

DESCRIEREA METODEI ELEMENTULUI FINIT CU FUNCȚII SPLINE PE O PROBLEMĂ BILOCALĂ SIMPLĂ

DOINA BRĂDEANU

1. Formularea problemei. Fie ecuația diferențială ordinară liniară

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + ax^k u = 0 \quad (1)$$

unde u este funcție de x iar a și k sînt constante reale ($k \geq 0$). Se pune problema găsirii funcției $u(x)$ care verifică ecuația (1) în interiorul intervalului $I = (0, 2) \in \mathbb{R}^1$ și satisface condițiile la extremități: $u(0) = 0$ și $u(2) = e^2$, [2]. Cu transformarea de funcție

$$u(x) = z(x) + \frac{e^2 - 1}{2} x + 1 \quad (2)$$

se ajunge la următoarea

Problemă bilocală cu condiții omogene: să se determine funcția $u(x)$ astfel ca

$$-\frac{d^2z(x)}{dx^2} + ax^k z(x) = -ax^k \left(1 + \frac{e^2 - 1}{2} x\right), \quad x \in I = (0, 2) \quad (3)$$

$$z(0) = 0, \quad z(2) = 0$$

În cele ce urmează se consideră A ca un operator pe z astfel încît Az este partea stîngă din (3).

PROPOZIȚIA 1. Operatorul liniar A este autoadjunct, pozitiv definit și pozitiv mărginit inferior (strict pozitiv) cu constanta $1/2$ pe spațiul liniar $Z = \{z \in C^2[0, 2] | z(0) = 0, z(2) = 0\}$, dacă $a \geq 0$.

Demonstrație. Pentru demonstrație se introduce un spațiu fundamental cu produs scalar (spațiul $L_2[0, 2]$ cu produsul scalar și norma definite în mod obișnuit). După cum este cunoscut, $C^2[0, 2]$ este dens în spațiul $L_2[0, 2]$. Dacă $z, v \in Z$ și calculăm produsul scalar L_2

$$(Az, v) = \int_0^2 (z'v' + ax^k zv) dx = \int_0^2 z(-v'' + ax^k v) dx = (z, A^*v), \quad (4)$$

deducem din $A^*v = -v'' + ax^k v$, A^* fiind adjunctul lui A , că $A^* = A$ pentru toți $z, v \in Z$. Prin urmare, operatorul A este autoadjunct pe Z .

Dacă $z = v$, din (4) obținem

$$(Az, z) = \int_0^2 z'^2 dx + a \int_0^2 x^k z^2 dx \geq 0, \quad \text{dacă } a \geq 0 \quad (5)$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $z(x) \equiv 0$. Într-adevăr, $z'(x) = 0$ implică $z(x) = c$ (const); dar $z(0) = 0$ așa încît $c = 0$. Inegalitatea (5) dovedește că operatorul A este pozitiv definit.

Să arătăm, acum, că A este un operator strict pozitiv (pozitiv mărginit inferior), adică există o constantă $\alpha > 0$ astfel ca

$$(Az, z) \geq \alpha^2 (z, z). \quad (6)$$

Pentru demonstrație să observăm că putem scrie

$$z(x) = \int_0^x z'(s) ds, \text{ cu } z(0) = 0$$

Ridicînd la patrat și aplicînd inegalitatea lui Cauchy-Schwartz, obținem

$$z^2(x) \leq \int_0^x ds \int_0^x z'^2 ds = x \int_0^x z'^2 ds$$

De aici, prin majorare pe $[0, 2]$ și integrare, primim

$$\int_0^2 z^2(x) ds \leq 4 \int_0^2 z'^2 ds,$$

de unde, dacă $a \geq 0$, deducem că are loc inegalitatea

$$\frac{1}{4} \int_0^2 z^2(x) ds \leq \int_0^2 z'^2(x) dx + a \int_0^2 z^2(x) x^k dx$$

care, după (4) se poate scrie în forma $(Az, z) \geq (z, z)/4$. Prin urmare, luînd $\alpha = 1/2$ este demonstrată inegalitatea (6).

Observația 1. Calculele precedente arată, de asemenea, că funcționala biliniară $a(z, v) = (Az, v)$ dată de (4) este un produs scalar (energetic) notat prin $(z, v)_A$; avem

$$(z, v)_A = (Az, v) = \int_0^2 (z'v' + ax^k zv) dx$$

Observația 2. Inegalitatea (6) se poate demonstra și direct, cu ajutorul inegalității lui Friedrichs

$$\|u\|_2 \leq (b-a) \|u\|_A$$

unde $\|\cdot\|_A$ este norma energetică a operatorului A iar $\|\cdot\|_2$ este norma în spațiul $L_2([a, b])$. În cazul problemei formulate vom avea

$$\sqrt{(z, z)} \leq 2\sqrt{(Az, z)} \text{ și } (Az, z) \geq \frac{1}{4} (z, z)$$

Propoziția 1 asigură, din teorema de existență și unicitate a soluției ecuației operatoriale $Az = f$, ca să aibă loc

PROPOZIȚIA 2. În spațiul Z problema bilocală (3) are o singură soluție; fie $z_0 \in Z$ această soluție

De asemenea, din teorema fundamentală a lui Ritz, pentru problema (3) are loc următoarea propoziție

PROPOZIȚIA 3. Funcționala patratică a energiei $F: Z \rightarrow \mathbb{R}^1$ definită prin

$$F(z) = (Az, z) - 2(f, z) =$$

$$= \int_0^2 (z'^2 + ax^k z^2) dx + 2a \int_0^2 x^k \left(1 + \frac{e^2 - 1}{2} x\right) dx \quad (7)$$

are un minim absolut pentru $z = z_0$, adică

$$F(z_0) = \inf \{F(z) | z \in Z\}$$

și reciproc: dacă $z_0 \in Z$ realizează un minim pentru funcționala energiei $F(z)$ atunci z_0 este soluție a problemei diferențiale (3).

După cum este cunoscut, se spune în acest caz că funcționala energiei (7) asociază o formulare variațională de minim echivalentă (principiu variațional de minim) la problema diferențială (3).

Pentru rezolvarea problemei variaționale aplicăm metoda aproximativă a elementului finit de tip Rayleigh-Ritz, într-un spațiu finit dimensional (de dimensiune N), cu funcții de formă (interpolare, baza) date de funcțiile spline.

2. Procedul lui Rayleigh-Ritz. Aproximarea soluției prin funcții spline cubice. Se consideră problema (3) în cazul $a = 1$; $k = 0$ pentru care avem

$$A(z) \equiv -\frac{d^2 z}{dx^2} + z(x) = -\left(1 + \frac{e^2 - 1}{2} x\right), \quad x \in I = (0, 2) \quad (8)$$

$$z(0) = 0, \quad z(2) = 0$$

În scopul determinării soluției aproximative alegem în locul spațiului Z un subspațiu finit dimensional Z_N (de dimensiune N), caracterizat printr-un ordin de netezime egal cu acela al spațiului Z . Pentru N fixat se alege în Z_N o bază de funcții $\{\Phi_i\}$, $i = \overline{1, N}$, funcții care îndeplinesc următoarele condiții: funcțiile Φ_i reprezintă un șir complet de funcții liniar independente (baza spațiului), sint definite pe porțiuni (elemente finite, subintervale) și aparțin spațiului $C^2[0, 2]$, au suport compact și verifică condițiile la limită omogene (se anulează în $x = 0$ și $x = 2$). Un astfel de subspațiu al lui Z îl oferă mulțimea

$$Z_N = \{z_N \in \tilde{S}_3(\pi) | z_N(0) = z_N(2) = 0\}$$

unde $\tilde{S}_3(\pi)$ este spațiul liniar al funcțiilor spline cubice pe diviziunea

$$\pi: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = 2$$

cu pasul $h = 1/2$, de dimensiune $N = 5$. Baza acestui spațiu este formată din funcțiile spline cubice $\Phi_i = \tilde{B}_i$, $i = \overline{0,4}$, care îndeplinesc condițiile de mai sus. Prin urmare, subspațiul Z_N al lui Z are forma

$$Z_N = \text{span} \{ \tilde{B}_0, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{B}_3, \tilde{B}_4 \}.$$

Pentru construirea bazei $\{ \tilde{B}_i \}$, $i = \overline{0,4}$, se folosește cunoscuta bază $\{ B_i \}$ $i = \overline{-1,5}$ a spațiului de funcții spline cubice $S_3(\pi) = \text{span} \{ B_{-1}, B_0, B_1, B_2, \dots, B_5 \}$, [3], după cum urmează

$$\tilde{B}_0 = B_0 - 4B_{-1}, \quad \tilde{B}_1 = B_0 - 4B_1, \quad \tilde{B}_2 = B_2, \quad \tilde{B}_3 = B_4 - 4B_3, \quad \tilde{B}_4 = B_4 - 4B_5$$

Se obțin formulele:

$$\tilde{B}_0(x) = 8 \begin{cases} x(-9x + 3 + 7x^2), & x \in [0, 1/2] \\ (1 - x), & x \in [1/2, 1] \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\tilde{B}_1(x) = 8 \begin{cases} -3x(1 + 3x - 5x^2), & x \in [0, 1/2] \\ -\frac{1}{2} - 3(1 - x) - 6(1 - x)^2 + 13(1 - x)^3, & x \in [1/2, 1] \\ -4\left(\frac{3}{2} - x\right)^3, & x \in [1, 3/2] \\ 0, & x \geq 3/2 \end{cases}$$

$$\tilde{B}_2(x) = 8 \begin{cases} x^3, & x \in [0, 1/2] \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^3, & x \in [1/2, 1] \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2} - x\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - x\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2} - x\right)^3, & x \in [1, 3/2] \\ (2 - x)^3, & x \in [3/2, 2] \end{cases}$$

$$\tilde{B}_3(x) = 8 \begin{cases} 0, & x \leq 1/2 \\ -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^3, & x \in [1/2, 1] \\ -\frac{1}{2} - 3(x - 1) - 6(x - 1)^2 + 13(x - 1)^3, & x \in [1, 3/2] \\ 3(1 - x)(5x^2 - 17x + 13), & x \in [3/2, 2] \end{cases}$$

$$\tilde{B}_4(x) = 8 \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ (x - 1)^3, & x \in [1, 3/2] \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 7\left(x - \frac{3}{2}\right)^3, & x \in [3/2, 2] \end{cases}$$

Graficele funcțiilor $\tilde{B}_i$ sînt reprezentate în fig. 1

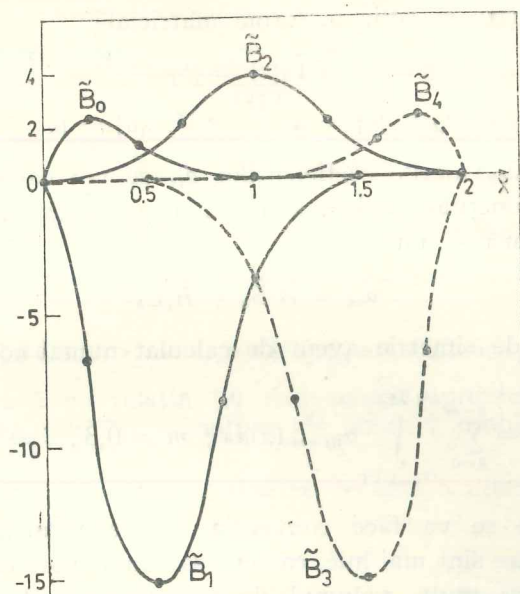


Fig. 1

În scopul rezolvării efective a problemei diferențiale (8) căutăm o aproximație Rayleigh-Ritz pentru problema variațională echivalentă pusă asupra funcționalei $F(z)$. Se încearcă o soluție aproximativă de forma funcției spline cubice

$$z_N(x) = \sum_{k=0}^4 c_k \tilde{B}_k(x), \quad x \in [0, 2] \quad (9)$$

unde c_k sînt coeficienți necunoscuți constanți. Acești coeficienți pot fi determinați prin rezolvarea sistemului Rayleigh-Ritz :

$$\sum_{k=0}^4 (A \tilde{B}_i, \tilde{B}_k) c_k = (f, \tilde{B}_i), \quad i = \overline{0, 4} \quad (10)$$

în care notăm ($' = d/dx$)

$$b_i = (f, \tilde{B}_i) = \int_0^2 f \tilde{B}_i dx, \quad i = \overline{0, 4}; \quad (11)$$

$$a_{ik} = (A \tilde{B}_i, \tilde{B}_k) = \int_0^2 (-\tilde{B}_i'' + \tilde{B}_i) \tilde{B}_k dx = \int_0^2 (\tilde{B}_i' \tilde{B}_k' + \tilde{B}_i \tilde{B}_k) dx, \quad i = \overline{0, 4}; \quad k = \overline{0, 4}; \quad (12)$$

$$a_{ik} = \begin{cases} a_{ki} \\ 0 \text{ dacă } |i - k| = 4 \end{cases}; \quad i, k = \overline{0, 4}$$

Sistemul algebric (10) se scrie în forma matricială

$$[\tilde{A}]\{c\} = \{b\} \quad (13)$$

$$([\tilde{A}] = [a_{ik}], \{c\} = (c_0 \dots c_4)^T, \{b\} = (b_0 \dots b_4)^T)$$

Pentru a determina valorile coeficienților a_{ik} se vor calcula în prealabil derivatele $\tilde{B}'_i(x)$ ale funcțiilor spline, scrise mai sus, $\tilde{B}_i(x)$ după regulile de derivare obișnuite. Dacă se pune

$$\alpha_{ik} = \tilde{B}'_i \tilde{B}'_k + \tilde{B}_i \tilde{B}_k$$

și se ține seama de simetrie avem de calculat numai coeficienții

$$a_{i(i+m)} = \sum_{k=0}^{3-m} \int_{x_{i-k+1}}^{x_{i-k+2}} \alpha_{i(i+m)}(x) dx; \quad m = \overline{0,3}; \quad i = \overline{0,4-m} \quad (14)$$

În aceste formule se va face convenția ca acei termeni pentru care indicii limitelor de integrare sînt mai mici ca zero sau mai mari ca patru să nu intervină în calcul. Mai mult, volumul de calcule se poate reduce atît datorită simetriei operatorului A cît și simetriei funcțiilor $\tilde{B}_i$ și $\tilde{B}'_i$, $i = \overline{0,4}$ (fig. 1). Aceasta induce o simetrie a matricei de rigiditate $[\tilde{A}]$ față de ambele diagonale. De aceea, în formulele (14) avem

$$a_{ii} = a_{(4-i)(4-i)}, \quad i = \overline{0,2}; \quad a_{i(i+1)} = a_{(3-i)(4-i)}, \quad i = \overline{0,1};$$

$$a_{i(i+2)} = a_{(2-i)(4-i)}, \quad i = \overline{0,1}; \quad a_{i(i+3)} = a_{(1-i)(4-i)}, \quad i = 0;$$

În consecință, rămîne să se calculeze efectiv cu formulele (14) numai 8 elemente ale matricei $[\tilde{A}]$, celelalte elemente se obțin prin simetrie față de cele două diagonale:

$$[\tilde{A}] = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & 0 \\ \cdot & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Termenii liberi b_i se calculează cu formulele (11) care se pot scrie în forma

$$b_i = - \int_0^2 \tilde{B}_i(x) dx - a_0 \int_0^2 x \tilde{B}_i(x) dx; \quad a_0 = \frac{e^2 - 1}{2} = 3,194528 \quad (15)$$

Valorile numerice b_i calculate cu (15) sînt scrise în sistemul (16).

Sistemul algebric al lui Rayleigh-Ritz (13), devine

$$\begin{bmatrix} 3484 & -4513 & -811 & 167 & 0 \\ . & 66562 & 351 & -15314 & . \\ . & . & 3964 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1,958358 \\ 28,208810 \\ -12,583584 \\ 55,681751 \\ -6,430698 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Acest sistem s-a rezolvat cu metoda eliminării a lui Gauss. S-au obținut următoarele soluții

$$c_0 = -0,049061; c_1 = 0,042327; c_2 = -0,264463; c_3 = 0,062205; c_4 = -0,112217 \quad (16')$$

Aceste valori împreună cu relația (9) dau soluția aproximativă a problemei (8): se pot obține valorile aproximative ale soluției problemei (8) în fiecare punct x din intervalul $[0,2]$.

3. Evaluarea erorii. Referitor la eroarea pe care o introduce $z(x)$, în [3] este dată următoarea evaluare

$$\|z - z_N\|_{\infty} \leq Kh^3 \quad (17)$$

unde $z(x)$ este soluția exactă, $z_N(x)$ este aproximația lui Ritz de tipul funcțiilor spline cubice, h este pasul diviziunii uniforme pe $[0,2]$ (lungimea elementului finit rectiliniu) iar K este un număr pozitiv independent de N . Teoria matematică a procedurii lui Ritz, [1], [2], care este valabilă și în cazul discretizării prin elemente finite unidimensionale, ca și estimarea (17) asigură convergența metodei în problema considerată aici. În lucrarea [2] s-a aplicat pentru problema (1) o soluție de aproximație prin polinoame Lagrange liniare pe porțiuni (o aproximație de clasă C^0). S-a întocmit tabelul 1 în care sînt date valorile nodale pentru soluția exactă $u(x)$, soluția de tip Lagrange u_L și soluția prin funcții spline cubice (de clasă C^2) $u_s(x)$. Se obține un înalt grad de exactitate în cazul folosirii funcțiilor spline cubice (tabelul 1).

Tabel 1

x	0,5	1,0	1,5
$u(x)$	1,648721	2,718281	4,481689
$u_s(x)$	1,648835	2,718546	4,482029
$u_L(x)$	1,634821	2,696116	4,460750

(Intrat în redacție la 12 octombrie 1981)

BIBLIOGRAFIE

1. Mihlin, S.G., *Variatione metod v matematicheskoi fizike*, Izd. Nauka, Moskva, 1970.
2. Norrie, D.N., de Vries, G., *The Finite Element Method*, Acad. Press, New York, 1973.
3. Prenter, P.M., *Splines and Variational Methods*, J. Wiley, 1975.

THE DESCRIPTION OF THE FINITE ELEMENT METHOD WITH SPLINE FUNCTIONS
FOR A SIMPLE BILOCAL PROBLEM

(Summary)

In this paper, the Rayleigh-Ritz variational method on one-dimensional finite elements was outlined, within the general context of mathematical approximation, for a simple bilocal differential problem (1). This problem is also considered and is studied by piecewise linear polynomials in [2]. Here, another approximate solution, is proposed (9), given by means of the spline functions. This trial solution (9), is then determined by computing the $B_i(x)$ splines and by calculating the coefficients c_k (16'), using the Ritz procedure. The trial solution $u_s(x)$, from (2), is compared to the exact solution $u(x)$, which can be found analytically, and to the linear solution $u_L(x)$ (Lagrange). The spline solution $u_s(x)$ is better than the linear solution (Table 1).