_N est désigné par $C_h(\Omega)$ ou par $W_2^{1,h}(\Omega)$ (selon le type de l'espace dans lequel on étudie le problème de l'approximation à l'aide du système $\{\varphi_j\}$).

On remarquera que tout $v_N \in H_N$ s'écrit sous la forme

$$(11) \quad v_N(x) = \sum_{j=0}^N v_N(x_j) \varphi_j(x), \quad (c_j = v_N(x_j)).$$

3. Approximation. Nous désignerons par u une fonction continue dans $\Omega = [a, b]$ ou une fonction qui appartient à $W_2^1(\Omega)$ ou à $W_2^2(\Omega)$ (en ces cas u est également une fonction continue). Les valeurs $u(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$, sont par conséquent finies.

On peut construire, pour la fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction d'interpolation (définie par morceaux) aux noeuds x_j , $j = 0, 1, \dots, N$:

$$(12) \quad u_N(x) = \sum_{j=0}^N u(x_j) \varphi_j(x), \quad u_N \in H_N = W_2^{1,h}(\Omega)$$

où $\varphi_j: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont les fonctions (1)-(2). En effet, les conditions d'interpolation

$$u_N(x_j) = u(x_j) \quad , \quad j = 0, 1, \dots, N$$

sont remplies.

Nous présentons le

THÉOREME 1. Si la fonction u appartient à $W_2^2(\Omega)$ alors en employant la fonction d'interpolation u_N définie par (12), nous avons la délimitation

$$(13) \quad \|u - u_N\|_{L_2(\Omega)} \leq c h^2 \|u\|_{W_2^2(\Omega)} ,$$

où c est une constante indépendante de h et de u .

Démonstration. On calculera la différence $u(x) - u_N(x)$ pour $x \in [x_{j-1}, x_j]$. Afin de simplifier le calcul on utilisera la coordonnée s et les fonctions φ_j sous leur forme (3).

Nous calculerons d'abord la dérivée de la fonction $u_N(s)$, $s \in (-1, 0)$. Pour ce faire, nous remarquerons que (12) donne, à l'aide de (3)-(4)

$$u_N(s) = -u_{j-1} s \exp(r(1+s)) + u_j (1 + s \exp(r(1+s)))$$

$$(u_j = u(x_j)) .$$

On obtient la dérivée

$$\frac{du_N(s)}{ds} = (u_j - u_{j-1})(1 + rs) \exp(r(1+s)) \quad , \quad s \in (-1, 0)$$

Nous avons

$$u(s) - u_N(s) = \int_{-1}^s \frac{d}{ds'} (u - u_N) ds' =$$

$$= \int_{-1}^s \left[\frac{du(s')}{ds'} - (u_j - u_{j-1}) \right] ds' + (u_j - u_{j-1}) \int_{-1}^s [1 - (1 - rs') \exp(r(1+s'))] ds' =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^s \left[\frac{du(s')}{ds'} - \int_{-1}^0 \frac{du(s'')}{ds''} ds'' \right] ds' + \\
 &+ (u_j - u_{j-1}) \int_{-1}^s \left[1 - \frac{d}{ds'} (s' \exp(r(1+s'))) \right] ds' = \\
 &= \int_{-1}^s \left\{ \int_{-1}^0 \left[\int_{s'}^{s''} \frac{d^2 u(X)}{dX^2} dX \right] ds'' \right\} ds' + \\
 &+ (u_j - u_{j-1}) \int_{-1}^s \left[1 - \frac{d}{ds'} (s' \exp(r(1+s'))) \right] ds'
 \end{aligned}$$

En prenant d'autres limites d'intégration il résulte

$$|u(s) - u_N(s)| \leq \int_{-1}^0 \left\{ \int_{-1}^0 \left[\int_{-1}^0 \left| \frac{d^2 u(X)}{dX^2} \right| dX \right] ds'' \right\} ds', \quad s \in (-1, 0),$$

ceci du fait que

$$\int_{-1}^0 \left[1 - \frac{d}{ds'} (s' \exp(r(1+s'))) \right] ds' = 0$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on déduit

$$|u(s) - u_N(s)| \leq \left(\int_{-1}^0 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^0 \left| \frac{d^2 u(X)}{dX^2} \right|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous revenons à la variable x en posant $s = \frac{x-x_{j-1}}{h}$, ($x_j - x_{j-1} = h$) et nous obtenons la délimitation

$$|u(x) - u_N(x)| \leq h^{3/2} \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} \left| \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in (x_{j-1}, x_j).$$

En intégrant de nouveau entre les limites x_{j-1} et x_j , nous

obtenons

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} |u(x) - u_N(x)|^2 dx \leq h^4 \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left| \frac{d^2 u}{dx^2} \right|^2 dx.$$

Nous utilisons cette inégalité dans tous les sous-intervalles, c'est-à-dire nous faisons $j = 1, 2, \dots, N$ et par addition terme à terme des inégalités résultées, nous obtenons la délimitation présentée dans l'énoncé du théorème.

Au cas d'autres systèmes de fonctions (linéaires par morceaux), un théorème analogue se trouve en [1].

Remarque. Le système de fonctions $\{\varphi_j\}_{j=1,n}$ prises dans l'espace de Hilbert H est dit complet dans H si pour tout u et pour tout $\varepsilon > 0$ donné il existe un élément

$$u_n = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j$$

(c'est-à-dire il existe les constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$) et un nombre naturel N tels que

$$\|u - u_n\|_H < \varepsilon \quad \text{pour tous les } n > N.$$

En vertu du théorème précédent, c'est-à-dire de la délimitation (13), on a démontré par conséquent que le système de fonctions

$\{\varphi_j\}_{j=0,N}$ est complet dans l'espace $L_2(\Omega)$.

Cette propriété du système $\{\varphi_j\}$ constitue l'une des exigences essentielles des méthodes d'approximation à l'aide de formules du type (12) et en particulier de la méthode des éléments finis.

B I B L I O G R A P H I E

1. МАРЧУК, Г.И., АГОШКОВ, В.И., Введение в проекционно-сеточные методы,
"Наука", Москва, 1981
2. MITCHELL, A.R., WAIT, R., The finite element method in partial differential equations, (russian)
Izd. "Mir", Moskva, 1981
3. AHUÈS, M., TÉLIAS, M., Méthodes d'éléments finis pour l'équation de diffusion-convection,
Séminaire IMAG n°. 370 - 1981