

METODA ITERATIVĂ DE REZOLVARE A JOCURILOR NORMALE, FINITE, DE n PERSOANE

DE

A. B. NÉMETH

(Cluj)

Se generalizează metoda jocului fictiv propus de G. W. Brown pentru rezolvarea
jocurilor matriciale la cazul general al jocurilor normale, finite de n persoane.

Notăm (N. N. Vorobiev [4]) cu

$$\Gamma = \langle N; \{X_i\}_{i \in N}; \{f_i\}_{i \in N} \rangle, \quad N = \{1, \dots, n\},$$

un joc normal, finit, cu sumă nulă, de n persoane.

Fie

$$\bar{\Gamma} = \langle N; \{X_i^*\}_{i \in N}; \{f_i^*\}_{i \in N} \rangle$$

extinderea jocului Γ , unde $X_i^*, i=1, \dots, n$, este mulțimea tuturor măsurilor
de probabilitate din cîmpul de probabilitate definit pe X_i ; măsura degenerată
care face să corespundă unui element $x_i \in X_i$ probabilitatea 1, iar
la toate celelalte probabilitatea 0, se identifică cu elementul însuși. Func-
țiile $f_i^*, n, i=1, \dots, n$ se definesc în următorul fel:

$$\begin{aligned} f_i^* &= f_i(x^*) = f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \\ &= \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2 \dots \alpha_{j_n}^n f_i(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2, \dots, x_{j_n}^n), \end{aligned}$$

unde $\alpha_{j_i}^i$ este probabilitatea cu care figurează $x_{j_i}^i \in X_i$ în x_i^* ; avem deci

$$\alpha_{j_i}^i \geq 0; \sum_{j_i=1}^{m_i} \alpha_{j_i}^i = 1.$$

Teorema lui von Neumann — Nash afirmă că în mulțimea $X^* = \prod_{i \in N} X_i^*$ există un punct de echilibru al jocului $\bar{\Gamma}$, adică un punct x^* pentru care avem pentru orice $y^* \in X^*$

$$f_i(x_{N-i}^*, y_i^*) \leq f_i(x^*), \quad i=1, \dots, n,$$

unde

$$f_i(x_{N-i}^* | y_i^*) = f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, y_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*).$$

Noțiunea de punct de echilibru este noțiunea centrală a teoriei moderne a jocurilor. Prezintă interes deosebit metodele de aflare a punctelor de echilibru. Din punctul de vedere al metodelor de rezolvare, cea mai completă parte din teoria jocurilor o constituie jocurile matriciale. O importantă metodă de rezolvare a acestor jocuri este metoda iterativă Brown-Robinson-Shapiro.

În 1951 G. W. Brown [1] a propus o metodă iterativă pentru aflarea punctului șea a jocurilor matriciale, metodă avînd la bază un joc fictiv în care, după repetarea de t ori a jocului, jucătorul presupune că în al $t+1$ -lea joc adversarul său va aplica o strategie ce corespunde strategiei mixte formate din ponderile cu care a ales diferitele strategii pure în cele t jocuri anterioare, și efectuează în al $t+1$ -lea joc alegerea în așa fel că alege cea mai avantajoasă strategie pură în această ipoteză. Convergența acestei metode a fost demonstrată de J. Robinson [2] în anul 1953, iar H. N. Shapiro [3] a evaluat viteza de convergență a metodei.

În cele ce urmează vom demonstra convergența metodei analoge pentru jocuri normale finite de n persoane cu sumă nulă. Remarcăm că ultima condiție, adică ca jocul să fie cu sumă nulă, nu este esențială. Orice joc normal, finit, de n persoane poate fi transformat într-un joc normal, finit, de $n+1$ persoane cu sumă nulă prin introducerea unui jucător pasiv fictiv, fără ca mulțimea strategiilor optime a celor n jucători activi să se modifice. În demonstrație în limita posibilităților vom aplica limbajul lucrării [2].

Dăm următoarele două leme evidente :

LEMA 1. Pentru orice $x^* \in X^*$ și $i \in N$ avem :

$$\max_{x_i \in X_i} f_i(x_{N-i}^* | x_i) \geq f_i(x^*).$$

LEMA 2. Pentru orice $x^* \in X^*$ avem :

$$\sum_{i=1}^n \max_{x_i \in X_i} f_i(x_{N-i}^* | x_i) \geq 0.$$

Un rezultat fundamental în scopul care-l urmărim îl constituie următoarea teoremă :

TEOREMA 1. Condiția necesară și suficientă pentru ca x^* să fie punct șea este ca să avem :

$$\sum_{i=1}^n \max_{x_i \in X_i} f_i(x_{N-i}^* | x_i) = 0.$$

Demonstrație. Demonstrarea necesității este imediată. Pentru a demonstra suficiența condiției trebuie arătat că

$$f_i(x_{N-i}^* | y_i^*) \leq f_i(x^*), \quad i = 1, \dots, n,$$

pentru orice $y^* \in X^*$. Putem scrie pe baza lemei 1 :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \max_{x_i \in X_i} f_i(x_{N-i}^* | x_i) = \\ &= \max_{x_l \in X_l} f_l(x_{N-l}^* | x_l) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \max_{x_i \in X_i} f_i(x_{N-i}^* | x_i) \geq \\ &\geq \max_{x_l \in X_l} f_l(x_{N-l}^* | x_l) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n f_i(x^*). \end{aligned}$$

De aici urmează că

$$0 \geq \max_{x_l \in X_l} f_l(x_{N-l}^* | x_l) - f_l(x^*),$$

adică pentru orice $y_i^* \in X_i^*$,

$$f_l(x_{N-l}^* | y_l^*) \geq f_l(x^*).$$

Cum l a fost ales arbitrar, suficiența este demonstrată.

Considerăm acum jocul Γ și formăm următorul proces iterativ :

$t = 0$ Alegem $x_0 \in X = \times_{i \in N} X_i$ în mod arbitrar.

$t = 1$ Se alege $x_i^1 \in X_i$ astfel ca să avem

$$f_i(x_{N-i}^0 | x_i^1) = \max_{x_i \in X_i} f_i(x_{N-i}^0 | x_i) \quad i = 1, \dots, n.$$

$t + 1$. Se presupune că s-au efectuat primii t pași și se face pasul $t + 1$ alogindu-l pe $x_i^{t+1} \in X_i$ astfel ca

$$\sum_{j=0}^t f_i(x_{N-i}^j | x_i^{t+1}) = \max_{x_i \in X_i} \sum_{j=0}^t f_i(x_{N-i}^j | x_i).$$

Demonstrarea convergenței procesului se face cu ajutorul următoarei teoreme :

TEOREMA 2. *Avem*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^n \max_{x_i \in X_i} \sum_{j=0}^{t-1} f_i(x_{N-i}^j | x_i) = 0$$

Demonstrație. Presupunem că mulțimea X_i conține m_i elemente. Formăm cu ajutorul acestor elemente un vector m_i dimensional pe care îl vom nota tot cu X_i :

$$X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im_i}).$$

Punem în corespondență fiecărei mulțimi X_i vectorul cu elemente reale

$$Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im_i}).$$

Sistemul de vectori Y_i , $i = 1, \dots, n$, se va numi sistem inițial de vectori dacă este îndeplinită următoarea condiție :

$$\sum_{i=1}^n \max Y_i = 0,$$

unde

$$\max Y_i = \max_{1 \leq k \leq m_i} y_{ik}$$

Fiind dat un sistem inițial de vectori Y_i , $i = 1, \dots, n$, și elementul $x^0 \in X$, formăm șirurile de vectori m_i dimensional

$$Y_i = Y_i^0, Y_i^1, \dots, Y_i^t, \dots, \quad i = 1, \dots, n$$

în următorul fel

$$1. \quad Y_i^1 = Y_i^0 + (f_i(x_{N-i}^0 | x_i)), \quad i = 1, \dots, n$$

unde

$$(f_i(x_{N-i}^0 | x_i)) = (f_i(x_{N-i}^0 | x_{i1}), f_i(x_{N-i}^0 | x_{i2}), \dots, f_i(x_{N-i}^0 | x_{im_i})).$$

$$2. \quad Y_i^2 = Y_i^1 + (f_i(x_{N-i}^1 | x_i)), \quad i = 1, \dots, n,$$

unde elementele x_i^1 ($i = 1, \dots, n$) se află în următorul fel

$$y_i^0 + f_i(x_{N-i}^0 | x_i^1) = \max Y_i^1,$$

x_i^1 și y_i^0 fiind elemente cu aceiași indici ai lui Y_i^0 , respectiv X_i .

$$3. \quad Y_i^{t+1} = Y_i^t + (f_i(x_{N-i}^t | x_i)) = Y_i^0 + \left(\sum_{j=0}^t f_i(x_{N-i}^j | x_i) \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

unde elementele x_i^t , $i = 1, \dots, n$ se află în următorul fel :

$$y_i^t + \sum_{j=0}^{t-1} f_i(x_{N-i}^j | x_i^t) = \max Y_i^t.$$

Vom arăta că

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \max Y_i^t \geq 0.$$

Într-adevăr, putem scrie

$$\sum_{i=1}^n \max Y_i^t = \sum_{i=1}^n \max [Y_i^0 + \left(\sum_{j=0}^{t-1} f_i(x_{N-i}^j | x_i) \right)] \geq \sum_{i=1}^n \min Y_i^0 + \sum_{i=1}^n \max_{x_i \in X_i} \sum_{j=0}^{t-1} f_i(x_{N-i}^j | x_i) \geq \sum_{i=1}^n \min Y_i^0;$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \max Y_i^t \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \min Y_i^0 = 0.$$

Introducem notațiile

$$a_i = \max_{x \in X} |f_i(x)|, \quad a = \max_{1 \leq i \leq n} \{a_i\}.$$

Zicem că elementul $x_i \in X_i$ este esențial în intervalul $(s, s+t)$ al procesului, dacă există $t' \in (s, s+t)$ astfel ca

$$\max Y_{i'}^{t'} = y_{i'}^{t'} + \sum_{j=0}^{t'-1} f_i(x_{N-i}^j | x_{i'}^{t'}).$$

Dacă toate elementele $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, n$, sînt esențiale în intervalul $(s, s+t)$ al procesului, atunci are loc inegalitatea

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \max Y_{i'}^{t'} \leq 2nat.$$

Vom arăta că dacă toate elementele lui X , sînt esențiale în intervalul $(s, s+t)$ al procesului, atunci

$$(1') \quad \max Y_{i'}^{t'} - \min Y_{i'}^{t'} \leq 2a_i t.$$

Cum toate elementele lui X , sînt esențiale în intervalul $(s, s+t)$, se poate alege $t' \in (s, s+t)$ astfel ca să avem

$$\begin{aligned} \min Y_{i'}^{s+t} &= y_{i'}^{0'} + \sum_{j=0}^{s+t-1} f_i(x_{N-i}^j | x_{i'}^{s+t}) = y_{i'}^{0'} + \sum_{j=0}^{t'-1} f_i(x_{N-i}^j | x_{i'}^{t'}) + \\ &+ \sum_{j=t'}^{s+t-1} f_i(x_{N-i}^j | x_{i'}^{s+t}) \geq y_{i'}^{0'} + \sum_{j=0}^{t'-1} f_i(x_{N-i}^j | x_{i'}^{t'}) - a_i t = \max Y_{i'}^{t'} - a_i t. \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \max Y_{i'}^{s+t} &= y_{i'}^{0''} + \sum_{j=1}^{s+t-1} f_i(x_{N-i}^j | x_{i'}^{s+t}) = y_{i'}^{0''} + \sum_{j=0}^{t'-1} f_i(x_{N-i}^j | x_{i'}^{t'}) + \\ &+ \sum_{j=t'}^{s+t-1} f_i(x_{N-i}^j | x_{i'}^{s+t}) \leq \max Y_{i'}^{t'} + a_i t. \end{aligned}$$

Deci avem inegalitățile

$$\max Y_{i'}^{s+t} \leq \max Y_{i'}^{t'} + a_i t,$$

$$\min Y_{i'}^{s+t} \geq \max Y_{i'}^{t'} - a_i t.$$

Scăzînd aceste două inegalități, obținem inegalitatea (1'). Din inegalitatea

demonstrată și din presupunerea că toate elementele $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, n$, sînt esențiale în intervalul $(s, s+t)$ al procesului, urmează inegalitatea

$$\sum_{i=1}^n \max Y_i^{s+t} - \sum_{i=1}^n \min Y_i^{s+t} \leq 2 \text{ nat.}$$

Vom arăta că $-\sum_{i=1}^n \min Y_i^{s+t} \geq 0$. Sînt evidente următoarele relații

$$\begin{aligned} -\min Y_i^{s+t} &= \max(-Y_i^{s+t}) = \max\left[-Y_i^0 + \left(\sum_{j=0}^{s+t-1} -f_i(x_{N-1}^j | x_i)\right)\right] \geq \\ &\geq \min(-Y_i^0) + \max\left(\sum_{j=0}^{s+t-1} -f_i(x_{N-1}^j | x_i)\right) = -\max Y_i^0 + \\ &+ \max_{x_i \in X_i} \sum_{j=0}^{s+t-1} -f_i(x_{N-1}^j | x_i). \end{aligned}$$

Folosind lema 2 și presupunerea că sistemul de vectori Y_i , $i = 1, \dots, n$, este sistem inițial, putem scrie

$$-\sum_{i=1}^n \min Y_i^{s+t} \geq -\sum_{i=1}^n \max Y_i^0 + \sum_{i=1}^n \max_{x_i \in X_i} \sum_{j=0}^{s+t-1} -f_i(x_{N-1}^j | x_i) \geq 0.$$

Folosind această ultimă inegalitate, urmează inegalitatea (1).

Vom demonstra că pentru orice $\varepsilon > 0$ există t_0 , astfel ca

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n \max Y_i^t < \varepsilon t$$

ori de cîte ori $t > t_0$. Demonstrația o vom face prin inducție relativ la elementele din mulțimile X_i , $i = 1, \dots, n$. Afirmația este evidentă dacă toate mulțimile X_i conțin cîte un singur element. Presupunem că afirmația de mai sus este adevărată pentru toate subjocurile lui Γ . Presupunem că subjocul Γ' s-a obținut din Γ suprimînd elementul $x_i \in X_i$. Funcțiile f_i , $i = 1, \dots, n$ vor rămîne aceleași și pentru Γ' , numai că în domeniul de definiție a lor nu va mai figura $x_i \in X_i$. Pe baza presupunerii de inducție îl putem alege pe t^* astfel ca să avem pentru toate subjocurile de tipul lui Γ' , cu orice sistem inițial de vectori Y_i , $i = 1, \dots, n$, în procesul iterativ

$$\sum_{i=1}^n \max Y_i^{t^*} < \frac{1}{2} \varepsilon t^*,$$

ori de cîte ori $t \geq t^*$.

Vom arăta că dacă $x_i \in X_i$ nu este esențial în intervalul $(s, s+t^*)$ al procesului, atunci se poate scrie

$$\sum_{i=1}^n \max Y_i^{s+t^*} < \sum_{i=1}^n \max Y_i^s + \frac{1}{2} \varepsilon t^*.$$

Punem

$$Y_i^t = Y_i^{t^*} - (\max Y_i^t).$$

Observăm că

$$\sum_{i=1}^n \max Y_i^0 = 0.$$

Rezultă că sistemul de vectori Y_i^0 , $i = 1, \dots, n$, este sistem inițial. Deci Y_i^0 poate fi vector inițial în formarea unui proces iterativ. Din definiția lui Y_i^t urmează că componenta maximă a acestui vector va avea același indice ca și componenta maximă a vectorului $Y_i^{t^*}$. Cum $x_i \in X$, nu este esențial în intervalul $(s, s+t^*)$, înseamnă că $x_i^{t^*} \neq x_i$ pentru $0 \leq t < t^*$. Aceasta înseamnă că x_i nu va figura ca element esențial în primii t^* pași ai procesului iterativ ce pornește cu Y_i^0 . Urmează că elementul x_i poate fi suprimat în primii t^* pași, deci acești pași pot fi considerați ca pași referitori la procesul relativ la sub-jocul Γ' , și aplicînd ipoteza de inducție avem

$$\sum_{i=1}^n \max Y_i^t \leq \frac{1}{2} \varepsilon t^*,$$

adică

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n \max Y_i^{t+t^*} - \sum_{i=1}^n \max Y_i^t \leq \frac{1}{2} \varepsilon t^*.$$

Demonstrăm că dacă $t > \frac{4nat^*}{\varepsilon}$ are loc relația (2). Presupunem că $t > t^*$. Fie $0 \leq \theta < 1$ și q număr întreg, astfel ca să avem $t(\theta + q)t^*$.

A. Presupunem că există numărul întreg pozitiv $s \geq q$ astfel încît toate elementele $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, sînt esențiale în intervalul $((\theta + s - 1)t^*, (\theta + s)t^*)$. Presupunem că s este numărul maxim cu această proprietate. Deoarece în fiecare dintre intervalele $((\theta + r - 1)t^*, (\theta + r)t^*)$ pentru $r = s + 1, \dots, q$, există elemente $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, neesențiale, putem aplica formula (3) și obținem:

$$\sum_{i=1}^n \max Y_i^t \leq \sum_{i=1}^n \max Y_i^{(\theta+s)t^*} + \frac{1}{2} \varepsilon (q-s)t^*.$$

Pe de altă parte, pe baza alegerii lui s putem scrie aplicînd formula (1)

$$\sum_{i=1}^n \max Y_i^t \leq 2nat^* + \frac{1}{2} \varepsilon (q-s)t^*.$$

B. Dacă nu există s cu proprietatea de la punctul A, atunci în fiecare din intervalele $(\theta + s - 1) t^*$, $(\theta + s) t^*$, $s = 1, \dots, q$, există elemente $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, n$, neesențiale, deci putem scrie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \max Y_i^t &< \sum_{i=1}^n \max Y_i^{qt^*} + \frac{1}{2} \varepsilon q t^* \leq \sum_{i=1}^n \max Y_i^0 + \\ &+ \sum_{i=1}^n \max_{x_i \in X_i} \sum_{j=0}^{\theta t^*} f_i(x_{N-i}^j | x_i) + \frac{1}{2} \varepsilon q t^* \geq n a (\theta t^* + 1) + \frac{1}{2} \varepsilon q t^* < 2 n a t^* + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon q t^*. \end{aligned}$$

Deci în toate cazurile avem

$$\sum_{i=1}^n \max Y_i^t < 2 n a t^* + \frac{1}{2} \varepsilon q t^*.$$

Avem $q t^* \leq t$ și $\frac{4 n a t^*}{\varepsilon} \leq t$, adică $2 n a t^* \leq \frac{1}{2} \varepsilon t$ și prin urmare

$$\sum_{i=1}^n \max Y_i^t < \varepsilon t.$$

Această inegalitate, împreună cu inegalitatea

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \max Y_i^t \geq 0,$$

demonstrează că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \max Y_i^t = 0,$$

de unde urmează teorema.

TEOREMA 3. *Are loc următoarea evaluare*

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \max_{x_i \in X_i} \sum_{j=0}^{t-1} f_i(x_{N-i}^j | x_i) \leq a n^m t^{-\frac{1}{m-n}}.$$

$$\text{unde } m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Demonstrație. Aplicind notațiile introduse la demonstrarea teoremei 2, punem

$$S_1(t) = \sum_{i=1}^n \max Y_i^t$$

$$S_2(t) = \sum_{i=1}^n \max (-Y_i^t)$$

$$S_3(t) = \max Y_i^t + \max (-Y_i^t).$$

Avem relațiile

$$S_1(t) + S_2(t) = \sum_{i=1}^n S_i(t),$$

$$S_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$S_2(t) \geq 0.$$

Ca și în cazul teoremei 2, pentru a putea aplica metoda inducției, demonstrăm ceva mai mult decât cele afirmate de teorema 3 :

Dacă $\sum_{i=1}^n \max Y_i^0 = 0$, are loc evaluarea

$$(4) \quad \frac{S_1(t)}{t} \leq an^m t^{-\frac{1}{m-n}},$$

unde $m = \sum_{i=1}^n m_i$.

Îl vom considera pe n fixat și vom face demonstrația prin inducție relativ la m . Înainte de toate observăm că din punctul de vedere al teoriei jocurilor au importanță numai cazurile cînd $n \geq 2$. Dacă $m = n$, punem $t^{-\frac{1}{m-n}} = 0$. Pentru acest caz inegalitatea (4) are loc în mod evident. Ea este de asemenea îndeplinită pentru cazul $m = n + 1$. Considerăm jocul Γ pentru care $m \geq n + 2$, presupunem îndeplinită evaluarea (4) pentru toate subjocurile lui Γ și o demonstrăm pentru Γ . Putem presupune că $t \geq 3$. Pentru $t < 3$ inegalitatea (4) se verifică direct.

Vom arăta că pentru orice t^* , $0 < t^* < t$, are loc cel puțin una din următoarele două inegalități

$$(5) \quad S_1(t) \leq 2nat^*$$

$$(6) \quad S_1(t) - S_1(t-t^*) \leq an^{m-1} t^{*-\frac{1}{m-n-1}}.$$

Presupunem că (5) nu are loc, adică

$$S_1(t) > 2nat^*.$$

Deoarece

$$S_1(t) \leq \sum_{i=1}^n S_i(t),$$

avem cel puțin un indice l , $1 \leq l \leq n$, pentru care are loc inegalitatea

$$\begin{aligned} 2at^* < S_l(t) &= \max Y_l^i + \max (-Y_l^i) = \\ &= \max \left[Y_l^0 + \left(\sum_{j=0}^{t-1} f_l(x_{N-1}^j | x_l) \right) \right] + \max \left[-Y_l^0 + \left(\sum_{j=0}^{t-1} -f_l(x_{N-1}^j | x_l) \right) \right]. \end{aligned}$$

Fie

$$y_i^{0'} + \sum_{j=0}^{t-1} f_i(x_{N-t}^j | x_i') = \max \left[Y_i^0 + \left(\sum_{j=0}^{t-1} f_i(x_{N-t}^j | x_i) \right) \right],$$

$$- y_i^{0''} + \sum_{j=0}^{t-1} -f_i(x_{N-t}^j | x_i'') = \max \left[-Y_i^0 + \left(\sum_{j=0}^{t-1} -f_i(x_{N-t}^j | x_i) \right) \right].$$

Relația de mai sus se mai poate scrie în forma

$$y_i^{0'} + \sum_{j=0}^{t-1} f_i(x_{N-t}^j | x_i') - y_i^{0''} + \sum_{j=0}^{t-1} -f_i(x_{N-t}^j | x_i'') > 2at^*,$$

de unde urmează că

$$y_i^{0'} + \sum_{j=0}^{t-\omega-1} f_i(x_{N-t}^j | x_i') - y_i^{0''} + \sum_{j=0}^{t-\omega-1} -f_i(x_{N-t}^j | x_i'') > 0,$$

pentru

$$\omega = 0, 1, \dots, t^*.$$

Din ultima inegalitate urmează că x_i'' nu poate fi esențial în intervalul $(t - t^* - 1, t + 1)$ al procedurii.

Formăm subjocul Γ' al jocului Γ prin omiterea elementului $x_i'' \in X_i$. Pentru noul joc formăm șirurile de vectori

$$Y_i^{t-t^*}, Y_i^{t-t^*+1}, \dots, Y_i^t, \quad i=1, \dots, n,$$

unde

$$Y_i^{t-\omega} = Y_i^{t-\omega} - (\max Y_i^{t-t^*}), \quad i = 1, \dots, n, i \neq l,$$

$$Y_i^{t-\omega} = Y_i^{t-\omega}(m_i - 1) - (\max Y_i^{t-t^*})$$

$Y_i^{t-\omega}(m_i - 1)$ este vectorul obținut din $Y_i^{t-\omega}$ prin omiterea componentei corespunzătoare elementului x_i .

Observăm că în intervalul $(t - t^* - 1, t + 1)$ al procesului iterativ pentru jocul Γ' vor fi la fiecare pas aceleași elemente esențiale ca și în cazul procesului pentru jocul Γ .

Totodată $\sum_{i=1}^n \max Y_i^{t-t^*} = 0$, deci putem aplica ipoteza de inducție

la jocul Γ' și obținem pentru $\omega = 0$

$$\sum_{i=1}^n \max Y_i^t \leq a n^{m-1} (t^*)^{1-\frac{1}{m-n-1}}.$$

Cum însă

$$\sum_{i=1}^n \max Y_i^t = \sum_{i=1}^n \max Y_i^t - \sum_{i=1}^n \max Y_i^{t-t^*},$$

urmează inegalitatea (6).

Pentru indicii t care nu-l întrec pe t^* , inegalitatea (5) este evident indeplinită.

Presupunem că $t > t^*$ și punem $q = \left\lfloor \frac{t}{t^*} \right\rfloor$. Între numerele $t, t-t^*, \dots, t-qt^*$ există numere pentru care este îndeplinită inegalitatea (5). Fie $t - \tau t^*$ cel mai mare număr cu această proprietate. Putem scrie

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \sum_{k=1}^{\tau} [S_1(t-(k-1)t^*) - S_1(t-kt^*)] + S_1(t-\tau t^*) \leq \\ &\leq \tau a n^{m-1} (t^*)^{1-\frac{1}{m-n-1}} + 2nat^* \leq t a n^{m-1} (t^*)^{1-\frac{1}{m-n-1}} + 2nat^*, \end{aligned}$$

de unde

$$\frac{S_1(t)}{t} \leq a (n^{m-1} (t^*)^{1-\frac{1}{m-n-1}} + \frac{2nt^*}{t}).$$

Vom arăta că poate fi ales un $t^*, 0 < t^* < t$, în așa fel ca

$$n^{m-1} (t^*)^{1-\frac{1}{m-n-1}} + \frac{2nt^*}{t} < n^m t^{1-\frac{1}{m-n}}.$$

Pentru aceasta vom arăta că în caz de $t > 1, m \geq n+2, n \geq 2$, are loc inegalitatea

$$1 < \left(\frac{n^{m-1}}{4} - \left(\frac{2}{n} \right)^{m-n-1} \right) t^{1-\frac{1}{m-n}}.$$

Este suficient de văzut că

$$\frac{n^{m-1}}{4} - \left(\frac{2}{n} \right)^{m-n-1} \geq 1.$$

În caz de $n=2, m=4$, are loc egalitatea cu 1, iar pentru m și n crescători, expresia este crescătoare, deci are loc inegalitatea.

Urmează că

$$\left(\frac{2}{n} \right)^{m-n-1} t^{1-\frac{1}{m-n}} + 1 < \frac{1}{4} n^{m-1} t^{1-\frac{1}{m-n}}$$

și t^* poate fi ales astfel ca

$$(7) \quad \left(\frac{2}{n} \right)^{m-n-1} t^{1-\frac{1}{m-n}} < t^* < \frac{1}{4} n^{m-1} t^{1-\frac{1}{m-n}}$$

Pentru a putea îndeplini și condiția $t^* < t$ observăm că în caz de $t > 2$ avem

$$1 < t - \left(\frac{2}{n} \right)^{m-n-1} t^{1-\frac{1}{m-n}}$$

Din prima parte a inegalității (7) avem

$$n^{m-1}(t^*)^{-\frac{1}{m-n-1}} < \frac{1}{2} n^m t^{-\frac{1}{m-n}}$$

iar din a doua parte

$$\frac{2nt^*}{t} < \frac{1}{2} n^m t^{-\frac{1}{m-n}}$$

Cu aceasta s-a demonstrat inegalitatea (4), de unde urmează teorema 3.

Primită la redacție la 22 februarie 1968

Institutul de Calcul al Academiei Republicii
Socialiste România Filiala Cluj.

ITERATIVE METHOD OF SOLVING THE FINITE, NORMAL, n-PERSON GAMES

(ABSTRACT)

In the note an iterative method is generalized for the solving of a game by fictitious play, which has been proposed for the matrix games by G. W. Brown [1]. J. Robinson [2] proved the convergence of this method and H.N. Shapiro [3] estimated the rapidity of its convergence. This method is not dependent on particularities of two-person games and is generalized in the note for the solving of finite, normal n-person games with zero sum. In Theorem 3 it is evaluated the rapidity of convergence which is of order

$$O\left(t^{-\frac{1}{m-n}}\right).$$

where t is the step in the iterative process, n is the number of players, and m the number of all pure strategies.

BIBLIOGRAFIE

1. BROWN G. W., *Iterative solutions of games by fictitious play. Activity Analysis of Production and Allocation* ed. de T. C. Koopmans, Cowles Commission on Research in Economics Monograph Nr. 13, Wiley, New York, 1951, pag. 374–376.
2. ROBINSON J., *An iterative method of solving a game*. Ann. of Math., 54, 296–301 (1951).
3. SHAPIRO H. N., *Note on a computation method in the theory of games* Comm. Pure and Appl. Math., 11, 588–593 (1958).
4. ВОРОБЬЕВ, Н.Н., *Конечные, некоалиционные игры*. Усп. Мат. наук, 14, 4/88, 21–56 (1959).