„BABEŞ—BOLYAI" UNIVERSITY
FACULTY OF MATHEMATICS
RESEARCH SEMINARIES

SEMINAR OF FUNCTIONAL ANALYSIS AND NUMERICAL METHODS

Preprint Nr. 1 , 1985

CLUJ-NAPOCA
ROMANIA

CONTENTS

(T) THIBAULT, L., V-subdifferentials of convex operators, to appear.

(V) VALADIER, M., Sous- différentiabilité de fonctions convexes à valeurs dans un espace vectoriel ordonné, Math. Scand. 30 (1972), 65-74.

(Z1) ZOWE, J., Subdifferentiability of convex functions with values in an ordered vector space , Math. Scand. 34 (1974), 69-83.

(Z2) ZOWE, J., Linear maps majorized by a sublinear map, Arch. Math. 26 (1975), 637-645.

(Z3) ZOWE, J., A duality theorem for a convex programming problem in order complete vector lattices, J. Math. Anal. Appl. 50 (1975), 273-285.

"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY, Faculty of Mathematics
Research Seminaries
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr.1 , 1985, pp. 117 - 142.

SUR UNE FORMULE DE QUADRATURE

Dumitru Ripeanu

§ 1. En [1] GOLOMB et OLECH ont prouvé le

THÉORÈME. Il existe un nombre $\theta \in (0,1)$ (et un seul) à la propriété que la formule de quadrature

$$(0) \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(\theta) + \lambda_2 f(1) + R(f)$$

est exacte pour $f = 1, x^p , x^q , x^r$, c'est-à-dire

$$(1) \qquad R(1) = R(x^p) = R(x^q) = R(x^r) = 0 ,$$

où p, q, r sont des nombre positifs donnés, différents entre eux.

Dans la note présente on donne au § 2 une démonstration de ce Théorème, sous une forme différente de celle donnée par ses auteurs et aux §§ 3 et 4 on présente deux des généralisations qu'on peut donner au sus-cité Théorème.

§ 2. On peut bien entendu supposer

$$(2) \qquad 0 < p < q < r .$$

Les relations (1) s'écrivent

$$(3) \qquad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$$(4) \qquad \lambda_1 \theta^p + \lambda_2 = \frac{1}{1+p}$$

$$(5) \qquad \lambda_1 \theta^q + \lambda_2 = \frac{1}{1+q}$$

$$(6) \qquad \lambda_1 \theta^r + \lambda_2 = \frac{1}{1+r}$$

Le théorème de Golomb et Olech peut donc s'énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME . <u>Il existe un nombre</u> $\theta \in (0,1)$ <u>et un seul pour lequel le système</u> (4),(5),(6) <u>de</u> 3 <u>équations linéaires à</u> 2 <u>inconnues</u> λ_1, λ_2 <u>est compatible</u> (<u>au quel cas</u> (3) <u>donne</u> λ_0) .

<u>Démonstration.</u> (5) et (6) donnent

$$\lambda_1 = \frac{r-q}{(1+q)(1+r)(\theta^q-\theta^r)} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{(1+q)\theta^q-(1+r)\theta^r}{(1+q)(1+r)(\theta^q-\theta^r)}$$

auquel cas (4) s'écrit

$$\varphi(\theta) = \bar{q}\left(1+\frac{\bar{r}}{1+p}\right)\theta^{\bar{r}} - \bar{r}\left(1+\frac{\bar{q}}{1+p}\right)\theta^{\bar{q}} + \bar{r} - \bar{q} = 0$$

avec $\bar{q} = q - p$, $\bar{r} = r - p$. Par conséquent

$$\varphi'(\theta) = \bar{r}\bar{q}\left[\left(1+\frac{\bar{r}}{1+p}\right)\theta^{\bar{r}-1} - \left(1+\frac{\bar{q}}{1+p}\right)\theta^{\bar{q}-1}\right]$$

auquel cas le Tableau 1 (où $\theta_0 = \left(\frac{1+q}{1+r}\right)^{\frac{1}{r-q}} < 1$, conformément à (2)), démontre l'existence d'un nombre (unique) $\theta_1 \in (0,1)$ qui satisfait aux relations (1) , ce qui démontre le théorème.

θ	0		θ_1		θ_0		1		∞
$\varphi'(\theta)$			$-$		0	$+$			
$\varphi(\theta)$	$\bar{r}-\bar{q}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\varphi(\theta_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

Tableau 1

§ 3. On va remplacer en (0) les noeuds 0 et 1 (mais pas les limites d'intégration 0 et 1) par des noeuds donnés a et b. Pour présenter le théorème respectif, nous allons nous servir des notations suivantes.

<u>Notations.</u>

$$A_p = \varphi_1(b) = \Phi_1(a,b) = \left(a^q - \frac{1}{1+q}\right)b^r + \left(\frac{1}{1+r} - a^r\right)b^q + \frac{a^r}{1+q} - \frac{a^q}{1+r}$$

$$A_q = \varphi_5(b) = \Phi_5(a,b) = \left(\frac{1}{1+p} - a^p\right)b^r + \left(a^r - \frac{1}{1+r}\right)b^p + \frac{a^p}{1+r} - \frac{a^r}{1+p}$$

$$A_r = \varphi_7(b) = \Phi_7(a,b) = \left(a^p - \frac{1}{1+p}\right)b^q + \left(\frac{1}{1+q} - a^q\right)b^p + \frac{a^q}{1+p} - \frac{a^p}{1+q}$$

$$\frac{A}{b^p} = \varphi_9(b) = \Phi_9(a,b) = \left(\frac{a^p}{1+q} - \frac{a^q}{1+p}\right)b^{r-p} + \left(\frac{a^r}{1+p} - \frac{a^p}{1+r}\right)b^{q-p} + \frac{a^q}{1+r} - \frac{a^r}{1+q}$$

$$\varphi(\theta) = \varphi_1(b)\theta^p + \varphi_5(b)\theta^q + \varphi_7(b)\theta^r + b^p\varphi_9(b) \quad ^{x)}$$

$$\varphi_{12}(\theta) = \left(\frac{b^q}{1+p} - \frac{b^p}{1+q}\right)\theta^{r-p} + \left(\frac{b^p}{1+r} - \frac{b^r}{1+p}\right)\theta^{q-p} + \frac{b^r}{1+q} - \frac{b^q}{1+r}$$

$$\varphi_0(\theta) = A_{0,p}\cdot\theta^p + A_{0,q}\cdot\theta^q + A_{0,r}\cdot\theta^r + A_0 = \begin{cases} \varphi(\theta) & \text{si } A_r > 0 \text{ ou } A_r = 0 \text{ et } A_q > 0 \\ -\varphi(\theta) & \text{si } A_r < 0 \text{ ou } A_r = 0 \text{ et } A_q < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_{0,12}(\theta) = B_{0,q}\cdot\theta^{q-p} + B_{0,r}\cdot\theta^{r-p} + B_0 = \begin{cases} \varphi_{12}(\theta) & \text{si } \frac{b^q}{1+p} > \frac{b^p}{1+q} \\ -\varphi_{12}(\theta) & \text{si } \frac{b^q}{1+p} < \frac{b^p}{1+q} \end{cases}$$

$b_5 = b_5(a)$ = la racine plus grande que a de la fonction $\varphi_7(b)$.

$b_7 = b_7(a)$ = la racine plus grande que a de la fonction $\varphi_9(b)$.

THÉORÈME 1. I. <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un noeud</u> θ_0 <u>différent des noeuds</u> a <u>et</u> b <u>et trois coefficients</u> $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ <u>à la propriété que la formule de quadrature</u>

$$(7) \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = \lambda_0 f(a) + \lambda_1 f(\theta_0) + \lambda_2 f(b) + R(f) \quad ,$$

<u>soit exacte pour</u> $f(x) = 1$, x^p , x^q , <u>et</u> x^r , <u>où</u> a, b, p, q, <u>et</u> r <u>sont des nombres donnés avec</u> $0 < a < b$ <u>et</u> $0 < p < q < r$ <u>est la suivante</u>;

1° <u>Si</u> $0 < a < \frac{1}{(1+p)^{1/p}}$ <u>et</u> $b_5(a) < b_7(a)$, <u>que l'on ait ou bien</u> $b < b_5$ <u>ou bien</u> $b > b_7$ <u>et dans les deux cas</u> $\varphi'(a)\cdot\varphi'(b) \neq 0$.

2° <u>Si</u> $0 < a < \frac{1}{(1+p)^{1/p}}$ <u>et</u> $b_5(a) = b_7(a) = \beta$, <u>que l'on ait</u> $b \neq \beta$ <u>et</u> $\varphi'(a)\cdot\varphi'(b) \neq 0$.

3° <u>Si</u> $0 < a < \frac{1}{(1+p)^{1/p}}$ <u>et</u> $b_5(a) > b_7(a)$, <u>que l'on ait ou bien</u>

x) il va sans dire que les notations des §§ 3 et 4 n'ont rien de commun avec celles du § 2 .

$b < b_7$ <u>ou bien</u> $b > b_5$ <u>et dans les deux cas</u> $\varphi'(a)\cdot\varphi'(b) \neq 0$.

4° <u>Si</u> $\frac{1}{(1+p)^{1/p}} \leq a \leq \left(\frac{1+p}{1+q}\right)^{\frac{1}{q-p}}$ <u>que l'on ait</u> $b < b_7$ <u>et</u> $\varphi'(a)\cdot\varphi'(b) \neq 0$.

5° <u>Si</u> $a \geq \left(\frac{1+p}{1+q}\right)^{\frac{1}{q-p}}$ <u>que l'on ait</u> $\varphi'(a)\cdot\varphi'(b) \neq 0$

6° <u>Si</u> $a \geq 0$, <u>que l'on ait ou bien</u> $0 < b < \left(\frac{1+p}{1+q}\right)^{\frac{1}{q-p}}$ <u>ou bien</u> $b > \left(\frac{1+q}{1+r}\right)^{\frac{1}{r-q}}$ <u>et dans les deux cas</u> $\varphi'_{o}(b) \neq 0$.

II. 1° <u>Si</u> $a>0$ <u>et</u> $\varphi'_0(a)<0$, <u>alors</u> $\theta_0 \in (0,a)$.

2° <u>Si</u> $a>0$ <u>et</u> $\varphi'_0(a)>0$, $\varphi'_0(b)>0$, <u>alors</u> $\theta_0 \in (a,b)$.

3° <u>Si</u> $a>0$ <u>et</u> $\varphi'_0(b)<0$, <u>alors</u> $\theta_0 > b$

4° <u>Si</u> $a = 0$ <u>et</u> $\varphi'_{0,12}(b)<0$, <u>alors</u> $\theta_0 > b$.

5° <u>Si</u> $a = 0$ <u>et</u> $\varphi'_{0,12}(b)>0$, <u>alors</u> $\theta_0 \in (0,b)$.

III. <u>L'existence des nombres</u> θ_0 , λ_0, λ_1 <u>et</u> λ_2 <u>de la formule</u> (7) <u>implique leur unicité</u> . <u>Par conséquent, la formule</u> (7), <u>quand elle existe, est unique</u> .

IV. <u>Les racines</u> $b_5(a)$ <u>et</u> $b_7(a)$ <u>sont des fonctions croissantes de la variable</u> <u>a</u> <u>dans les intervalles respectifs</u> $\left(0, \frac{1}{(1+p)^{1/p}}\right)$ <u>et</u> $\left(0, \left(\frac{1+p}{1+q}\right)^{\frac{1}{q-p}}\right)$ <u>d'existence</u> *) .

<u>Démonstration</u>. Par hypothèse

(8) $\quad 0 \leq a < b \quad$ et $\quad 0<p<q<r$.

Les conditions $R(f) = 0$ pour $f = 1, x^p , x^q , x^r$ s'écrivent au cas de la formule (7)

$$(9)\quad \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_0 a^p + \lambda_1 \theta^p + \lambda_2 b^p = \frac{1}{1+p} \\ \lambda_0 a^q + \lambda_1 \theta^q + \lambda_2 b^q = \frac{1}{1+q} \\ \lambda_0 a^r + \lambda_1 \theta^r + \lambda_2 b^r = \frac{1}{1+r} \end{cases}$$

On supposera d'abord en (8) $a>0$. Les trois dernières relations (9) donnent

$$\lambda_0 = \frac{1}{N}\left[\left(\frac{b^q}{1+r} - \frac{b^r}{1+q}\right)\theta^p + \left(\frac{b^r}{1+p} - \frac{b^p}{1+r}\right)\theta^q + \left(\frac{b^p}{1+q} - \frac{b^q}{1+p}\right)\theta^r\right]$$

$$(10)\quad \lambda_1 = \frac{1}{N}\left(\frac{a^r b^q - a^q b^r}{1+p} + \frac{a^p b^r - a^r b^p}{1+q} + \frac{a^q b^p - a^p b^q}{1+r}\right)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{N}\left[\left(\frac{a^r}{1+q} - \frac{a^q}{1+r}\right)\theta^p + \left(\frac{a^p}{1+r} - \frac{a^r}{1+p}\right)\theta^q + \left(\frac{a^q}{1+p} - \frac{a^p}{1+q}\right)\theta^r\right]$$

$$N = (a^r b^q - a^q b^r)\theta^p + (a^p b^r - a^r b^p)\theta^q + (a^q b^p - a^p b^q)\theta^r$$

auquel cas la première relation (9) s'écrit

$$(11)\quad \varphi(\theta) = A_p \theta^p + A_q \theta^q + A_r \theta^r + A = 0$$

avec

$$A_p = a^q b^r - a^r b^q + \frac{a^r - b^r}{1+q} + \frac{b^q - a^q}{1+r}$$

$$(12)\quad A_q = a^r b^p - a^p b^r + \frac{a^p - b^p}{1+r} + \frac{b^r - a^r}{1+p}$$

$$A_r = a^p b^q - a^q b^p + \frac{a^q - b^q}{1+p} + \frac{b^p - a^p}{1+q}$$

$$A = \frac{a^r b^q - a^q b^r}{1+p} + \frac{a^p b^r - a^r b^p}{1+q} + \frac{a^q b^p - a^p b^q}{1+r}$$

On écrira

$$(13)\quad A_p = \varphi_1(b) = \left(a^q - \frac{1}{1+q}\right)b^r + \left(\frac{1}{1+r} - a^r\right)b^q + \frac{a^r}{1+q} - \frac{a^q}{1+r}$$

et on considérera la fonction $\varphi_2(x) = \frac{1}{(1+x)^{1/x}}$ $\quad (x>0)$, donc

$$\varphi'_2(x) = \frac{\varphi_3(x)}{x^2(1+x)^{1/x}} \quad \text{avec} \quad \varphi_3(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}, \text{ par}$$

suite $\varphi'_3(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2} > 0$, $\varphi_3(x) > \varphi_3(0) = 0$, $\varphi'_2(x) > 0$,

d'où il résulte l'inégalité

$$(14) \qquad (1+r)^q < (1+q)^r \quad \left(\text{ ou } \frac{1}{(1+q)^{1/q}} < \frac{1}{(1+r)^{1/r}}\right)$$

dont il sera fait usage plusieurs fois, sans mention spéciale. Dans l'étude du signe des coefficients de l'équation (11) on distinguera pour la commodité plusieurs cas.

1° $0 < a < \dfrac{1}{(1+q)^{1/q}}$. On déduit de (13) le tableau 2

(où $b_0 = \left(\dfrac{q(1+q)}{r(1+r)} \cdot \dfrac{1-a^r(1+r)}{1-a^q(1+q)} \right)^{\frac{1}{r-q}}$).

b	0	a	b_0	b_1	∞
$\varphi'_1(b)$		$+$	0	$-$	
$\varphi_1(b)$	$\varphi_1(0) \nearrow$	$0 \nearrow$	$\varphi_1(b_0) \searrow$	$0 \searrow$	$-\infty$

Tableau 2.

Or

$$(15) \qquad \begin{aligned} \varphi_4(a) &= a^{1-q} \cdot \varphi'_1(b)\Big|_{b=a} = (r-q)a^r - \frac{r}{1+q}\, a^{r-q} + \frac{q}{1+r} \\ \varphi'_4(a) &= r(r-q)a^{r-q-1}\left(a^q - \frac{1}{1+q}\right) < 0 \end{aligned}$$

par hypothèse, donc $\varphi_4(a) > \varphi_4\left(\dfrac{1}{(1+q)^{1/q}}\right) = q\left(\dfrac{1}{1+r} - \dfrac{1}{(1+q)^{r/q}}\right) > 0$, de sorte qu'au tableau 2 on a $a < b_0$ et

$\text{sg } A_p = \text{sg }(b_1 - b)$, $(b > a)$.

2° $\dfrac{1}{(1+q)^{1/q}} \leq a \leq \dfrac{1}{(1+r)^{1/r}}$. Il est évident qu'en

(13) $A_p > 0$ pour $b > a$ (du fait que $\varphi'_1(b) > 0$ et $\varphi_1(a) = 0$).

3° $a > \dfrac{1}{(1+r)^{1/r}}$. En (15) $\varphi'_4(a) > 0$, $\varphi_4(a) >$

$> \varphi_4\left(\dfrac{1}{(1+r)^{1/r}}\right) = \dfrac{r}{1+r}\left(1 - \dfrac{(1+r)^{q/r}}{1+q}\right) > 0$ et le tableau 3 dit que $A_p > 0$ pour $b > a$.

b	0	b_0	a	∞
$\varphi'_1(b)$	$-$	0	$+$	
$\varphi_1(b)$	$\varphi_1(0) \searrow$	$\varphi_1(b_0) \nearrow$	$0 \nearrow$	∞

Tableau 3.

En résumé des cas 1° - 3° :

$$(16) \quad \begin{cases} \text{Si } 0 < a < \dfrac{1}{(1+q)^{1/q}} \text{ alors sg } A_p = \text{sg }(b_1 - b) \text{ avec} \\ b_1 \text{ la racine différente de } a \text{ de la fonction } \varphi_1(b) \\ \text{de (13), et si } a \geq \dfrac{1}{(1+q)^{1/q}}, \text{ alors } A_p > 0. \end{cases}$$

On écrira en (12)

$$(17) \qquad A_q = \varphi_5(b) = \left(\frac{1}{1+p} - a^p\right)b^r + \left(a^r - \frac{1}{1+r}\right)b^p + \frac{a^p}{1+r} - \frac{a^r}{1+p}$$

4° $0 < a < \dfrac{1}{(1+p)^{1/p}}$. On a le tableau 4, où

(18) $$b_2 = \left(\frac{p(1+p)}{r(1+r)} \cdot \frac{1 - a^r(1+r)}{1 - a^p(1+p)} \right)^{\frac{1}{r-p}} .$$

b	0	a	b_2	b_3	∞
$\varphi_5'(b)$		$-$	0	$+$	
$\varphi_5(b)$	$\varphi_5(0)$ ↘	0 ↘	$\varphi_5(b_2)$ ↗	0 ↗	∞

Tableau 4.

Or

(19)
$$\varphi_6(a) = a^{1-p}\,\varphi_5'(b)\Big|_{b=a} = -(r-p)a^r + \frac{r}{1+p}a^{r-p} - \frac{p}{1+r}$$
$$\varphi_6'(a) = r(r-p)a^{r-p-1}\left(\frac{1}{1+p} - a^p \right) > 0 ,$$

de sorte que $\varphi_6(a) < \varphi_6\left(\frac{1}{(1+p)^{1/p}} \right) = p\left(\frac{1}{(1+p)^{r/p}} - \frac{1}{1+r} \right) < 0$

et au tableau 4 , $a < b_2$ et $\mathrm{sg}\,A_q = \mathrm{sg}\,(b - b_3)$ ($b > a$) .

5° $\frac{1}{(1+p)^{1/p}} \le a \le \frac{1}{(1+r)^{1/r}}$. En ce cas, (17) dit que $A_q < 0$ pour $b > a$.

6° $a > \frac{1}{(1+r)^{1/r}}$. En (19) $\varphi_6'(a) < 0$, $\varphi_6(a) < \varphi_6\left(\frac{1}{(1+r)^{1/r}} \right) = r\left(\frac{(1+r)^{p/r}}{1+p} - 1 \right) < 0$, et le tableau 5 dit que $A_q < 0$ pour $b > a$.

b	0	b_2	a	∞
$\varphi_5'(b)$	$+$	0	$-$	
$\varphi_5(b)$	$\varphi_5(0)$ ↗	$\varphi_5(b_2)$ ↘	0 ↘	$-\infty$

Tableau 5 .

En résumé des cas 4° - 6° :

(20) Si $0 < a < \frac{1}{(1+p)^{1/p}}$, alors $\mathrm{sg}\,A_q = \mathrm{sg}\,(b - b_3)$, avec b_3 la racine différente de a de la fonction $\varphi_5(b)$ de (17) et si $a \ge \frac{1}{(1+p)^{1/p}}$, alors $A_q < 0$ pour $b > a$.

On écrira en (12)

(21) $$A_r = \varphi_7(b) = \left(a^p - \frac{1}{1+p}\right)b^q + \left(\frac{1}{1+q} - a^q\right)b^p + \frac{a^q}{1+p} - \frac{a^p}{1+q} .$$

7° $0 < a < \frac{1}{(1+p)^{1/p}}$. On a le tableau 6 , où

$$b_4 = \left(\frac{p(1+p)}{q(1+q)} \cdot \frac{1 - a^q(1+q)}{1 - a^p(1+p)} \right)^{\frac{1}{q-p}} .$$

b	0	a	b_4	b_5	∞
$\varphi_7'(b)$		$+$	0	$-$	
$\varphi_7(b)$	$\varphi_7(0)$ ↗	0 ↗	$\varphi_7(b_4)$ ↘	0 ↘	$-\infty$

Tableau 6 .

Or

(22)
$$\varphi_8(a) = a^{1-p}\,\varphi_7'(b)\Big|_{b=a} = (q-p)a^q - \frac{q}{1+p}a^{q-p} + \frac{p}{1+q}$$
$$\varphi_8'(a) = q(q-p)a^{q-p-1}\left(a^p - \frac{1}{1+p}\right) < 0$$

de sorte que $\varphi_8(a) > \varphi_8\left(\frac{1}{(1+p)^{1/p}} \right) = p\left(\frac{1}{1+q} - \frac{1}{(1+p)^{q/p}} \right) > 0$

et au tableau 6 , $a < b_4$ et $\mathrm{sg}\,A_r = \mathrm{sgn}\,(b_5 - b)$ ($b > a$) .

$8^0 \quad \dfrac{1}{(1+p)^{1/p}} \leq a \leq \dfrac{1}{(1+q)^{1/q}}$.

En ce cas (21) dit que $A_r > 0$ pour $b > a$.

$9^0 \quad a > \dfrac{1}{(1+q)^{1/q}}$.

En (22) , $\varphi_8'(a) > 0$, donc $\varphi_8(a) > \varphi_8\left(\dfrac{1}{(1+q)^{1/q}}\right) = \dfrac{q}{q+1}$. $\left(1 - \dfrac{(1+q)^{p/q}}{1+p}\right) > 0$, et au tableau 7 , $A_r > 0$ pour $b > a$.

b	0	b_4	a	∞
$\varphi_7'(b)$	$-$	0	$+$	
$\varphi_7(b)$	$\varphi_7(0) \searrow \varphi_7(b_4)$	$\nearrow$	$0 \quad \nearrow$	∞

Tableau 7 .

En résumé des cas $7^0 - 9^0$:

$$(23) \quad \begin{cases} \text{Si } 0 < a < \dfrac{1}{(1+p)^{1/p}} \text{, alors } \operatorname{sg} A_r = \operatorname{sg}(b_5 - b), \\ \text{avec } b_5 \text{ la racine différente de } a \text{ de la fonction} \\ \varphi_7(b) \text{ de (21) et si } a \geq \dfrac{1}{(1+p)^{1/p}} \text{, alors} \\ A_r > 0 \text{ pour } b > a . \end{cases}$$

On écrira en fin en (12)

$$(24) \quad \frac{A}{b^p} = \varphi_9(b) = \left(\frac{a^p}{1+q} - \frac{a^q}{1+p}\right)b^{r-p} + \left(\frac{a^r}{1+p} - \frac{a^p}{1+r}\right)b^{q-p} + \frac{a^q}{1+r} - \frac{a^r}{1+q} .$$

et on prendra en (14), écrite sous la forme

$$\frac{1}{(1+q')^{1/q'}} < \frac{1}{(1+r')^{1/r'}} \quad (0 < q' < r') , \quad q' = \frac{q-p}{1+p} , \quad r' = \frac{r-p}{1+p} ,$$

auquel cas la relation ci-dessus s'écrit

$$(25) \quad \left(\frac{(1+p)}{(1+q)}\right)^{1/(q-p)} < \left(\frac{1+p}{1+r}\right)^{1/(r-p)}$$

relation qui peut s'écrire

$$C = (1+p)^{\frac{r-q}{(q-p)(r-p)}} < D = \frac{(1+q)^{\frac{1}{q-p}}}{(1+r)^{\frac{1}{r-p}}} \text{, de sorte que}$$

$$\frac{1}{(1+r)^{\frac{1}{r-p}}} C^{\frac{q-p}{r-q}} = \left(\frac{1+p}{1+r}\right)^{\frac{1}{r-p}} < \frac{1}{(1+r)^{\frac{1}{r-p}}} D^{\frac{q-p}{r-q}} = \left(\frac{1+q}{1+r}\right)^{\frac{1}{r-q}}$$

ce qui avec (25) donne

$$(26) \quad \left(\frac{1+p}{1+q}\right)^{\frac{1}{q-p}} < \left(\frac{1+p}{1+r}\right)^{\frac{1}{r-p}} < \left(\frac{1+q}{1+r}\right)^{\frac{1}{r-q}}$$

$10^0 \quad 0 < a < \left(\dfrac{1+p}{1+q}\right)^{1/(q-p)}$.

En (24)

$$(27) \quad \begin{cases} \varphi_{10}(a) = a^{1-q} \varphi_9'(b)\Big|_{b=a} = \dfrac{r-p}{1+q} a^{r-q} - \dfrac{r-q}{1+p} a^{r-p} - \dfrac{q-p}{1+r} \\ \varphi_{10}'(a) = (r-p)(r-q) a^{r-q-1} \left(\dfrac{1}{1+q} - \dfrac{a^{q-p}}{1+p}\right) > 0 , \end{cases}$$

$$\varphi_{10}(a) < \varphi_{10}\left(\left(\frac{1+p}{1+q}\right)^{\frac{1}{q-p}}\right) = (q-p)\left[\frac{1}{1+q}\left(\frac{1+p}{1+q}\right)^{\frac{r-q}{q-p}} - \frac{1}{1+r}\right] < 0 ,$$

(cf. (26)), ce qui dit qu'au tableau 8 on a $a < b_6$, avec

$$b_6 = \left[\frac{(1+q)(q-p)}{(1+r)(r-p)} \cdot \frac{(1+p)a^r - (1+r)a^r}{(1+p)a^p - (1+q)a^q}\right]^{\frac{1}{r-q}}$$

b	0	a	b_6	b_7	∞
$\varphi_9'(b)$		$-$	0	$+$	
$\varphi_9(b)$	$\varphi_9(0) \searrow$	$0 \searrow$	$\varphi_9(b_6) \nearrow$	$0 \nearrow$	∞

Tableau 8.

et $\operatorname{sg} A = \operatorname{sg}(b - b_7)$; ($b > a$) .

$$11^0 \qquad \left(\frac{1+p}{1+q}\right)^{1/(q-p)} \leq a \leq \left(\frac{1+p}{1+r}\right)^{1/(r-p)} .$$

En ce cas , en (24) $A<0$ pour $b>a$.

$$12^0 \qquad a > \left(\frac{1+p}{1+r}\right)^{1/(r-p)} .$$

En (27) $\varphi'_{10}(a)<0$, $\varphi_{10}(a) < \varphi_{10}\left(\left(\frac{1+p}{1+r}\right)^{1/(r-p)}\right) = (r-p).$

$\left[\frac{1}{1+q}\left(\frac{1+p}{1+r}\right)^{(r-q)/(r-p)} - \frac{1}{1+r}\right] < 0$, (cf. (26)), de sorte qu'au tableau 9 , $b_6 < a$ et $A<0$ ($b>a$).

b	0		b_6		a		∞
$\varphi'_9(b)$		$+$	0	$-$			
$\varphi_9(b)$	$\varphi_9(0)$	$\nearrow$	$\varphi_9(b_6)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Tableau 9 .

En résumé des cas $10^0 - 12^0$:

$$(28)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } a < \left(\frac{1+p}{1+q}\right)^{1/(q-p)} \text{, alors } \operatorname{sg} A = \operatorname{sg}(b-b_7) \text{,} \\ \text{avec } b_7 \text{ la racine différente de } a \text{ de la fonction} \\ \varphi_9(b) \text{ de (24) et si } a \geq \left(\frac{1+p}{1+q}\right)^{1/(q-p)} \text{, alors } A<0 \\ \text{pour } b>a \end{array} \right.$$

(16), (20), (23) et (28) donnent le tableau 10 , qui fournit les signes des coefficients de l'équation (11).

Tableau 10.

a	0	$\frac{1}{(1+p)^{1/p}}$	$\frac{1}{(1+q)^{1/q}}$	$\left(\frac{1+p}{1+q}\right)^{1/(q-p)}$	∞
A_p	$\operatorname{sg}(b_1-b)$	$\operatorname{sg}(b_1-b)$	$+$	$+$	
A_q	$\operatorname{sg}(b-b_3)$	$-$	$-$	$-$	
A_r	$\operatorname{sg}(b_5-b)$	$+$	$+$	$+$	
A	$\operatorname{sg}(b-b_7)$	$\operatorname{sg}(b-b_7)$	$\operatorname{sg}(b-b_7)$	$-$	

On indiquera à présent la position mutuelle des nombres b_1, b_3 , b_5 et b_7 de ce tableau qui sont, comme sus-mentionné , respectivement les racines des fonctions $\varphi_1(b)$ de (13) , $\varphi_5(b)$ de (17) , $\varphi_7(b)$ de (21) et $\varphi_9(b)$ de (24) .

On remplacera dans l'expression de b_1^r :

$$(29)\qquad b_1^r = \frac{1}{\frac{1}{1+q} - a^q}\left[\left(\frac{1}{1+r} - a^r\right) b_1^q + \frac{a^r}{1+q} - \frac{a^q}{1+r}\right]$$

donnée par la relation (13) $\varphi_1(b_1) = 0$, dans l'expression (17) de $\varphi_5(b_1)$, donc

$$\varphi_5(b_1) = -\frac{\frac{1}{1+r} - a^r}{\frac{1}{1+q} - a^q}\cdot\varphi_7(b_1) \quad \text{, avec } \varphi_7(b_1) \text{ de (21) ,}$$

auquel cas les tableaux 6 et 4 donnent

$$(30)\qquad \operatorname{sg}(b_3 - b_1) = \operatorname{sg}(b_5 - b_1) .$$

On remplacera l'expression de b_3^r :

$$b_3^r = \frac{1}{\frac{1}{1+p} - a^p}\left[\left(\frac{1}{1+r} - a^r\right) b_3^p + \frac{a^r}{1+p} - \frac{a^p}{1+r}\right]$$

donnée par la relation (17) $\varphi_5(b_3) = 0$, dans l'expression (13) de $\varphi_1(b_3)$, donc

$$\varphi_1(b_3) = -\frac{\frac{1}{1+r} - a^r}{\frac{1}{1+p} - a^p}\cdot\varphi_7(b_3) \quad \text{, avec } \varphi_7(b_3) \text{ de (21) ,}$$

auquel cas les tableaux 6 et 2 donnent

$$(31)\qquad \operatorname{sg}(b_3 - b_1) = \operatorname{sg}(b_5 - b_3) .$$

On remplacera en fin l'expression (29) de b_1^r dans l'expression (24) de $\varphi_9(b_1)$, donc

(32) $$\varphi_9(b_1) = \frac{\dfrac{a^q}{1+r} - \dfrac{a^r}{1+q}}{\left(\dfrac{1}{1+q} - a^q\right) b_1^p} \cdot \varphi_7(b_1)$$

de sorte qu'en tenant compte que

$$a < \frac{1}{(1+p)^{1/p}} < \frac{1}{(1+q)^{1/q}} < \left(\frac{1+q}{1+r}\right)^{\frac{1}{r-q}}$$

les tableaux 8 et 6 donnent

(33) $$\operatorname{sg}(b_1 - b_7) = \operatorname{sg}(b_5 - b_1)$$

Des 6 positions mutuelles possibles des nombres b_1, b_3 et b_5 présentées dans la fig.1 , la relation (30) exclut les positions 3 et 5 et la relation (31) les positions 2 et 4 .

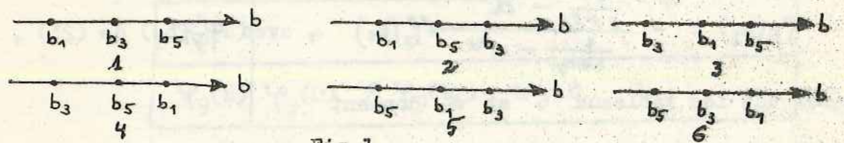

Fig.1

Restent par conséquent les positions 1 et 6 et le cas $b_1 = b_3 = b_5$ (parceque les relations (30) et (31) , ou l'identité

$$\left(\frac{1}{1+p} - a^p\right)\varphi_1(b) + \left(\frac{1}{1+q} - a^q\right)\varphi_5(b) + \left(\frac{1}{1+r} - a^r\right)\varphi_7(b) \equiv 0$$

disent que si deux des racines b_1, b_3, b_5 sont égales , alors la troisième a la même valeur). On considéra ces racines comme des fonctions de la variable a qui parcourt l'intervalle $\left(0, \frac{1}{(1+p)^{1/p}}\right)$, on les désignera respectivement par $b_1(a)$, $b_3(a)$ et $b_5(a)$ et on écrira en (13), (17) et (21) $\varphi_1(b) = \Phi_1(a,b)$, $\varphi_5(b) = \Phi_5(a,b)$ et $\varphi_7(b) = \Phi_7(a,b)$ [cf. notations]. En ce cas, (13) donne

(34) $$b_1'(a) = -\frac{\left.\dfrac{\partial \Phi_1(a,b)}{\partial a}\right|_{b=b_1}}{\varphi_1'(b_1)}$$

Or, si l'on remplace dans l'expression de $\left.\frac{\partial \Phi_1(a,b)}{\partial a}\right|_{b=b_1}$ b_1^r par son expression (29) , (34) s'écrit

(35) $$b_1'(a) = a^{q-p}\,\frac{\dfrac{1}{1+q} - b_1^q}{\dfrac{1}{1+q} - a^q} \cdot \frac{\varphi_4(a)}{\varphi_1'(b_1)} > 0$$

avec $\varphi_4(a)$ de (15) . Or , on a vu (page) que $\varphi_4(a) > 0$. D'autre part, (13) donne $\varphi_1\left(\frac{1}{(1+q)^{1/q}}\right) = \left(\frac{1}{1+q} - a^q\right)\left[\frac{1}{1+r} - \frac{1}{(1+q)^{r/q}}\right] > 0$, auquel cas le tableau 2 dit que $b_1^q > 1/(1+q)$ et que $\varphi_1'(b_1) < 0$, de sorte qu'en (35) $b_1'(a) > 0$ ($a \in (0, 1/(1+q)^{1/q})$) .

On déduit de même de (17)

$$b_3'(a) = -\frac{\left.\dfrac{\partial \Phi_5(a,b)}{\partial a}\right|_{b=b_3}}{\varphi_5'(b_3)}$$

En y remplacant b_3^p par son expression donnée par la relation (17) $\varphi_5(b_3) = 0$, on a

(36) $$b_3'(a) = a^{p-1}\,\frac{\dfrac{1}{1+r} - b_3^r}{\dfrac{1}{1+r} - a^r} \cdot \frac{\varphi_6(a)}{\varphi_5'(b_3)} > 0$$

avec $\varphi_6(a)$ de (19). Or , on a vu (page) que $\varphi_6(a) < 0$. D'autre part , (17) donne

$$\varphi_5\left(\frac{1}{(1+r)^{1/r}}\right) = \left(\frac{1}{1+r} - a^r\right)\left(\frac{1}{1+p} - \frac{1}{(1+r)^{p/r}}\right) < 0,$$

auquel cas le tableau 4 dit que $b_3^r > 1/(1+r)$ et $\varphi_5'(b_3) > 0$, de sorte qu'en (36) $b_3'(a) > 0$ ($a \in (0, 1/(1+p)^{1/p})$).

On déduit encore de (21)

$$b_5'(a) = -\frac{\left.\dfrac{\partial \Phi_7(a,b)}{\partial a}\right|_{b=b_5}}{\varphi_7'(b_5)}$$

En y remplacant b_5^p par son expression donnée par la relation (21) $\varphi_7(b_5) = 0$, on a

(37) $$b_5'(a) = a^{p-1} \frac{\frac{1}{1+q} - b_5^q}{\frac{1}{1+q} - a^q} \cdot \frac{\varphi_8(a)}{\varphi_7'(b_5)} > 0$$

avec $\varphi_8(a)$ de (22) . Or, on a vu (page) que $\varphi_8(a)>0$.
D'autre part , (21) donne

$$\varphi_7\left(\frac{1}{(1+q)^{1/q}}\right) = \left(\frac{1}{1+q} - a^q\right)\left(-\frac{1}{1+p} + \frac{1}{(1+q)^{p/q}}\right) > 0$$

auquel cas le tableau 6 dit que $b_5^q > 1/(1+q)$ et $\varphi_7'(b_5)<0$, de sorte qu'en (37) $b_5'(a)>0$.

On déduit enfin de (24)

$$b_7'(a) = -\frac{\frac{\partial \phi_9(a,b)}{\partial a}\Big|_{b=b_7}}{\varphi_9'(b_7)} .$$

En y remplaçant b_7^{q-p} par son expression donnée par la relation (24) $\varphi_9(b_7) = 0$, on a

(38) $$b_7'(a) = a^{q-1} \frac{\frac{1}{1+r} - \frac{b_7^{r-p}}{1+p}}{\frac{1}{1+r} - \frac{a^{r-p}}{1+p}} \cdot \frac{\varphi_{10}(a)}{\varphi_9'(b_7)} > 0$$

avec $\varphi_{10}(a)$ de (27) . Or, on a vu (page) que $\varphi_{10}(a)<0$.
D'autre part, (24) donne

$$\varphi_9\left(\left(\frac{1+p}{1+r}\right)^{1/(r-p)}\right) = a^p\left(\frac{1}{1+r} - \frac{a^{r-p}}{1+p}\right)\left(\frac{1+p}{1+q} - \left(\frac{1+p}{1+r}\right)^{\frac{q-p}{r-p}}\right) < 0$$

(cf. (26)), auquel cas le tableau 8 dit que $\left(\frac{1+p}{1+r}\right)^{\frac{1}{r-p}} < b_7$ et $\varphi_9'(b_7)>0$, de sorte qu'en (38) $b_7'(a)>0$.

(13), (17) et (26) donnent

(39) $$b_1(0) = \left(\frac{1+q}{1+r}\right)^{\frac{1}{r-q}} > b_3(0) = \left(\frac{1+p}{1+r}\right)^{\frac{1}{r-p}}$$

Le tableau 4 et (18) disent que $b_3(a) \to \infty$ lorsque $a \to \frac{1}{(1+p)^{1/p}}$ et (35) donne $b_1(a) < b_1(1/(1+p)^{1/p}) < \infty$, ainsi qu'on le

constate au tableau 2 au cas $a = 1/(1+p)^{1/p}$. $b_1(a)$ et $b_3(a)$ étant des fonctions continues de a dans l'intervalle $(0, \frac{1}{(1+p)^{1/p}})$ il s'ensuit qu'il existe dans cet intervalle des valeurs de a pour lesquelles $b_1(a) > b_3(a)$ (ce qui a lieu, par exemple ,dans un intervalle $(0,\varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit), ainsi que le dit (39) , et des valeurs de a pour lesquelles $b_1(a) < b_3(a)$ (ce qui a lieu, par exemple, dans un intervalle $\left[\frac{1}{(1+p)^{1/p}} - \varepsilon, \frac{1}{(1+p)^{1/p}}\right]$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit). Par conséquent

(40) $\begin{cases} \text{Il existe dans l'intervalle } (0, 1/(1+p)^{1/p}) \text{ au moins} \\ \text{une valeur de } a \text{ pour laquelle } b_1(a) = b_3(a) \text{ .} \end{cases}$

et donc, ainsi qu'on l'a vu page , $b_1(a) = b_3(a) = b_5(a) = \beta$, auquel cas (33) donne $b_7(a) = \beta$.

Les cas 1° et 6° de la fig.1 (les seuls possibles ainsi qu'on l'a vu page) et (33) disent que si $b_1(a) > b_3(a)$, alors $b_5(a) < b_3(a) < b_1(a) < b_7(a)$ tandis que si $b_1(a) < b_3(a)$, alors $b_7(a) < b_1(a) < b_3(a) < b_5(a)$. On en déduit à l'aide du tableau 10 que les signes des coefficients de l'équation (11) sont donnés par le tableau ci-dessous

I. $0 < a < 1/(1+p)^{1/p}$

I.1. $b_5(a) < b_3(a) < b_1(a) < b_7(a)$

N.crt.		A_p	A_q	A_r	A
1°	$a < b < b_5$	+	−	+	−
2°	$b = b_5$	+	−	0	−
3°	$b_5 < b < b_3$	+	−	−	−
4°	$b = b_3$	+	0	−	−
5°	$b_3 < b < b_1$	+	+	−	−
6°	$b = b_1$	0	+	−	−

N.crt.		A_p	A_q	A_r	A
7^0	$b_1 < b < b_7$	−	+	−	−
8^0	$b = b_7$	−	+	−	0
9^0	$b > b_7$	−	+	−	+

I.2. $b_1(a) = b_3(a) = b_5(a) = b_7(a) = \beta$.

N.crt.		A_p	A_q	A_r	A
10^0	$a < b < \beta$	+	−	+	−
11^0	$b = \beta$	0	0	0	0
12^0	$b > \beta$	−	+	−	+

I.3. $b_7(a) < b_1(a) < b_3(a) < b_5(a)$

N.crt.		A_p	A_q	A_r	A
13^0	$a < b < b_7$	+	−	+	−
14^0	$b = b_7$	+	−	+	0
15^0	$b_7 < b < b_1$	+	−	+	+
16^0	$b = b_1$	0	−	+	+
17^0	$b_1 < b < b_3$	−	−	+	+
18^0	$b = b_3$	−	0	+	+
19^0	$b_3 < b < b_5$	−	+	+	+
20^0	$b = b_5$	−	+	0	+
21^0	$b > b_5$	−	+	−	+

II. $\dfrac{1}{(1+p)^{1/p}} \leq a < \dfrac{1}{(1+q)^{1/q}}$

N.crt.		A_p	A_q	A_r	A
22^0	$a < b < b_7$	+	−	+	−
23^0	$b = b_7$	+	−	+	0
24^0	$b_7 < b < b_1$	+	−	+	+
25^0	$b = b_1$	0	−	+	+
26^0	$b > b_1$	−	−	+	+

III. $1/(1+q)^{1/q} \leq a < \left(\dfrac{1+p}{1+q}\right)^{1/(q-p)}$

N.crt.		A_p	A_q	A_r	A
27^0	$a < b < b_7$	+	−	+	−
28^0	$b = b_7$	+	−	+	0
29^0	$b > b_7$	+	−	+	+

IV. $a \geq \left(\dfrac{1+p}{1+q}\right)^{1/(q-p)}$

N.crt.		A_p	A_q	A_r	A
30^0	$b > a$	+	−	+	−

Tableau 12.

Dans l'ensemble de cas II la position mutuelle des racines b_1 et b_7 a été déduite en tenant compte que dans l'hypothèse de cet ensemble (23) donne $\varphi_7(b_1) > 0$ (cf. tableau 2) , auquel cas en (32) $\varphi_9(b_1) > 0$ (du fait que $\dfrac{1}{(1+q)^{1/q}} < \left(\dfrac{1+q}{1+r}\right)^{1/(r-q)}$, donc $a^q/(1+r) - a^r/(1+q) > 0$) , de sorte que le tableau 8 (qui est valable, parceque $1/(1+q)^{1/q} < ((1+p)/(1+q))^{1/(q-p)}$) donne $b_1 > b_7$. Nous étudions l'existence et la distribution des racines de l'équation (11) , on peut donc changer les signes de ses coefficients au cas où $A_r < 0$ ou $A_r = 0$ et $A_q < 0$. Après y avoir procédé on distingue dans le tableau ci-dessous plusieurs cas.

N.crt.	N. courant des cas du tableau 12	$A_{o,p}$	$A_{o,q}$	$A_{c,r}$	A_o
1^0	1^0 , 9^0 , 10^0 , 12^0, 13^0 21^0 , 22^0 , 27^0 , 30^0	+	−	+	−
2^0	3^0 , 19^0	−	+	+	+
3^0	5^0 , 17^0 , 26^0	−	−	+	+

N.crt.	N. courant des cas du tableau 12	$A_{o,p}$	$A_{o,q}$	$A_{o,r}$	A_o
4^0	7^0 , 15^0 , 24^0 , 29^0	+	−	+	+
5^0	2^0 , 20^0	−	+	0	+
6^0	4^0 , 18^0	−	0	+	+
7^0	6^0 , 16^0 , 25^0	0	−	+	+
8^0	8^0 , 14^0 , 23^0 , 28^0	+	−	+	0

Tableau 13 .

On a en (11)

$$\varphi(\underline{a}) = \varphi(\underline{b}) = 0 \quad . \tag{41}$$

Si l'on écrit

$$\varphi_{11}(\theta) = \frac{\varphi'(\theta)}{\theta^{p-1}} = p\,A_p + q\,A_q\,\theta^{q-p} + r\,A_r\,\theta^{r-p}$$

alors la fonction $\dfrac{\varphi'_{11}(\theta)}{\theta^{q-p-1}} = q(q-p)A_q + r(r-p)A_r \cdot \theta^{r-q}$

admet au plus une racine *) , de sorte qu'en (11)

(42) $\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\theta) \text{ admet au plus } 3 \text{ racines distinctes et } \varphi'(\theta) \\ \text{admet au plus } 2 \text{ racines distinctes} \end{array} \right.$

À l'aide de (41) et (42) on peut indiquer facilement dans le tableau ci-dessous les racines de la fonction $\varphi(\theta)$ de (11) dans les différents cas du tableau 13 .

N.courant des cas du tableau 13	Hypothèses	Racines de la fonction $\varphi(\theta)$
1^0	$\varphi'_o(a) < 0$	$\theta_o \in (0,a)$, a et b
	$\varphi'(a) \cdot \varphi'(b) = 0$	a et b
	$\varphi'_o(b) < 0$	$\theta_o > b$, a et b
	$\varphi'_o(a) > 0$, $\varphi'_o(b) > 0$	$\theta_o \in (a,b)$, a et b

*) dans ce qui suit on entendra par "racine" une racine positive de la fonction respective.

N. courant des cas du tableau 13	Hypothèses	Racines de la fonction $\varphi(\theta)$
2^0, 3^0, 4^0, 5^0, 6^0, 7^0		a et b
8^0		0 , a et b

Tableau 14.

Les expressions (10) supposent évidemment $\theta > 0$, mais si $\theta = 0$, en éliminant λ_1 et λ_2 entre les trois dernières équations (9) on obtient en (11) $A = 0$, de sorte qu'au tableau 14, la mention du cas 8^0 est justifiée.

Ainsi, qu'on la mentionné page , on a supposé en (8) $a > 0$. Si $a = 0$, en éliminant λ_1 et λ_2 entre les trois dernières équations (9), il vient

$$\theta^p \varphi_{12}(\theta) = 0$$

$$\varphi_{12}(\theta) = \left(\frac{b^p}{1+r} - \frac{b^r}{1+p}\right)\theta^{q-p} + \left(\frac{b^q}{1+p} - \frac{b^p}{1+q}\right)\theta^{r-p} + \frac{b^r}{1+q} - \frac{b^q}{1+r} \tag{43}$$

Si l'on écrit pour abréger en (43)

$$B_q = \frac{b^p}{1+r} - \frac{b^r}{1+p} \quad , \quad B_r = \frac{b^q}{1+p} - \frac{b^p}{1+q} \quad , \quad B = \frac{b^r}{1+q} - \frac{b^q}{1+r}$$

donc $\varphi_{12}(\theta) = B_q\,\theta^{q-p} + B_r\,\theta^{r-p} + B$, alors les signes de ces coefficients sont donnés par le tableau ci-dessous (dressé à l'aide de (26)).

N. crt		B_q	B_r	B
1^0	$0 < b < ((1+p)/(1+q))^{1/(q-p)}$	+	−	−
2^0	$b = ((1+p)/(1+q))^{1/(q-p)}$	+	0	−
3^0	$((1+p)/(1+q))^{1/(q-p)} < b < \left(\dfrac{1+p}{1+r}\right)^{1/(r-p)}$	+	+	−
4^0	$b = ((1+p)/(1+r))^{1/(r-p)}$	0	+	−

N.crt.		B_q	B_r	B
5^o	$\left(\frac{1+p}{1+r}\right)^{1/(r-p)} < b < \left(\frac{1+q}{1+r}\right)^{1/(r-q)}$	$-$	$+$	$-$
6^o	$b = \left(\frac{1+q}{1+r}\right)^{1/(r-q)}$	$-$	$+$	0
7^o	$b > \left(\frac{1+q}{1+r}\right)^{1/(r-q)}$	$-$	$+$	$+$

Tableau 15.

Si l'on tient compte qu'en (43) $\varphi_{12}(b) = 0$, le tableau ci-dessous fournit les racines de la fonction $\varphi_{12}(\theta)$ de (43) dans les différents cas du tableau 15.

N.courant des cas du tableau 15	Hypothèses	Racines de la fonction $\varphi_{12}(\theta)$
1^o , 7^o	$\varphi'_{o,12}(b) < 0$	b et $\theta_o > b$
	$\varphi'_{12}(b) = 0$	b
	$\varphi'_{o,12}(b) > 0$	b et $\theta_o \in (0,b)$
2^o, 3^o, 4^o, 5^o		b
6^o		0 et b

Tableau 16.

Les tableaux 14 et 16 démontrent les points I et II, (10) le point III et (37) et (38) le point IV du théorème .

Remarque 1. (10) exige évidemment $N \neq 0$. Or , $N = N(\theta) = \theta^p.M(\theta)$, avec $M(\theta) = a^rb^q - a^qb^r + (a^pb^r - a^rb^p)\,\theta^{q-p} + (a^qb^p - a^pb^q)\,\theta^{r-p}$, de sorte que $M'(\theta) = \theta^{q-p-1}\left[(q-p)(a^pb^r - a^rb^p) + (r-p)(a^qb^p - a^pb^q)\,\theta^{r-q}\right]$. Dans les conditions (8) (avec $a>0$) on a en (10) $a^rb^q - a^qb^r < 0$, $a^pb^r - a^rb^p > 0$, $a^qb^p - a^pb^q < 0$, ce qui donne le tableau 17, lequel en tenant compte qu'en (10)

$N(a) = N(b) = 0$, dit que $N \neq 0$ pour θ différent de a et de b , comme spécifié dans l'énoncé du théorème.

θ	0	θ_1		∞
$M'(\theta)$	$+$	0	$-$	
$M(\theta)$	$a^rb^q - a^qb^r < 0 \nearrow$	$M(\theta_1)$	$\searrow$	$-\infty$

Tableau 17.

Remarque 2. Étant donné que pour $a = 0$, $b = 1$, en (43) $\varphi'_{o,12}(1) = \varphi'_{12}(1) = \frac{(r-q)(r-p)(q-p)}{(1+p)(1+q)(1+r)} > 0$, le cas traité au théorème de Golomb et Olech présenté au § 2. rentre dans le cas 6^o du point I et dans le cas 5^o du point II du théorème 1 .

Remarque 3. On pourrait déterminer éventuellement la position du noeud θ_o par rapport à la limite d'intégration 1 , en étudiant le signe des expressions

$$\varphi(1) = \frac{p}{1+p}(a^qb^r - a^rb^q) - \frac{q}{1+q}(a^pb^r - a^rb^p) + \frac{r}{1+r}(a^pb^q - a^qb^p) + \frac{(r-q)(b^p - a^p)}{(1+q)(1+r)} - \frac{(r-p)(b^q - a^q)}{(1+p)(1+r)} + \frac{(q-p)(b^r - a^r)}{(1+p)(1+q)}$$

et

$$\varphi_{12}(1) = -\frac{r-q}{(1+q)(1+r)}.b^p + \frac{r-p}{(1+p)(1+r)}.b^q - \frac{q-p}{(1+p)(1+q)}\,b^r$$

données par (11) et (12), respectivement (43) , dans les conditions (8) et aux cas où le noeud θ_o existe.

§ 4. On présentera pour conclure un résultat relatif à une formule de quadrature de la forme

$$(44) \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = \lambda f(a) + \mu f(b) + R(f)$$

dans le

THÉORÈME 2. __Il existe au moins une formule de quadrature de la forme (44) , dans laquelle les coefficients__ λ __et__ μ __et les noeuds__ a __et__ b __dépendent des nombres donnés__ p, q __et__ r __(avec__ $0 < p < q < r$ __) qui soit exacte pour__ $f = 1, x^p, x^q, x^r$. __Les noeuds__ a __et__ b __s'obtiennent comme suit :__ a __prend l'une (quelconque)__

<u>des valeurs</u> (<u>s'il y en a plusieurs</u>) <u>pour lesquelles</u> $b_1(a) = b_3(a)$ (cf. (16) et (20)) . <u>Si</u> a_0 <u>est une telle valeur</u> , <u>on prend</u> $b = b_0 = b_1(a_0)$ *) ,

(45) $$\lambda = \frac{\frac{1}{1+r} - b_0^r}{a_0^r - b_0^r} \quad ; \quad \mu = \frac{a_0^r - \frac{1}{1+r}}{a_0^r - b_0^r}$$

<u>Démonstration.</u> Les relations (1) s'écrivent en ce cas

$$\lambda+\mu = 1 \ , \ \lambda a^p+\mu b^p = \frac{1}{1+p} \ , \ \lambda a^q+\mu b^q = \frac{1}{1+q} \ , \ \lambda a^r+\mu b^r = \frac{1}{1+r} .$$

La première et la quatrième équation donnent les expression (45) (avec b à la place de b_0), auquel cas la seconde et la troisième équation s'écrivent respectivement

(46) $\varphi_5(b) = 0$ et $\varphi_1(b) = 0$,

avec $\varphi_5(b)$ et $\varphi_1(b)$ données respectivement par (17) et (13) . Or , ces relations (46) sont équivalentes aux relations $b = b_1(a) = b_3(a)$ et on a vu (cf. (40)) qu'il existe au moins une valeur de a dans l'intervalle $(0,\ 1/(1+p)^{1/p})$ qui satisfait à cette relation, ce qui avec (45) démontre le théorème .

<u>Remarque</u> 4. Étant donné qu'en (16) et (20) $b_1(a) \neq a$, $b_3(a) \neq a$, il s'ensuit qu'en (45)

$$a_0^r - b_0^r = a_0^r - b_1^r(a_0) = a_0^r - b_3^r(a_0) \neq 0$$

<u>Remarque</u> 5. On pourrait éventuellement étudier l'unicité de la formule (44) , c'est-à-dire, ainsi que le dit la démonstration du théorème 2 , de la racine de la fonction de la variable a

(47) $\varphi_{13}(a) = b_1(a) - b_3(a)$.

Toutefois , le fait que $b_1(a)$ et $b_3(a)$ sont des fonctions croissantes de a dans l'intervalle $(0,\ 1/(1+p)^{1/p})$ (cf. (35) et

*) il n'y a pas de danger de confusion de cette valeur de b avec la racine de $\varphi_1'(b)$ du tableau 2.

et (36)), semble rendre la recherche du signe de la fonction $\varphi_{13}(a)$ de (47) assez difficile .

<u>Remarque</u> 6. Au tableau 13 on a omis le cas 11° du tableau 12 , parcequ'en ce cas la première relation (9) est satisfaite automatiquement (cf. (11)) , de sorte que θ_0 peut être tout nombre positif, différent de a et de b .(situé bien entendu dans l'intervalle d'existence de la fonction $f(x)$) (cf. remarque 1), après quoi les trois dernières relations (9) donnent λ_0, λ_1, et λ_2 . En ce cas, il existe une infinité de formules (7) à la propriété requise dans l'énoncé du théorème 1 , dans lesquelles les noeuds a et b ne sont cependant plus donnés , mais dépendent des nombres donnés p , q et r .

<u>Remarque</u> 7. En (21) et (24)

$$\lim_{a\to0} \varphi_7(b) = \frac{b^p}{1+q} - \frac{b^q}{1+p} \ , \quad \lim_{a\to0} \frac{\varphi_9(b)}{a^p} = -\frac{b^{q-p}}{1+r} + \frac{b^{r-p}}{1+q}$$

de sorte qu'en (23) $\lim_{a\to0} b_5(a) = ((1+p)/(1+q))^{1/(q-p)}$ et en (28) $\lim_{a\to0} b_7(a) = ((1+q)/(1+r))^{1/(r-q)}$. Les tableaux 6 et 8 avec les expressions de b_4 et b_6 écrites auprès d'eux et avec (26) disent qu'en (23) et (28)

$$\lim_{a\to\frac{1}{(1+p)^{1/p}}} b_5(a) = \lim_{a\to\left(\frac{1+p}{1+q}\right)^{1/(q-p)}} b_7(a) = \infty$$

ce qui avec le point IV du théorème 1 dit qu'alors que a parcourt en croissant l'intervalle $(0,\ 1/(1+p)^{1/p})$, $b_5(a)$ parcourt en croissant l'intervalle $(((1+p)/(1+q))^{1/(q-p)},\ \infty)$ et lorsque a parcourt en croissant l'intervalle $(0,\ ((1+p)/(1+q))^{1/(q-p)})$, $b_7(a)$ parcourt en croissant l'intervalle $(((1+q)/(1+r))^{1/(r-q)},\ \infty)$

<u>Remarque</u> 8. Les tableaux 2 , 4 , 6 , 8 disent respectivement que

$$\left.\frac{\partial \phi_1(a,b)}{\partial b}\right|_{b=b_1} = \varphi_1'(b_1) < 0, \text{ pour tout } a \in \left(0, \frac{1}{(1+q)^{1/q}}\right)$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_5(a,b)}{\partial b}\right|_{b=b_3} = \varphi_5'(b_3) > 0 \text{ et } \left.\frac{\partial \Phi_7(a,b)}{\partial b}\right|_{b=b_5} = \varphi_7'(b_5) < 0$$

pour tout $a \in \left(0, \frac{1}{(1+p)^{1/p}}\right)$ et $\left.\frac{\partial \Phi_9(a,b)}{\partial b}\right|_{b=b_7} = \varphi_9'(b_7) > 0$, pour tout

$a \in \left(0, \left(\frac{1+p}{1+q}\right)^{\frac{1}{q-p}}\right)$, de sorte que les racines b_1 , b_3 , b_5 , b_7 sont des fonctions continues et à dérivées du premier ordre continues par rapport à a dans les intervalles respectifs d'existence.

BIBLIOGRAPHIE

1 GOLAB,S., OLECH, C., <u>Contribution à la formule simpsonienne des quadratures approchées</u> , Annales Polonica mathematice I. , 176 - 183 (1955) .

"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY, Faculty of Mathematics
Research Seminaries
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr. 1 , 1985, pp. 143 - 153.

ON STRONGLY PROXIMINAL SETS IN BANACH SPACES

Ioan Şerb

0. <u>Introduction</u>. We have investigated in the recent papers [12] and [13] the existence of strongly proximinal or other similar sets in normed or other spaces . There were obtained also some characteristics of the unit balls in normed spaces which contain bounded respectively compact strongly proximinal sets.

The aim of the present note is to give new results in this direction. We begin with a result concerning the existence of weakly compact convex strongly proximinal sets in normed spaces. Next one obtains as generalization of a result in [12] , that the unit balls of normed spaces containing weakly compact strongly proximinal sets cannot contain exposed points, k - exposed points or vertices. It is also showed that there exists a wide class of Banach spaces which does not contain closed convex and bounded strongly proximinal sets with the Radon-Nikodým property.

1. <u>Definitions, notations, preliminary results</u>. Let X be a normed vector space and M a non-empty subset of X. The metric projection with respect to the set M is the (generally multivalued) application $P_M : X \longrightarrow 2^M$, defined by :