"BABES - BOLYAI" University
Faculty of Mathematics and Physics
Research Seminars
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr. 1 , 1987, pp. 9-24

[20]

SUR LA MÉTHODE DE GALERKIN AUX ÉLÉMENTS FINIS POUR LA RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIFFUSION-CONVECTION À COEFFICIENT DE DIFFUSION VARIABLE

Doina Brădeanu

1. Formulation du problème

Le phénomène de diffusion-convection qui surgit dans beaucoup de problèmes termiques est étudié dans le cadre de certaines théories de la mécanique des fluides et du transfert de chaleur. Ce phénomène se produit en régime stationnaire ou en régime non stationnaire et se traduit en mathématiques par des problèmes aux limites concernant surtout certaines équations aux dérivées partielle du type elliptique ou parabolique dépendentes ou independentes du temps. Les problèmes aux limites du type diffusion-convection s'analysent et se résolvent à l'aide de vastes méthodes analytiques, méthodes analytiques-numériques ou méthodes numériques. Le modèle numérique de ces problèmes, qui a pris un grand essor dans les dernières années du fait des progrès obtenus dans la théorie de la programmation et des calculateurs électroniques, peut s'obtenir en utilisant des schémas aux différences finies, des méthodes variationnelles approximatives (Ritz, Kantorovitch, Trefftz, Biot), des méthodes de projection-résidus pondérés (Bubnov-Galerkin, Petrov-Galerkin, relations intégrales, moments etc) et la méthode de l'élément fini (dans la forme de Galerkin et - dans certains cas - dans une forme variationnelle). Comme on le sait, la méthode des différences finies centrales, de même que la méthode de Galerkin ou la méthode de Petrov-Galerkin (méthode de Galerkin généralisée) discrétisées à des éléments finis peuvent conduire à des algorythmes à solutions présentant de grandes oscillations numériques qui les écartent beaucoup des valeurs de la solution exacte. Ces oscillations de la solution numérique (fausses pour le problème physique) surgissent surtout alors que, dans le phénomène de diffusion-convection, la convection est dominante en comparaison avec la diffusion. Une telle situation peut se présenter dans le transfert de chaleur dans un fluide moins visqueux qui se meut à grandes vitesses - comme par exemple l'air en régime supersonique au-dessus d'une surface solide (profile aérodynamique, aile etc.)

La stabilité de la solution numérique, l'absence ou la présence des oscillations numériques, peut se caractériser à l'aide d'un paramètre ou de plusieurs paramètres (à signification physique ou seulement théorique et numérique). Ainsi pa exemple, pour le problème aux limites bilocal

$$-Ku''(x)+vu'(x) = o \ , \ x\in(o,1), \ u(o)=o, u(1)=o$$

$$(K = \text{const.} \ , \ v = \text{const.})$$

où v signifie une vitesse, K est le coefficient de diffusion et u peut représenter la température ou la concentration, le paramètre est $\gamma = vh/K$ (γ s'appelle nombre Reynolds - Péclet- numérique) où h est le pas pour la division $\Delta_h = \{x_o=o, x_1, \ldots, x_n=1\} \subset [o,1]$ qui discrétise l'intervalle $[o,1]$ par les points x_i ou les éléments finis, de longueur h, $e_i = [x_i, x_{i+1}]$. Si $\gamma > 2$ les solutions numériques (que nous désignerons par u_i) données par la méthode des différences finies centrales ou par la méthode de Galerkin à éléments finis linéaires e_i peuvent présenter de grandes oscillations d'un noeud à l'autre. Pour éviter ces oscillations numériques il faut que $\gamma < 2$. Pour assurer cette condition ($\gamma < 2$) il faudra diminuer le pas h de sorte que $h < (2K/v)$, ce qui ne peut se faire si v est grand par rapport à K (ou K petit en comparaison avec v), c'est-à-dire si la convection est dominante. Pour illustrer cette conclusion dans le cadre de la méthode de Galerkin à éléments finis et à fonctions d'interpolation linéaires par morceaux, on a choisi les valeurs $v=1, K=10^{-3}$, $h= 1/80$ et on a obtenu la courbe de la fig.1, [1].

On y remarque que les oscillations de la solution numérique sont grandes bien que le pas h(=1/80) soit assez petit. C'est pourquoi cette solution numérique ne peut être acceptée à titre de solution approximative pour le problème aux limites différentiel donné. Pour éviter ces fausses oscillations -provoquées par la méthode numérique de résolution du problème aux limites- il existe plusieurs procédés. Parmi ces procédés, le procédé de décentrage (upwinding) semble jouir d'un usage plus fréquent. Ce procédé s'utilise tant dans la méthode des différences finies que dans la méthode de l'élément fini et consiste, au cas de la méthode des différences finies, à substituer à la dérivée convective (du premier ordre) une différence latérale (et non centrale) en amont (upwind) par rapport au sens (signe) de la vitesse v. De tels procédés de décentrage (upwinding) au cas de la méthode de l'élément fini (Galerkin-Petrov) ont été proposés par divers chercheurs : J.C.Heinrich, O.C.Zienkiewcz, A.R.Mitchell, T.J.Hughes O.Axelsson, M.Telias Hasson [1] [4] [8].

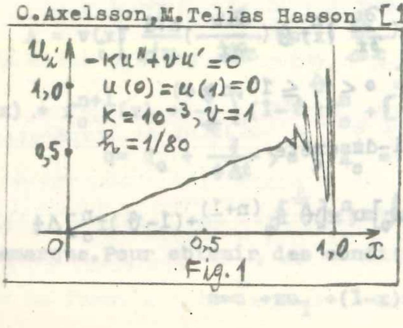

Fig. 1

Dans ce travail on étudie un problème de diffusion-convection unidimensionnel nonstationaire pour le cas où le coefficient de diffusion est une fonction de la coordonnée spatiale x et on utilise un procédé décrit dans [1].

a. Équation de la diffusion et de la convection unidimensionnelles nonstationnaires. Nous considérons l'équation de la diffusion-convection unidimensionnelle nonstationaire dans la forme opératorielle suivante:

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} + A_o u = f_o(x,t) \ , \quad (t,x) \in (o,T) \times \Omega$$

avec l'opérateur $A_o : D(A_o) \to L_2(\Omega)$ à coefficients dépendents de x, défini par l'égalité

(1a) $$A_o = v\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial}{\partial x}\right) + q_o$$

et aux conditions initiales et aux limites

$$u(x,o) = u^{(o)} \ , \ u(o,t) = u_o \ , u(1,t) = u_1 \ , \ x \in \Omega = (o,1), o < t \leq T$$

$$(q_o = \mathrm{const} \geq o \ , \ p = p(x) > o, \ \forall x \in \Omega \ , v = v(x), x \in \Omega)$$

où $u = u(x,t), (x,t) \in \Omega \times [o,T]$ est la fonction inconnue, $f_o(x,t)$, $(t,x) \in [o,T] \times \Omega$, est une fonction donnée (par exemple $f_o \in L_2$) et $D(A_o)$ est le domaine de définition de l'opérateur différentiel A_o; v - la vitesse d'un courant fluide de même que p - le coefficient de diffusion, définies sur $(o,1)$, sont considérées des fonctions réelles bornées données (continues ou discontinues) dérivables dans Ω ou dans des portions de l'intervalle Ω.

b. Discrétisation de l'axe du temps t. On considère sur l'axe Ot du temps le réseau de points $\omega_{\Delta t} = \{t_n \mid t_n = n\Delta t, \ n = o,1,2,\ldots, \tilde{N}\}$ et on utilise la formule à différences finies paramétrique [6] [7]

(2) $$u^{n+1} = u^n + \Delta t\left[(1-\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n + \theta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{n+1}\right];$$

$$(\text{où } u^n = u(x,t_n) = u^n(x) \ ; \quad o < \theta \leq 1 \ , n \geq o).$$

Nous adjoignons à (1) l'équation sémi-discrète

(3) $$(E + \theta\Delta t A_o)u^{n+1} = \left[E - (1-\theta)\Delta t A_o\right]u^n + \left[\theta f_o^{(n+1)} + (1-\theta)f_o^n\right]\Delta t$$

Par cette discrétisation l'équation aux dérivées partielles (1) se réduit à une équation différentielle, à chaque niveau du temps, par rapport à la fonction $u(x)=u^{n+1}(x), x\in(o,1)$ et nous sommes conduits de la sorte à résoudre le problème

$$(P)\begin{cases}\text{Déterminer la fonction } u\in D(A) \text{ telle que} & \\ Au(x) = f(x)\ ,\ x\in(o,1) & (4)\\ u(o)=u_o\ ,\ u(1)=u_1 & (4a)\end{cases}$$

où

$$A = v\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)+q$$

$$f(x)=f_o^{(n+1)}(x)+\frac{1}{\theta}\left\{\left[\frac{1}{\Delta t}-(1-\theta)A_o\right]u^n(x)+(1-\theta)f_o^n(x)\right\}$$

$$\left(q\equiv q_o+\frac{1}{\theta\Delta t}>o,\ u(x)=u(x,t_{n+1}),u^n(x)=u(x,t_n), o<\theta\leq 1\right)$$

et dans lequel

$u^n(x), f_o^n(x), f_o^{(n+1)}(x)$ sont connues au niveau du temps n.

• Le cas $v=v(x,t)$. Si $v=v(x,t)$, alors la discrétisation dans le temps à l'aide de la formule (2) conduit, au niveau du temps $t=t_{n+1}$ $(=(n+1)\Delta t)$ à l'équation

$$\begin{cases}Au(x) = f(x)\\ u(o)=u_o\ ;\ u(1)=u_1\end{cases}$$

où (n et n+1 indiquent le niveau du temps)

$$u(x) = u^{n+1}(x) \equiv u(x,t_{n+1}),$$

$$A = v(x)\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)+q\ ;\ v(x)=v^{n+1}(x)=v(x,t_{n+1});$$

$$f(x) = f_o^{n+1}(x)+\frac{1}{\theta}\left\{(1-\theta)f_o^n+\left[\frac{1}{\Delta t}-(1-\theta)\ A_o^n\right]u^n\right\},\ o<\theta\leq 1,$$

$$q= q_o+\frac{1}{\theta\Delta t}>o\ ;\ A_o^n = v(x,t_n)\frac{d}{dx}-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)+q_o,$$

$$f^k(x)=f(x,t_k)$$

Remarque. Pour obtenir des conditions bilocales homogènes nous posons

$$u=\tilde{u}+xu_1+(1-x)u_o \Longrightarrow \tilde{u}(o) = o\ ,\ \tilde{u}(1) = o$$

2. Formulation faible.

Forme intégrale pour le problème différentiel (P)

On introduit l'opérateur produit $K : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ par

(5) $$(K\varphi, w) = \int_0^1 e^{-\int_0^x \alpha(s)ds} \varphi(x)w(x)dx \ , \forall w \in L_2[0,1]$$

$$\left(\alpha(x) = \frac{1}{2p(x)}\left[v(x) - \frac{dp}{dx}\right] \right)$$

et aussi l'opérateur $B : D(B) \longrightarrow L_2[0,1]$ par

$$(B\varphi, w) = \int_0^1 w(x)\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha^2 - \alpha' + \frac{q}{p}\right)\varphi(x)dx \ , w \in D(B)$$

où le domaine de définition de l'opérateur B est constitué par l'ensemble de fonctions

$$D(B) = \left\{ \varphi \in H_0^1(0,1) \,|\, \varphi \text{ absolument continue} \right\}$$

Il est facile de démontrer que (K^* est l'adjoint de K)

(6) $$(K\varphi, w) = (\varphi, K^* w), \ \forall w \in L_2[0,1]$$

(7) $$(B\varphi, w) = (\varphi, Bw) \ , \forall w \in D(B)$$

$$\left(\int_0^1 \varphi'' w dx = -\int_0^1 w' d\varphi = \int_0^1 \varphi \, w'' dx, \quad \varphi \in D(B) \right)$$

(8) $$(B\varphi, \varphi) \geq 0 \ , \quad \varphi \in D(B)$$

$$\left((B\varphi, \varphi) = \int_0^1 \left[(\varphi' + \alpha\varphi)^2 + \frac{q}{p}\varphi^2 \right] dx \geq 0 \right)$$

On déduit des formules (6)-(8) la

PROPOSITION 1. L'opérateur K est autoadjoint et l'opérateur B est autoadjoint et positif.

Remarque 1. Du fait que l'exponentielle est une fonction indéfiniment dérivable dans $[0,1]$, si $\varphi \in D(B)$ alors on a également $K\varphi \in D(B)$

ce qui nous permet de prendre comme espace de résolution D(B).

- Désignons par A l'opérateur de l'équation (4). En ce cas, des calculs élémentaires nous montrent que

$$KAu = -p(Ku)'' + p(\alpha^2 - \alpha' + \frac{q}{p})Ku =$$

$$= pBKu$$

Par conséquent, l'équation (4) s'écrit dans la forme opératorielle

$$(9) \qquad pBKu(x) = Kf(x) \ , \ x \in \Omega$$

On peut également montrer qu'à partir de (9) on arrive à l'équation (4) en effectuant les calculs dans l'ordre suivant :

$$pBKu = -p\frac{d^2}{dx^2}(Ku) + p(\alpha^2 - \alpha' + \frac{q}{p})Ku = KAu$$

Le problème (P) se réduit au problème à énoncé intégral

$$(10) \quad (P1) \begin{cases} \text{Déterminer la fonction } u \in D(B) \text{ telle que} \\ (K^* BKu, w) = (\frac{1}{p} K^* Kf, w), \ \forall w \in D(B) \end{cases}$$

où (.,.) est le produit scalaire dans L_2.

<u>Formulation faible (généralisée) pour le problème</u> (P1). En tenant compte que dans l'équation (10) $w \in D(B)$ c'est-à-dire que w est une fonction qui s'annulle pour x=o et x=1, nous avons

$$(K^* BKu, w) = \int_0^1 w(x) K^* BKu(x)\, dx =$$

$$= \int_0^1 (Ku)'(Kw)'dx + \int_0^1 (\alpha^2 - \alpha' + \frac{q}{p})KuKw\, dx$$

Dans cette égalité ($uw \in D(B)$) nous avons

$$\int_0^1 (Ku)'(Kw)'dx = \int_0^1 Ku'Kw'dx - \int_0^1 \alpha^2 KuKwdx + \int_0^1 \alpha' KuKw\, dx$$

On obtient donc l'identité

$$(11) \qquad (K^* BKu, w) = (Ku', Kw') + (\frac{q}{p} Ku, Kw) \ , \ \forall w \in D(B)$$

Avec la formule (11) on peut présenter la

PROPOSITION 2. Le problème (P1) admet la formulation faible suivante:

$$(P2)\begin{cases} \text{Déterminer la fonction } u\in D(B) \text{ telle que} \\ (Ku',Kw') + (\frac{q}{p}Ku,Kw) = (\frac{1}{p}K^*Kf,w), \forall w\in D(B) \end{cases}$$

où $(.,.)$ est le produit scalaire dans L_2.

La solution unique $u\in D(B)$ du problème (P2) s'appelle solution généralisée (faible) du problème aux limites donné.

3. Résolution du problème à formulation faible (P2) par le procédé de Galerkin à éléments finis linéaires

a. Méthode de Galerkin généralisée. Nous allons choisir en D(B) un système de fonctions linéairement indépendentes qui satisfont à des conditions aux limites homogènes données $\varphi_k(x), x\in\Omega, k=\overline{1,N}$, et nous introduirons l'espace N-dimensionnel généré par ces fonctions (N=1,2,3,....)

$$D_N = \text{span}\{\varphi_1,...,\varphi_N\} = \{u_N \mid u_N = \sum_{j=1}^{N} c_j\varphi_j,\ c_j\in R^1 \text{ inconnue}\}$$

Le procédé global de Galerkin pour la résolution du problème (P2) s'énonce de la sorte :

$$(12)\quad (Pg)\begin{cases} \text{Il faut trouver la fonction } u_N\in H_K \text{ telle que} \\ (Ku_N',K\varphi_j')+(\frac{q}{p}Ku_N,K\varphi_j) = (\frac{1}{p}K^*Kf,\varphi_j),\ j=\overline{1,J-1} \end{cases}$$

Nous allons résoudre le Problème (P2) par la méthode de Galerkin discrétisée aux éléments finis qui s'obtiennent en prenant sur l'intervalle $[0,1]$ de l'axe réel Ox la division de points

$$\omega_h = \{x_j \mid x_j = jh,\ j=0,1,2,...,J,\ h=\frac{1}{J}, x_0=0, x_J=1\}.$$

Nous adjoindrons à chaque noeud j la fonction donnée $\varphi_j:[0,1]\to R^1$ de D(B) qui satisfait aux conditions requises par l'application de la méthode de l'élément fini : 1^0) φ_j sont linéairement indépendentes et choisies dans un système complet (dense en D(B)), 2^0) φ_j sont des fonctions définies aux éléments finis et continues dans l'intervalle entier Ω (degré de continuité requis par le problème à résoudre),

3°) φ_j sont des fonctions à support compact en Ω.

Nous allons supposer que $\varphi_j(x_j) = 1, j=\overline{0,J}$, et désigner par $D_J \subset D(\delta)$ l'espace à dimension finie généré par ces fonctions (le système $\{\varphi_j\}$ constitue une base de l'espace D_J). Outre les fonctions φ_j on introduit les fonctions test $w_j(x), x\in\Omega, j = \overline{0,J}$ qui jouissent de propriétés analogues à celles de la base $\{\varphi_j\}$; les fonctions w_j peuvent être égales aux fonctions de la base φ_j (méthode de Galerkin). Si $\varphi_j \neq w_j$ le procédé prend le nom de méthode des résidus pondérés (méthode de Galerkin-Petrov ou méthode de Galerkin généralisée). Dans les méthodes résiduelles, de même que dans la méthode d'approximation variationnelle, la solution du problème (P2) est choisie dans l'espace à dimension finie $D_J = \text{span}\{\varphi_1,\dots,\varphi_J\}$.

La méthode de Galerkin généralisée aux éléments finis consiste à réduire le problème (P2) au problème algébrique suivant (calcul des valeurs nodales $U_k = U(x_k)$ où $U(x) = u_h(x) \approx u(x)$):

$$(P3)\ (13)\left\{\begin{array}{l} \text{Déterminer la fonction } U(x) = \sum_{k=1}^{J-1} U_k \varphi_k(x) \text{ telle que} \\ \sum_{i=1}^{J-1} U_i\left[(K\varphi_i', Kw_j') + (\frac{q}{p} K\varphi_i, Kw_j)\right] = (\frac{1}{p} K^* Kf, w_j) \\ \qquad (j = \overline{1,J-1}\ ;\ w_j \in D_J) \end{array}\right.$$

La solution généralisée exacte $u(x)$ est ainsi cherchée sous la forme d'une fonction approximative d'interpolation dont les valeurs nodales U_j sont les solutions de (13).

b. <u>Méthode de Galerkin</u>. ($w_j = \varphi_j$). C'est la méthode représentée par (P3) avec $w_j = \varphi_j$. Nous allons adjoindre au noeud j ($j=\overline{1,J-1}$) la fonction linéaire par morceaux (éléments finis) de Lagrange

$$(14)\qquad \varphi_j(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x_j - x}{h}, & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ 1 - \dfrac{x - x_j}{h}, & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0, & x \notin (x_{j-1}, x_{j+1}) \end{cases}$$

Dans cette formule, φ_j sont les fonctions d'essai (la base de l'espace d'approximation). Nous choisirons les fonctions test w_j identiques aux fonctions d'essai φ_j, c'est-à-dire nous prendrons

$$w_j(x) = \varphi_j(x), \quad j = \overline{1, J-1}$$

En tenant compte de l'opérateur K et du fait que le support de la fonction est au plus égal à $2h (= x_{j+1} - x_{j-1})$, il s'ensuit que tous les termes de (13) qui contiennent des noeuds i différents de $j-1$, $j, j+1$ seront nuls.

Le problème (P3) s'explicite dans le problème algébrique suivant:

$$\text{(P4)}\ \begin{cases} \text{Trouver les valeurs } U_j,\ j=1,J-1, \text{ telles que} \\ a_{j,j-1}U_{j-1} + a_{j,j}U_j + a_{j,j+1}U_{j+1} = f_j, \quad j = \overline{1,J-1} \qquad (15) \end{cases}$$

où les coefficients connus $a_{j,m}$ ont les expressions suivantes :

$$a_{j,j-1} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} (p\varphi'_{j-1}\varphi'_j + q\varphi_{j-1}\varphi_j)\, e^{-\int_0^x \frac{v}{p} ds}\, dx$$

$$(16)\qquad a_{j,j} = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} (p\varphi'^2_j + q\varphi^2_j)\, e^{-\int_0^x \frac{v}{p} ds}\, dx$$

$$a_{j,j+1} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} (p\varphi'_{j+1}\varphi'_j + q\varphi_{j+1}\varphi_j)\, e^{-\int_0^x \frac{v}{p} ds}\, dx$$

$$f_j = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} e^{-\int_0^x \frac{v}{p} ds} f(x)\varphi_j(x)\, dx$$

avec

$$K^2(x) = \frac{p(x)}{p_0}\, e^{-\int_0^x \frac{v(s)}{p(s)} ds} \qquad \text{et } p_0 = p(0) = 1$$

Nous allons utiliser les expressions des fonctions de la base φ_j données en (14) et écrire

$$a_{j,j-1} = \frac{1}{h^2}\left[-I(j-1,j) + qI^{(1)}(j-1,j)\right];$$

(17)
$$a_{j,j} = \frac{1}{h^2}\left\{ I(j-1,j+1) + q\left[I^{(2)}(j-1,j)+I^{(1)}(j,j+1)\right]\right\};$$

$$a_{j,j+1} = \frac{1}{h^2}\left[-I(j,j+1) + qI^{(2)}(j,j+1)\right] (= a_{j,j-1}(j \to j+1))$$

et les intégrales I se calculent par les formules

$$I(\alpha,\beta) = \int_{x_\alpha}^{x_\beta} p(x)e^{-b(x)}\,dx \quad ; \quad b(x) = \int_0^x \frac{v(s)}{p(s)}\,ds \;;$$

(18)
$$I^{(1)}(j-1,j) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} e^{-b(x)}(x-x_{j-1})(x_j-x)\,dx \;;$$

$$I^{(2)}(j-1,j) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} e^{-b(x)}(x-x_{j-1})^2\,dx \;;$$

$$I^{(1)}(j,j+1) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{-b(x)}(x_{j+1}-x)^2\,dx \;;$$

$$I^{(2)}(j,j+1) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{-b(x)}(x-x_j)(x_{j+1}-x)\,dx \;(= I^{(1)}(j,j+1))$$

Nous avons également la formule

$$f_j = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} e^{-b(x)}f(x)\,dx - \int_{x_{j-1}}^{x_j} e^{-b(x)}f(x)(x_j-x)\,dx -$$

$$- \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{-b(x)}f(x)(x-x_j)\,dx$$

4. Cas particuliers (méthode de Galerkin)

a. Coefficient de diffusion constant et vitesse constante. Nous allons étudier le cas où tant la vitesse du fluide v que le coefficient de diffusion p sont des quantités constantes :

$$v(x) = v \ , \ p(x) = p \ , \ x \in [0,1] \tag{19}$$

En ce cas si nous écrivons (P - nombre de Reynolds(Péclet) numérique)

$$r = \frac{h p^2}{v^2} e^{-(v x_{j-1})/p} \ , \ P = \frac{hv}{p}$$

les intégrales (18) prennent la forme suivante

$$I(j-1,j) = \frac{v}{h} r(1-e^{-P}) \ ,$$

$$I(j-1,j+1) = \frac{v}{h} r(1-e^{-2P}) \ ,$$

$$I(j,j+1) = e^{-P} I(j-1,j) \ ;$$

$$\begin{aligned} I^{(1)}(j-1,j) &= r\left[(1+\frac{2}{P})e^{-P} + (1-\frac{2}{P})\right]; \\ I^{(2)}(j-1,j) &= 2r\left[\frac{1}{P} - (\frac{1}{P} + \frac{1}{2}P + 1)e^{-P}\right]; \\ I^{(1)}(j,j+1) &= 2r\left[(\frac{1}{P} + \frac{1}{2}P - 1)e^{-P} - \frac{1}{P}e^{-2P}\right]; \\ I^{(2)}(j,j+1) &= r\left[(1-\frac{2}{P})e^{-P} + (1+\frac{2}{P})e^{-2P}\right], \end{aligned} \tag{20}$$

Pour les coefficients $a_{j,k}$ nous obtenons selon (17) les formules

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{h} a_{j,j-1} &\equiv \alpha_{j,j-1} = q-(\frac{v}{h} + \frac{2q}{P}) + \left[\frac{v}{h} + q(1+\frac{2}{P})\right] e^{-P} \equiv a \\ \frac{h^2}{h} a_{j,j} &\equiv \alpha_{j,j} = -4qe^{-P} + (\frac{v}{h} + \frac{2q}{P})(1-e^{-2P}) \equiv b. \\ \frac{h^2}{h} a_{j,j+1} &= \alpha_{j,j+1} = e^{-P}\alpha_{j,j-1} \equiv c \quad ; \ (c = e^{-P}a) \end{aligned} \tag{21}$$

Pour le terme libre de (15) nous avons l'expression

$$(22) \qquad \frac{h^2}{\pi} f_j = F_j = \left(\frac{v}{p}\right)^2 \int_0^h e^{-(v/p)s ds} f(s+x_{j-1})s\, ds +$$

$$+ \int_h^{2h} e^{-\frac{v}{p} s ds} f(s+x_{j-1})(2h-s)\, ds$$

L'équation aux différences finies(15) s'écrit sous la forme

$$(23) \qquad aU_{j-1} + bU_j + cU_{j+1} = F_j \ , \ j=1,J-1$$

où les coefficients sont donnés par (21).

Propriétés du schéma de Galerkin (23). Le système (23) jouit des propriétés suivantes :

1. Le système (23) est un système algébrique linéaire par rapport aux inconnues U_j, $j=1,J-1$,et tridiagonal (la matrice du système est tridiagonale)

2. Les coefficients a et c sont du même signe. Ceci résulte de l'expression de c, en tenant compte que les valeurs de la fonction exponentielle sont toujours positives.

3. La somme des coefficients de chaque équation est positive. Nous avons en effet

$$a+b+c = q(1 - e^{-P})^2, \ (q > 0)$$

Définition. Un système linéaire et tridiagonal ,tel le système (23), qui satisfait aux conditions

$$a + b + c \geq 0 \ , \ a \leq 0 \ , \ c \leq 0$$

s'appelle de type positif.

PROPOSITION 3. Le système (23) est de type positif s'il satisfait à la condition

$$(24) \qquad q < \frac{v^2}{2p} \frac{th \frac{1}{2}|P|}{\frac{1}{2}|P| - th \frac{1}{2}|P|}$$

Démonstration. Nous supposerons $a < 0$. En ce cas on déduit de (21_1) avec $P > 0$ (vitesse $v > 0$)

$$(25) \qquad q\left(\frac{P}{2} - \operatorname{th}\frac{P}{2}\right) < \frac{P}{2}\operatorname{th}\frac{P}{2}$$

d'où il résulte que

$$(25') \qquad q < \frac{v^2}{2p}\,\frac{\operatorname{th}\frac{P}{2}}{\frac{P}{2} - \operatorname{th}\frac{P}{2}}$$

($-1 \leq \operatorname{th} x \leq 1$ et $x > \operatorname{th} x$ si $x > 0$)

Si $P < 0$ (vitesse $v < 0$), nous poserons $P = -P'$ avec $P' > 0$ (et $v = v'$, $v' > 0$) et nous obtenons la même relation (25) avec P' à la place de P et v' à la place de v.

- Simplification de la condition (24) pour P grand. Il existe en effet un P^* tel que pour tous les $P > P^*$ on ait $\operatorname{th}(P/2) > 1/2$. Alors

$$\frac{\operatorname{th}\frac{|P|}{2}}{\frac{|P|}{2} - \operatorname{th}\frac{|P|}{2}} > \frac{\frac{1}{2}}{\frac{|P|}{2} - \frac{1}{2}}$$

et la condition (24) est satisfaite si l'on prend

$$q < \frac{v^2}{2|v|h - p} \quad \text{ou} \quad q < \frac{v^2}{2h|v|}, \ \text{(avec } p \text{ petit)}$$

ou

$$hq < \frac{1}{2}|v|$$

En considérant le problème non stationnaire donné nous concluons que pour avoir un système d'équations aux différences finies de type positif à chaque niveau (ou pas du temps) il faut que Δt soit choisi de telle sorte que

$$(26) \qquad \frac{1}{\theta}\frac{h}{\Delta t} < \frac{|v|}{2} - hp_0 \qquad \text{(pour } P \text{ grand)}$$

b. Coefficient de diffusion linéaire. Nous allons considérer le cas où le coefficient de diffusion p est une fonction linéaire de x :

$$p(x) = ax + 1\ ,\quad x \in \Omega = [\,0,1\,]\ ,\quad a=\text{const} > 0 \tag{27}$$

Le problème numérique (P4) devra être résolu en utilisant la fonction p donnée par (27). A cet effet nous allons calculer les coefficients (17) en effectuant au préalable les intégrations indiquées en (18). Pour les coefficients de l'équation aux différences finies (17) nous avons les valeurs :

$$\left(\gamma = 1 - \frac{v}{a}\ ,\quad p_m = p(x_m) = ax_m + 1,\quad \tilde{\gamma} = -\frac{1}{a(1+\gamma)h^2} \right)$$

$$I(\alpha,\beta) = \frac{1}{a(1+\gamma)}\left(p_\beta^{1+\gamma} - p_\alpha^{1+\gamma} \right),$$

$$a_{j,j-1} = -\frac{1}{a(1+\gamma)h^2}\Big[\left(1 - \frac{qh}{a\gamma}\right) p_j^{1+\gamma} - \left(1 + \frac{qh}{a\gamma}\right) p_{j-1}^{1+\gamma} +$$

$$+ \frac{2q}{a^2\gamma(2+\gamma)}\left(p_j^{2+\gamma} - p_{j-1}^{2+\gamma} \right) \Big] \equiv \tilde{\gamma}\,\alpha_{j,j-1} \tag{28}$$

$$a_{j,j} = -\frac{1}{a(1+\gamma)h^2}\Big[p_{j-1}^{1+\gamma} + \frac{4hq}{a\gamma} p_j^{1+\gamma} - p_{j+1}^{1+\gamma} +$$

$$+ \frac{2q}{a^2\gamma(2+\gamma)}\left(p_{j-1}^{2+\gamma} - p_{j+1}^{2+\gamma} \right) \Big] \equiv \tilde{\gamma}\,\alpha_{j,j}$$

$$a_{j,j+1} = -\frac{1}{a(1+\gamma)h^2}\Big[-\left(1 + \frac{qh}{a\gamma}\right) p_j^{1+\gamma} + \left(1 - \frac{qh}{a\gamma}\right) p_{j+1}^{1+\gamma} +$$

$$+ \frac{2q}{a^2\gamma(2+\gamma)}\left(p_{j+1}^{2+\gamma} - p_j^{2+\gamma} \right) \Big] \equiv \tilde{\gamma}\,\alpha_{j,j+1}$$

Nous avons également l'expression

$$f_j = \frac{1}{h}\int_0^h \left[a(s+x_{j-1})+1 \right]^{1-\gamma} f(s+x_{j-1})\, s\, ds + \tag{29}$$

$$+ \frac{1}{h}\int_h^{2h} \left[a(s+x_{j-1})+1 \right]^{1-\gamma} f(s+x_{j-1})(2h-s)\, ds$$

Propriétés du système de Galerkin (pour le problème P4)

$$\alpha_{j,j-1}U_{j-1}+\alpha_{j,j}U_{j,j}+\alpha_{j,j+1}U_{j+1}=f_j, \quad j=1,J-1 \tag{30}$$

dans lequel les coefficients sont donnés par les formules (28).

Le schéma (30) représente un système linéaire et tridiagonal par rapport aux valeurs nodales inconnues U_j , $j=1,J-1$.

La somme des coefficients est

$$\alpha_{j,j-1}+\alpha_{j,j}+\alpha_{j,j+1}=\frac{qh}{a\gamma}\left(p_{j-1}^{1+\gamma}-2p_j^{1+\gamma}+p_{j+1}^{1+\gamma}\right)=$$

$$=\frac{qh}{a-v}\delta^2\left(p^{2-(v/a)}\right)_j$$

où δ^2 est l'opérateur de la différence centrale de la fonction $p^{2-(v/a)}$ au point $x = x_j$.

RÉFÉRENCES

1. Tellias,H., Résolution de l'équation de convection-diffusion et d'un modele de circulation océaniques générales par des méthodes d'éléments finis,Thèse,l'Institut Nat.Polytech.de Grenoble,1983
2. Samarskii,A.A., Vvedenie teoriju raznostnyh shem,Moskva,Nauka,1971
3. Marchouk,G.,I., Metode de analiză numerică,Acad RSR,Bucureşti,1983
4. - Finite Element Methods For Convection Dominated Flows, The Applied Mechanics Division (AMD),New-York,1979 (ed.T.J.Hughes)
5. Carrier,G.,F.,Pearson,C.,E., Partial Diff.Equations,Theory and Technique,Acad.Press,New-York,1976
6. - Finite Elements In Fluids,vol.3,John Wiley and Sons , New-York,1978 (cap.1 and cap.2 p.42)
7. Connor,J.,J.,Brebbia,C.,A., Finite Element Techniques For Fluid Flow,Newnes-Buttewort,London,1977
8. Baker,A.,J., Finite Element Computational Fluid Mechanics,Mc Graw-Hill Book Comp.,New-York,1983

This paper is in a final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.