

ASUPRA UNEI PROBLEME DE CONCURS

de

COSTICA MUSTĂŢA

La faza judeţeană a Concursului de Matematică al elevilor din judeţul Cluj, din data de 9.02. 1991, la clasa a XI-a a fost propusă următoarea problemă :

Problema 1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel că există două progresii aritmetice $\div a, b, c$ şi $\div p, q, r$ încît $f(a) + f(b) + f(c) < 0$ şi $f(p) + f(q) + f(r) > 0$. Să se arate că există o progresie aritmetică $\div \alpha, \beta, \gamma$ astfel încît $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 0$.

Această problemă reprezintă o formă particulară a Problemei 12, pag. 12 din [4], care are următorul enunţ :

Problema 12 [4]. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă care schimbă de semn pe $\mathbb{R}$ (adică există $u, v \in \mathbb{R}$ astfel că $f(u) \cdot f(v) < 0$). Atunci există o progresie aritmetică $\div \alpha, \beta, \gamma$ astfel că $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 0$.

O formulare mai generală a problemelor enunţate mai sus o constituie următoarea propoziţie :

PROPOZITIA 1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă care schimbă de semn pe $\mathbb{R}$. Atunci pentru orice număr natural $n \geq 3$ există o progresie aritmetică $\div x_1, x_2, \dots, x_n$ astfel încît

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) = 0.$$

Demonstraţie. Deoarece f schimbă de semn pe $\mathbb{R}$, există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$ astfel încît (de exemplu) $f(\alpha) < 0$ şi $f(\beta) > 0$.

Deoarece f este continuă pe R , există o vecinătate V a lui α astfel că pentru orice $x \in V$ să avem $f(x) < 0$; prin urmare există $\varepsilon_1 > 0$ astfel că $(\alpha - \varepsilon_1, \alpha + \varepsilon_1) \subset V$ și luând un $\xi > 0$ astfel că $0 < \xi < \varepsilon_1$, pentru orice $x \in [\alpha - \xi, \alpha + \xi]$ avem $f(x) < 0$. Fie acum

$$a_k = \alpha - \xi + \frac{2(k-1)\xi}{n-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Atunci numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ formează o progresie aritmetică cu rația $r_1 = 2\xi/(n-1)$ și deoarece $a_k \in [\alpha - \xi, \alpha + \xi]$ rezultă că $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) < 0$.

Procedînd analog, deoarece $f(\beta) > 0$ și f este continuă există $\eta > 0$ astfel că pentru orice $x \in [\beta - \eta, \beta + \eta]$ să avem $f(x) > 0$. Luînd

$$b_k = \beta - \eta + \frac{2(k-1)\eta}{n-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

obținem progresia aritmetică $b_1, b_2, \dots, b_n$ cu rația $r_2 = 2\eta/(n-1)$ pentru care $f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n) > 0$.

Fie acum funcția $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$F(t) = \sum_{k=1}^n f((1-t) \cdot a_k + t \cdot b_k)$$

Evident, F este funcție continuă pe $[0, 1]$ și în plus verifică

$$F(0) < 0 \quad \text{și} \quad F(1) > 0;$$

prin urmare există $t_0 \in (0, 1)$ astfel că $F(t_0) = 0$.

Luînd acum

$$x_k = (1 - t_0) \cdot a_k + t_0 \cdot b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

obținem progresia aritmetică $x_1, x_2, \dots, x_n$ cu rația $r = (1 - t_0) \cdot r_1 + t_0 \cdot r_2$ pentru care avem

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Observații.

1^o Analizînd demonstrația Propoziției 1 constatăm că inter-

vin în mod esențial noțiunile de continuitate și convexitate.

Fie progresele aritmetice $\div a_1, a_2, \dots, a_n$ și $\div b_1, b_2, \dots, b_n$. Scriem $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$; în felul acesta $a, b \in \mathbb{R}^n$ și le vom numi "puncte progresie aritmetică" din $\mathbb{R}^n$. Deoarece pentru orice $t \in [0, 1]$ punctul $x = (1 - t) \cdot a + t \cdot b$ este tot un punct progresie aritmetică, rezultă că mulțimea punctelor progresie aritmetică din $\mathbb{R}^n$ este o mulțime convexă din $\mathbb{R}^n$.

2° Se pune în mod natural următoarea problemă: dacă $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ sînt două puncte progresie geometrică din $\mathbb{R}^n$, adică avem $\div h_1, h_2, \dots, h_n$ și $\div g_1, g_2, \dots, g_n$, în ce condiții $(1 - t)h + t \cdot g$, $t \in [0, 1]$ este punct progresie geometrică? O condiție suficientă este evident, ca h și g să aibă aceeași rație q . În acest caz $(1 - t)h + tg$, $t \in [0, 1]$ are componentele (termenii) $(1 - t) \cdot h_k + t \cdot g_k = ((1 - t)h_1 + t g_1) \cdot q^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$; prin urmare $(1 - t) \cdot h + t \cdot g$ este punct progresie geometrică din $\mathbb{R}^n$.

PROPOZITIA 2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă care își schimbă semnul pe punctele $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha \neq \beta$, $\text{sgn}(\alpha \cdot \beta) = -1$. Atunci pentru orice număr natural $n \geq 2$ există o progresie geometrică $\div y_1, y_2, \dots, y_n$ astfel că

$$f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_n) = 0.$$

Demonstrație. Fie (de exemplu), $f(\alpha) < 0$ și $f(\beta) > 0$. Atunci există $p_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel că pentru orice x din intervalul $(\alpha - |\alpha|/p_1, \alpha + |\alpha|/p_1)$ să avem $f(x) < 0$; și există $p_2 \in \mathbb{N}^*$ astfel că pentru orice z din intervalul $(\beta - |\beta|/p_2, \beta + |\beta|/p_2)$ să avem $f(z) > 0$. Fie acum $p = \max(p_1, p_2)$. Atunci pentru orice x din intervalul $[\alpha - |\alpha|/(p+1), \alpha + |\alpha|/(p+1)]$ avem $f(x) < 0$ și pentru

oare $z \in [\beta - |\beta|/(p+1), \beta + |\beta|/(p+1)]$ avem $f(z) > 0$.

Considerăm următoarele două progresii geometrice :

$$\div \alpha, \alpha q, \alpha q^2, \dots, \alpha q^{n-1}, \quad q = [1 + |\alpha|/(\alpha(p+1))]^{1/(n-1)}$$

$$\div \beta, \beta r, \beta r^2, \dots, \beta r^{n-1}, \quad r = [1 + |\beta|/(\beta(p+1))]^{1/(n-1)}$$

Deoarece $\operatorname{sgn}(\alpha \cdot \beta) = 1$ rezultă că $\operatorname{sgn} \alpha = \operatorname{sgn} \beta$ prin urmare $q = r$; în plus avem

$$f(\alpha q^k) < 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$f(\beta q^k) = f(\beta r^k) > 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Considerînd funcția continuă $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} f((1-t)\alpha q^k + t\beta q^k) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f([(1-t)\alpha + t\beta] q^k) \end{aligned}$$

găsim că $G(0) < 0$, $G(1) > 0$, prin urmare există $t_0 \in (0, 1)$ astfel că $G(t_0) = 0$. Luînd

$$y_{k+1} = (1 - t_0)\alpha q^k + t_0 \beta q^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

găsim că

$$f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_n) = 0. \quad \text{q.e.d.}$$

Din Propozițiile 1 și 2 rezultă următorul corolar :

COROLARUL 1. Fie $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcțională continuă.

a) Dacă F schimbă de semn pe mulțimea punctelor progresie aritmetică din $\mathbb{R}^n$, atunci există cel puțin un punct progresie aritmetică pe care F se anulează.

b) Dacă F schimbă de semn pe două puncte progresie geometrică, avînd fiecare prima componentă negativă sau pozitivă simultan, atunci există cel puțin un punct progresie geometrică pe care F se anulează.

O formulare mult mai generală este cuprinsă în :

PROPOZIȚIA 3. Fie X un spațiu normat real și $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ o funcțională continuă care schimbă de semn pe X . Atunci pentru orice număr natural n există punctele $z_1, z_2, \dots, z_n$ în X astfel că

$$f(z_1) + f(z_2) + \dots + f(z_n) = 0.$$

Demonstrație. Conform ipotezei există $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ astfel că $f(x_1) > 0$ și $f(x_2) < 0$.

Pentru $r > 0$ și $x \in X$ notăm

$$B(x, r) = \{ z \in X \mid \|x - z\| < r \},$$

bila deschisă cu centrul x și raza r .

Deoarece f este continuă rezultă că există bilele

$$B(x_1, r_1) \text{ și } B(x_2, r_2),$$

unde $0 < r_1 < \|x_2 - x_1\|/3$ și $0 < r_2 < \|x_2 - x_1\|/3$ astfel încît pentru orice $x \in B(x_1, r_1)$ și orice $y \in B(x_2, r_2)$ să avem

$$f(x) > 0 \text{ și } f(y) < 0.$$

Fie

$$d(x_1, x_2) = \{ x \in X \mid \exists t \in \mathbb{R}, x = (1-t)x_1 + tx_2 \}$$

dreapta ce trece prin punctele x_1 și x_2 .

Intersecția acestei drepte cu bilele $B(x_1, r_1)$ și $B(x_2, r_2)$ reprezintă cîte un segment deschis

$$U_1 = (u_1, u_1^1) \text{ și } U_2 = (u_2, u_2^1),$$

unde

$$u_1 = (1 + r_1/\|x_2 - x_1\|) \cdot x_1 - (r_1/\|x_2 - x_1\|) \cdot x_2$$

$$u_1^1 = (1 - r_1/\|x_2 - x_1\|) \cdot x_1 + (r_1/\|x_2 - x_1\|) \cdot x_2$$

$$u_2 = (-r_2/\|x_2 - x_1\|) \cdot x_1 + (1 + r_2/\|x_2 - x_1\|) \cdot x_2$$

$$u_2^1 = (r_2/\|x_2 - x_1\|) \cdot x_1 + (1 - r_2/\|x_2 - x_1\|) \cdot x_2$$

Observăm că $\|u_1 - u_1'\| = 2r_1$ și $\|u_2 - u_2'\| = 2r_2$. Fie acum $x_1, x_2, \dots, x_n \in U_1$ și $y_1, y_2, \dots, y_n \in U_2$ și fie $v_k = (1-\lambda)x_k + \lambda y_k$, $\lambda \in [0,1]$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Considerăm funcționala $F : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită astfel

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^n f(v_k) = \sum_{k=1}^n f((1-\lambda)x_k + \lambda y_k), \quad \lambda \in [0,1].$$

Deoarece $F(0) = \sum_{k=1}^n f(x_k) > 0$ și $F(1) = \sum_{k=1}^n f(y_k) < 0$ rezultă că există $\lambda_0 \in (0,1)$ astfel încît $F(\lambda_0) = 0$. Notînd

$$z_k = (1 - \lambda_0) \cdot x_k + \lambda_0 \cdot y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

avem $f(z_1) + f(z_2) + \dots + f(z_n) = 0$. q.e.d.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Holmes, R.B., Geometric Functional Analysis and its Applications, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New - York - Heidelberg - Berlin, 1975.
- [2] Păvăloiu Ion, Rezolvarea ecuațiilor prin interpolare, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1981.
- [3] Popoviciu, T., Introduction à la théorie des differences divisées, Bull. Mathém. de la Société Roumaine des Sciences, Tom. 42 (1940) 1, 65 - 78.
- [4] Sadovnicij, V.A., Grigorijan, A.A., Konjaghin, S.V., Probleme de olimpiade matematice studentești (în lb.rusă), Editura Universității din Moscova, 1987.
- [5] Stancu, D.D., Curs și culegere de probleme de analiză numerică, vol. I, Cluj-Napoca (1977) (litografiat).

Institutul de Calcul al
Academiei Române, Filiala
Cluj-Napoca
Oficiul Poștal 1, C.P. 68