

ACADEMIA ROMÂNĂ

STUDII ȘI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

5-6

TOMUL 54

septembrie - decembrie

1995

EXTRAS

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE

METODA VARIAȚIONALĂ RITZ PENTRU O PROBLEMĂ A CONDUȚIEI CĂLDURII ÎN PLĂCI PLANE. APLICAȚIE CU FUNȚII DE PROBĂ SUB FORMĂ DE MONOAME $X^i Y^j$

de P. BRĂDEANU*, MIOARA BONCUȚ ** și DOINA BRĂDEANU ***

Se precizează cadrul funcțional al metodei variaționale pentru o problemă de transfer staționar de căldură, (1.1)–(1.4) și se determină: soluția aproximativă Ritz (u_n), norma sa energetică ($\|u_n\|_A$) și o formulă pentru valoarea minimă ($F(u_n)$) a funcționalei variaționale. Se dau formule pentru delimitarea erorii. Se face o aplicație numerică în care se utilizează funcții de probă de tip monom și se justifică, în contextul problemei, proprietățile lor. Cu metoda Ritz programată în întregime în limbajul Turbo-Pascal se obțin aproximații până la ordinul 28 (pentru u_n , $\|u_n\|_A$, $F(u_n)$).

INTRODUCERE

Rezolvarea exactă sau aproximativă a problemei de transfer de căldură (1.1) – (1.4) prezintă dificultăți din cauza condițiilor la limită mixte neomogene și a faptului că condiția Neumann este diferită de două segmente ale frontierei $\partial\Omega$ (de tip Lipschitz). Ca urmare, nu se poate asocia în mod direct la (1.1)–(1.4) o ecuație operatorială și să se folosească teoria operatorilor, ca și în metodele funcționale standard de aproximație variațională. În lucrarea [2] se reușește să se omogenizeze problema (în acord cu teoria R -funcțiilor), să se scrie ecuația operatorială corespunzătoare $Au = f_0$ și să se construiască funcționala variațională care, însă, nu poate fi folosită practic, din cauza complicației funcției f_0 . Problema se poate rezolva și prin metode abstracte folosind lema Lax-Milgram [11], [1], [10]. Aici utilizăm o metodă directă mai simplă bazată pe procedeul Galerkin pentru construirea funcționalei variaționale relativ la soluția clasică și continuăm cu un procedeu de extensie la spațiul energetic (soluția generalizată). În acest cadru funcțional se aplică algoritmul lui Ritz care, pentru o aplicație numerică – alegând monoame pentru funcțiile de probă – se programează în întregime la un calculator pentru a obține aproximații de ordin înalt.

* Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca

** Universitatea din Sibiu

*** Institutul de calcul, Acad. Română, Filiala Cluj-Napoca

1. PROBLEMA DIFERENȚIALĂ LA LIMITĂ ȘI PROBLEME VARIAȚIONALE

a) *Problema la limită mixtă.* Se consideră o placă omogenă dreptunghiulară, situată în planul raportat la reperul Oxy , care ocupă domeniul $\overline{\Omega} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ mărginit de frontiera $\partial\Omega$. Se presupune că în placa Ω are loc un transfer de căldură, în regim staționar, care se reprezintă prin următorul model matematic, fig. 1:

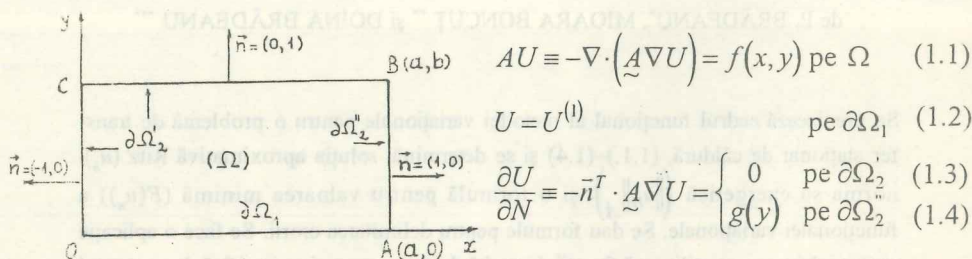


Fig. 1

unde U este repartiția temperaturii pe placa Ω ; A , ∇ și $\bar{n}$ sunt matricele

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}, \quad \bar{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}, \quad |\bar{n}| = 1; \quad (1.5)$$

λ_i sunt coeficienții constanți pozitivi ai conductivității termice în placa $\overline{\Omega}$, $\bar{n}$ este normala exterioră unitară la $\partial\Omega$ iar f este funcția sursă interioară de căldură; T indică transpusa.

Se caută soluția clasică: $U = U(x, y)$ din clasa $M = C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ care să verifice (în sens clasic) ecuația eliptică (de tip divergență) (1.1) și condițiile la limită mixte (Dirichlet – Neumann) (1.2) – (1.4) pentru $U^{(1)}$, f , g funcțiile date. Pentru simplitate se va alege $U^{(1)} = \text{const.}$, $U(x, y) = U^{(1)} + u(x, y) (\Rightarrow u = 0 \text{ pe } \partial\Omega_1)$.

b) *Problema variațională pentru soluția clasică.* Se presupune că problema (1.1)–(1.4) are soluția clasică $u = u_0$. Atunci, aplicând procedeul Galerkin și formula lui Gauss (în $C^2(\Omega)$) se construiește funcționala de staționaritate (cu proprietatea: variația $\delta F_1(u_0) = 0$; T indică transpusa):

$$F_1(u) = \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \nabla^T u \cdot A \nabla u - f u \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} g u dy \text{ sau } F(u) = 2F_1(u) \quad (1.6)$$

$$u \in D_c(\Omega) = \{u \in M | (1.2) - (1.4)\} \quad (1.6')$$

Reciproc. Să admitem că, în $F(u)$, u verifică condițiile $u \in C^2(\Omega)$, $u = 0$ pe $\partial\Omega_1$, și să presupunem că F are valoarea extremă în $u = u_1$. Atunci, folosind diferențialele Gateaux $F^{(m)}(u; h, \dots, h)$ [în punctul u_1 și direcția $h \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ cu $h = 0$ pe $\partial\Omega_1$] rezultă formulele

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F^{(1)}(u_1; h) &= \iint_{\Omega} (\nabla^T h \cdot \underline{A} \nabla u_1 - fh) d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} gh dy = 0, (\forall h) \\ \frac{1}{2} F^{(2)}(u_1; h, h) &= \iint_{\Omega} \nabla^T h \cdot \underline{A} \nabla h d\Omega, F^{(m)}(u_1; h, \dots, h) = 0, m \geq 3 \end{aligned} \quad (1.6'')$$

din care se deduce imediat, aplicând și formula lui Gauss, că $u_1 = u_0$ (soluția clasică), $F(u_0) = \min F(u)$ – minim global și că (1.3.)–(1.4) sunt condiții la limită naturale (u_0 este punct unic de minim).

Problema (1.1)–(1.4) este echivalentă cu problema variațională

$$(Pv) \begin{cases} \text{Să se găsească funcția } u_0 \in D(F) \text{ astfel că} \\ F(u_0) = \inf F(u), u \in D(F) \\ \text{unde } D(F) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \mid u = 0 \text{ pe } \partial\Omega_1\} \end{cases}$$

Se observă că $D(F)$ este un spațiu liniar (dens peste tot în spațiul Hilbert $H = L_2(\Omega)$) și că problema (1.1)–(1.4) se poate rezolva (în sens generalizat) chiar dacă nu are soluție (analitică) dacă considerăm.

c) *Problema variațională în spațiul energetic H_A .* Se introduce operatorul $A = -\nabla \cdot (\underline{A} \nabla u)$, definit pe subspațiul liniar $D_1(A) = \{u \in D(F) \mid Au \in L_2(\Omega)\}$ (A este liniar, simetric și pozitiv definit [2]), spațiul Hilbert și spațiul Sobolev $H^1(\Omega)$ (cu normele obișnuite) și se consideră că $f \in L_2(\Omega)$. Problema (Pv) se poate prelungi la un spațiu Hilbert energetic H_A [completarea lui $D_1(A)$ în norma energetică $\|\cdot\|_A$ [1], [2], [5]] care conține funcții cu gard de derivabilitate mai mic decât $\dot{D}_1(A)$ – a se vedea $F(u)$; funcțiile din H_A nu respectă, în mod obligatoriu, condițiile naturale (1.3)–(1.4) (ca și funcțiile din $D_1(A)$). Problema (1.1)–(1.4) este echivalentă (în sens generalizat), conform teoremei minimului funcționalei energiei pe H_A , cu problema variațională [8], [4]

$$(\tilde{P}v) \begin{cases} \text{Să se găsească funcția } \tilde{u} \in H_A \text{ astfel ca} \\ F(\tilde{u}) = \inf F(u), u \in H_A \end{cases} \quad (1.7)$$

unde funcționala F are expresia

$$F(u) = (u, u)_A - 2(f, u)_{L_2(\Omega)} + 2(g, u)_{L_2(\partial\Omega_2^*)}, u \in H_A; \quad (1.8)$$

produsul scalar energetic $(\cdot, \cdot)_A$ și norma energetică $\|\cdot\|_A$ (pe $D_1(A)$ și, extins, pe H_A) se definesc cu egalitățile (conform cu teoria din [8])

$$(u, v)_A = \iint_{\Omega} \nabla^T u \cdot \underline{A} \nabla v d\Omega; \|u\|_A^2 = \iint_{\Omega} \nabla^T u \cdot \underline{A} \nabla u d\Omega; u, v \in H_A \quad (1.9)$$

iar spațiul energetic H_A al problemei (1.1)–(1.4) se alege astfel (justificarea se poate face cu teoria din [8]):

$$H_A = H_{01}^1 \Omega = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ pe } \partial\Omega_1; \|u\|_{H_{01}^1(\Omega)} = \|u\|_A \right\} \quad (1.10)$$

Observații. Problema $\left(\tilde{P}v \right)$ are întodeauna soluție (soluția generalizată $\tilde{u}$ pentru (1.1)–(1.4); în general $\tilde{u} \neq u_0$) și are sens chiar dacă (1.1)–(1.4) nu are soluție (clasică). Însă, dacă (1.1)–(1.4) are soluția clasică u_0 atunci $u_0 \equiv \tilde{u}$, [7], [8] și, în consecință, aproximația lui $\tilde{u}$ coincide cu aproximația lui u_0 . Deci, chiar dacă nu se cunoaște u_0 în formă analitică (ceea ce se întâmplă în general), se poate determina o aproximație a sa u_{on} calculând, de exemplu, prin metoda lui Ritz (global sau pe elemente finite) o aproximație $\tilde{u}_n$ a soluției generalizate $\tilde{u}$; atunci $\tilde{u}_n = u_{on}$ și mai rămâne să se estimeze eroarea, metoda lui Ritz fiind convergentă în H_A (în norma $\|\cdot\|_A$ din H_A).

2. METODA LUI RITZ PENTRU PROBLEMA $(\tilde{P}v)$

a) *Algoritmul lui Ritz.* Se dezvoltă în următoarele etape: (1°) se alege un sistem de funcții (de probă, bază) $\{\varphi_i\}_1^n \subset H_A$ care să fie liniar independent și complet în H_A (în norma $\|\cdot\|_A$ din H_A), (2°) se introduce subspațiul n (finit) – dimensional $H_A^{(n)} = H_{01}^{1,n}(\Omega) = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ cu norma din H_A în care se alege funcția (combinație liniară – soluția Ritz pentru $\tilde{u}$):

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} \varphi_k(x, y), \quad c_k \text{ (necunoscute)} \in R^1 \quad (2.1)$$

cu proprietatea $(F(u))$ dată în (1.8):

$$F(u_n) = \min_{u \in H_A^{(n)}} F(u)$$

Se introduc matricele (T – indică transpusa)

$$K = [K_{ij}]_{n \times n}, \quad b = (b_1, \dots, b_n)^T, \quad c^{(n)} = (c_1^{(n)}, \dots, c_n^{(n)})^T, \quad (2.2)$$

$$r = (r_1, \dots, r_n)^T$$

în care

$$\begin{cases} K_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)_A = \iint_{\Omega} \nabla^T \varphi_i \cdot \tilde{A} \nabla \varphi_j \, dx dy \\ b_i = (g, \varphi_i)_{L_2(\partial\Omega_2^+)} = \int_{\partial\Omega_2^+} g \varphi_i \, dy \\ r_i = \iint_{\Omega} f \varphi_i \, dx dy \end{cases} \quad (2.3)$$

și se poate scrie că ($n = 1, 2, 3, \dots$):

$$F(u_n) = c^{(n)T} K c^{(n)} + 2(b-r)^T c^{(n)} \left[\equiv \bar{F}(c^{(n)}) = \min_{R^n} \right] \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{F}}{\partial c^{(n)}} = K c^{(n)} + (b-r) = 0 \text{ sau } \sum_{j=1}^n K_{ij} c_j^{(n)} = r_i - b_i, \quad i = \quad (2.5)$$

Rezolvând sistemul algebric liniar și neomogen (2.5) (de tip Cramer; K – pozitiv definită) – denumit sistemul lui Ritz – se obține soluția $c_k^{(n)} = \tilde{c}_k^{(n)}$ și apoi soluția aproximativă Ritz u_n cu (2.1).

Atunci, după cum se demonstrează ușor, se obțin următoarele rezultate:

$$\|u_n\|_A^2 = \sum_{i,j=1}^n (K_{ij} \tilde{c}_j^{(n)}) \tilde{c}_i^{(n)} = \sum_{i=1}^n (r_i - b_i) \tilde{c}_i^{(n)}, \quad n=1,2,\dots \quad (2.6)$$

$$F(u_n) = \|u_n\|_A^2 - 2(f, u_n)_{L_2(\Omega)} + 2(g, u_n)_{L_2(\partial\Omega^*)} = -\|u_n\|_A^2 \quad (2.7)$$

$$\left((f, u_n) = \left(f, \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i^{(n)} \varphi_i \right) = \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i^{(n)} r_i \text{ etc} \right)$$

$$\|u_n - u_m\|_A^2 = \|u_n\|_A^2 - \|u_m\|_A^2, \quad n > m; \quad (\|\tilde{u} - u_n\|_A^2 = \|\tilde{u}\|_A^2 - \|u_n\|_A^2) \quad (2.8)$$

$$\delta_n \equiv \|u_n - u_0\|_A \leq \frac{1}{\alpha} \|Au_n - f\|_{L_2(\Omega)}, \quad u_n \in D_1(A), \quad \alpha = \text{const.} \quad (2.9)$$

(u_0 – soluția exactă: $Au_0 = f$)

Observații. Dacă $\{w_i\}$ este un sistem ortonormal și complet în energië (obținut prin ortonormalizarea Schmidt din $\{\varphi_i\}$) avem $u_n = \sum_{i=1}^n c_i w_i$, ($c_i = r_i - b_i$), adică u_n este suma parțială S_n a seriei Fourier $\tilde{u} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i w_i$. Scriem $u_n - u_m = \sum_{i=m+1}^n c_i w_i$ și aplicând teorema lui Pitagora se obține (2.8). Marginea erorii în norma energetică, (2.9), este evaluată în [2]; $\alpha = 1/\sqrt{C_F}$ unde C_F este constanta din inegalitatea lui Friedrichs generalizată [11], [8], vezi și [9].

3. APLICAȚIE NUMERICĂ

Se consideră problema particulară cu

$$a = 2, \quad b = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad U^{(1)} = 1, \quad f = 0, \quad g = -1$$

Deci, laturile OC și CB sunt izolate termic și există transfer de căldură prin latura AB (din exterior spre interior) și prin latura OA (spre exterior). Problema (1.1) – (1.4) se reduce la $(U = U^{(1)} + u = 1 + u)$:

$$Au \equiv -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \quad u = 0 \text{ pe } \partial\Omega_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pe } OC, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ pe } CB \quad (3.1)$$

$$\text{și } \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \text{ pe } AB$$

Pentru funcțiile de probă $\varphi_k(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ care trebuie să verifice condiția $\varphi_k(x, 0) = 0$ se aleg monoamele

$$\varphi_k(x, y) = y s_k(x, y); [\Rightarrow u_n \in D_1(A) (\subset H_A) \text{ ca și } u_0] \quad (3.2)$$

unde

$$s_k(x, y) = x^i y^j, k = \frac{1}{2}(i+j)(i+j+1) + j + 1; (i, j = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

$$(s_1 = 1, s_2 = x, s_3 = y, s_4 = x^2, s_5 = xy, s_6 = y^2, s_7 = x^3, s_8 = x^2y, s_9 = xy^2, s_{10} = y^3, \dots)$$

Construirea și rezolvarea sistemului Ritz (2.5) s-a programat în limbajul Turbo-Pascal 6.0 pentru calculatorul compatibil IBM PC AT 286 (implică evaluări de integrale, metoda lui Gauss de eliminare etc).

S-au obținut pentru sistemul (2.5) soluțiile $c_k^{(n)} = \tilde{c}_k^{(n)}$; ($n = \overline{1, 28}$; $k = \overline{1, n}$; $\tilde{c}_k^{(n)}$ calculate cu 11 zecimale) consemnate în Tabelul 1 cu patru zecimale. Aproximația Ritz u_n se determină cu (2.1). Pentru estimarea erorii lui u_n față de soluția clasică exactă (necunoscută) u_0 se aplică inegalitatea (2.9), care în acest

Tabelul 1

Coefficienții $c_k^{(n)} = \tilde{c}_k^{(n)}$

$k \backslash n$	4	8	13	20	28	$k \backslash n$	20	28
1	0,3333	-0,1966	0,1711	0,1051	0,0983	15	-0,0639	0,0818
2	-0,2500	-0,2680	-0,0853	0,1436	0,0022	16	0,0129	0,1528
3	-0,2500	-0,1514	-0,2334	-0,0585	0,0617	17	-0,2850	-0,4975
4	0,3125	0,2207	-0,1021	-0,0078	0,4163	18	0,7381	-0,6578
5		0,4468	0,7069	-0,2927	-0,4893	19	-0,4872	1,8354
6		0,0000	0,1488	0,1292	-0,0496	20	0,0639	-0,6995
7		0,1386	0,1885	-0,2355	-0,2657	21		0,0555
8		-0,4091	-0,0252	1,1306	-0,3053	22		0,0032
9			-0,7517	-0,5065	1,1309	23		-0,2096
10			0,0000	-0,0520	-0,1707	24		0,9083
11			0,0542	0,2075	-0,1461	25		-1,1465
12			-0,3450	-0,2472	1,6472	26		0,4632
13			0,4522	-0,8242	-2,0043	27		-0,0555
14				0,7016	0,0164	28		0,0000

caz devine (aici Δ -laplasian)

$$\delta_n^2 = \|u_n - u_0\|_A^2 \leq \frac{1}{\alpha^2} \|Au_n\|_{L_2(\Omega)}^2 =$$

$$= C_F \iint_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^n c_k^{(n)} \left(y \Delta s_k + 2 \frac{\partial s_k}{\partial y} \right) \right]^2 dx dy$$

De exemplu, în aproximația de ordinul patru ($n = 4$), folosind Tabelul 1, se obține pentru $u_4(x, y)$ următoarea margine superioară a erorii:

$$\|u_4 - u_0\|_A \leq 0,368 \sqrt{C_F} \text{ deoarece } \|Au_4\|_{L_2(\Omega)} = 4 \iint_{\Omega} \left(\tilde{c}_3^{(4)} + \tilde{c}_4^{(4)} y \right)^2 dx dy = 0,1354$$

Proprietăți ale sistemului $\{x^i, y^i\}$. Funcțiile $\varphi_k = x^k, (k = \overline{0, n})$ sunt liniar independente deoarece $\sum_0^n c_k x^k = 0, \forall x \in [0, a] \Rightarrow c_k = 0, k = \overline{0, n}$ (conform unei teoreme din algebră). Sistemul $\{x^k\}$ este liniar independent și în spațiul $L_2(0, a)$.

După teorema lui Weierstrass, dacă $u \in C[0, a]$, atunci oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un polinom $P_n(x) = \sum_0^n c_k x^k$ (adică se pot determina n și c_k) astfel că $|u(x) - P_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in [0, a]$ sau $\|u - P_n\|_\infty < \varepsilon$ (norma maximă $\|v\|_\infty = \max |v(x)|, x \in [0, a]$). Atunci, după definiție, mulțimea $\sum_0^n c_k x^k$ (n și c_k arbitrare) este densă în $C[0, a]$. Deoarece $C[0, a]$ este o mulțime densă în $L_2[0, a]$ (în norma lui $L_2[0, a]$), rezultă că $\{x^k\}_0^\infty$ este complet în $L_2[0, a]$.

Propoziția 1. Sistemul funcțiilor de probă $\{x^i, y^j\}$ este neminimal în spațiul energetic $H_A = H_{01}^1(\Omega)$.

Demonstrație. Fie sistemul $S = \{u_n\}_{n=1}^\infty$ în spațiul Hilbert H și subspațiul H_j generat de $u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_k, \dots$. Sistemul S este minimal în H dacă $u_j \notin H_j$ și neminimal dacă $u_j \in H_j$, [6]. Necesari și suficienți ca S să fie neminimal este existența numărului j cu proprietatea: $\forall \varepsilon > 0$ (dat), există numărul N și constantele $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_N$ astfel că

$$\left\| u_j - \sum_{k \neq j}^N a_k u_k \right\|_H < \varepsilon. \quad (3.5)$$

Fie subspațiul $H_A^{(m)} (\subset H_A)$, $H_A^{(m)} = \text{span}\{x^m y, x^m y^2, \dots\}$, $H_A = \bigcup_{m=1}^\infty H_A^{(m)}$, funcția $Y(y) = y^k - \sum_{n \neq k}^N a_n y^n \in H_{01}^1(\Omega)$ și să calculăm norma energetică:

$$\begin{aligned} & \left\| y^k x^m - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^N a_n y^n x^m \right\|_A^2 = \|x^m Y(y)\|_A^2 \\ &= \int_0^2 \int_0^1 \left[\lambda_1 (Y x^m)_x^2 + \lambda_2 (Y x^m)_y^2 \right] dx dy \quad (\equiv \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2) \\ & \left(I_1 = m^2 \frac{2^{2m-1}}{2m-1} \|Y\|_{L_2(0,1)}^2, I_2 = \frac{2^{2m+1}}{2m+1} \|Y'\|_{L_2(0,1)}^2 \right), \end{aligned}$$

Sistemul $u_j = j y^{j-1}, j = 1, 2, \dots$ este neminimal în spațiul $L_2(0, 1)$ (după teorema lui Muntz): $\forall \varepsilon^2 > 0, \exists N$ (natural) și constantele a_k astfel că are loc (3.5) cu $u_j = j y^{j-1}$. Rezultă că avem $\|Y'\|_{L_2(0,1)}^2 < \varepsilon^2$. Deoarece $Y(0) = 0$, cu inegalitatea Cauchy-Schwartz se poate scrie

$$\begin{aligned} |Y(y)|^2 &= \left| \int_0^y Y'(t) dt \right|^2 \leq \int_0^y dt \int_0^y Y'^2(\bar{t}) d\bar{t} \leq \int_0^1 Y'^2(y) dy \\ &= \|Y'\|_{L_2(0,1)}^2 \Rightarrow \|Y(y)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \|Y'(y)\|_{L_2(0,1)}^2 < \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Atunci, pentru m dat, se obțin inegalitățile

$$\|x^m Y(y)\|_A^2 \leq 2^{2m} \left(\frac{1}{2} \lambda_1 \frac{m^2}{2m-1} + \lambda_2 \frac{m^2}{2m+1} \right) \varepsilon^2 < C \varepsilon^2 \quad (C = \text{const.})$$

Aceasta înseamnă că $\{x^m y^k\}_{k=1}^\infty$ este neminimal în $H_A^{(m)}$ și apoi că $\{x^n y^k\}$ este neminimal în $H_A = H_{01}^1(\Omega)$ (evident, și pentru $A = -\Delta$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$). Propoziția 1 justifică aproximarea neuniformă, în raport cu n , prin u_n .

Observații. 1°) Pentru a verifica (2.7) cu $n=4$, determinăm u_n cu (2.1) (și Tab.1): și apoi aplicăm (1.8), (2.6). Se obține (comparație și cu Tab. 2):

$$u_4(x, y) = \sum_{k=1}^4 \tilde{c}_k^{(4)} \varphi_k = y \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}y + \frac{5}{16}x^2 \right)$$

$$F(u_4) = \iint_{\Omega} |\nabla u_4(x, y)|^2 dx dy - 2 \int_0^1 u_4(2, y) dy = -\frac{11}{24} \|u_4\|_A^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{10}{16} = \frac{11}{24} \approx 0,45833$$

2°) Din (2.8) găsim $\|u_5 - u_4\|_A = 0,2012$; $\|u_8 - u_7\|_A = 0,1305$; $\|u_9 - u_8\|_A = 0,0331$.

4. CONCLUZII

Problema (1.1)-(1.4), cu condiții Neumann diferite pe două părți ale frontierei, se poate formula variațional (clasic și generalizat) și rezolva cu algoritmul Ritz global prin care se determină soluția analitică Ritz u_n și valoarea minimă $F(u_n)$. Un rol hotărâtor în aceste metode îl are alegerea funcțiilor de probă (bază într-un subspațiu al spațiului soluției exacte). În [2] se aleg funcțiile trigonometrice și polinoame Cebîșev. Funcțiile de tip monom, alese aici, verifică cerințele principale ale metodei Ritz, conduc la calcule simple, dau rezultate numerice (Tabelul 2) în acord cu cele din [2], valori $F(u_n)$ care descresc cu n și valori u_n care cresc cu x (Tabelul 2) – conform teoriei – dar, în același timp provoacă o dispersie a

Tabelul 2

n	$F(u_n) = -\ u_n\ _A^2$	$C_F^{-1/2} \delta_n$ (2.9)	$u_n\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$u_n\left(1, \frac{1}{2}\right)$	$u_n\left(2, \frac{1}{2}\right)$
4	-0,45833	0,3680	0,1042	0,1354	0,4792
8	-0,52792	0,5548	0,0605	0,1155	0,6024
13	-0,53687	0,6435	0,0458	0,1202	0,6201
20	-0,54054	0,6793	0,0488	0,1270	0,6201
28	-0,54229	0,6805	0,0511	0,1268	0,6164

coeficienților Ritz $c_k^{(n)}$ (Tabelul 1) și dau o aproximare neuniformă în raport cu n a soluției u_0 (Tabelul 2). Deși nu este de dorit, această neuniformitate (sau instabilitate mică), ce se datorește neminimalității sistemului $\{\varphi_k\}$ de tip monom, nu este un dezavantaj prea mare și soluția obținută poate fi folosită practic (chiar pentru n relativ mic, de exemplu, $n = 8$ sau $n = 13$). Evaluarea erorii dată în (2.9) poate fi îmbunătățită de exemplu prin aplicarea metodei variaționale duale, soluția exactă nefiind cunoscută.

Primit în redacție la 7 iunie

BIBLIOGRAFIE

1. O. AXELSSON, V.A. BARKER, *Finite Element Solution of Boundary Value Problems. Theory and Computation*, Academic Press, Inc., Orlando, 1984.
2. R. BRĂDEAN, *Variational Approximation for a Dirichlet-Neumann problem of the Heat Conduction through Rectangular Plates*, *Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation*, **24**, 2 (1995).
3. J.J. CONOR, G.A. BREBBIA, *Finite Element Technique for Fluid Flow*, Newnes-Butterworths, London, 1977.
4. GH. DINĂ, *Metode variaționale și aplicații*, Edit. Tehnică, București, 1976.
5. B.A. FINLAYSON, *Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Acad. Press, New York, 1972.
6. S.G. MIHLIN, *Cislenia realizatii variaționih metodov*, Nauka, Moskva, 1966.
7. S.G. MIHLIN, *Variationnîe metodî v matematicheskoî fizike*, Nauka, Moskva, 1970.
8. S.G. MIHLIN, *Ecuații liniare cu derivate parțiale*, Edit. științifică și enciclopedică, București, 1983.
9. R.D. MILNE, *Applied Functional Analysis*, Pitman, London, 1980.
10. V. OLARIU, C. BRĂȚIANU, *Modelare numerică cu elemente finite*, Edit. Tehnică, București, 1986.
11. K. RECTORYS, *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, D. Reidel, Dordrecht, 1975.