### MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

MATHEMATICA TOME 17(40), 1, 1975, pp. 11-58

## SUR CERTAINS INVARIANTS ATTACHÉS AUX GROUPES DÉNOMBRABLES

par GEORGES CĂLUGĂREANU Cluj-Napoca

Introduction. L'origine de cette recherche est liée à un problème sur les courbes simples tracées sur les surfaces fermées orientables. Les classes d'homotopie d'une telle surface  $S_p$ , de genre  $p \ge 1$ , peuvent être partagées en deux ensembles : les classes qui contiennent des courbes simples et celles qui n'en contiennent pas. Le groupe fondamental  $\pi_1(S_p)$  étant présenté par le système des générateurs canoniques  $g_1, g_2, \ldots, g_{2p}$ , liés par la relation  $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} g_3 \cdots g_{2p-1} g_{2p} g_{2p-1}^{-1} g_{2p}^{-1} = 1$ , une classe d'homotopie de  $S_p$  est représentée par un mot que l'on peut écrire sous la forme (par tranches)

$$(1) g_1^{x_{11}} g_2^{x_{21}} \cdots g_{2p}^{x_{2p},1} g_1^{x_{12}} g_2^{x_{22}} \cdots g_{2p}^{x_{2p},2} g_1^{x_{13}} \cdots g_1^{y_{1k}} g_2^{x_{2k}} \cdots g_{2p}^{x_{2p},k}$$

les entiers  $x_{ij}$  étant positifs, négatifs ou nuls.

Si une classe d'homotopie contient des courbes simples de  $S_p$ , nous l'appellerons classe simple de  $\pi_1(S_p)$ , et l'on s'est proposé [1, 2, 3, 4] de déterminer les classes simples d'une surface  $S_p$ ; le problème a été étendu au cas des surfaces non-orientables.

Or, l'écriture "par tranches" (1) d'un élément de  $\pi_1(S_p)$  montre qu'un tel élément est déterminé par la suite numérique ordonnée des exposants  $x_{ij}$ . Les conditions pour qu'un mot (1) représente une classe simple s'exprimeront donc par certaines relations que ces exposants devront satisfaire. Quant à la forme de ces relations, on doit remarquer que si  $C \subset S_p$  est une courbe simple, chaque automorphisme de  $S_p$  (application homéomorphe surjective  $S_p \to S_p$ ) applique C sur une autre courbe simple de  $S_p$ . Il en résulte que chaque automorphisme de  $\pi_1(S_p)$  applique toute classe simple sur une autre classe simple. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite  $x_{ij}$  corresponde à une classe simple devront donc être invariantes

SUR CERTAINS INVARIANTS ATTACHES AUX GROUPES

par rapport aux automorphismes de  $\pi_1(S_p)$ . D'une manière générale, appelons multiplicité d'une classe d'homotopie de S<sub>p</sub> le nombre minimum des points doubles d'une courbe appartenant à cette classe. Ce nombre reste invariant pour tous les automorphismes de Sp. Ceci nous a conduit à la recherche des invariants que nous appelons "invariants d'automorphisme" du groupe  $\pi_1(S_p)$ . Le problème de ces invariants peut être étendu à un groupe dénombrable quelconque.

Loin d'épuiser le sujet, nous essayons, dans ce qui suit, de signaler l'existence et quelques propriétés fondamentales des invariants en question. L'idée de ces invariants a déjà fait l'objet d'un mémoire antérieur [6] de l'auteur. Avant d'arriver aux invariants d'automorphisme, il nous sera nécessaire d'étudier les propriétés d'autres formations que nous appelons invariants de contraction, de conjugaison et d'insertion.

## I. INVARIANTS DE CONTRACTION DANS LES GROUPES LIBRES

Soit F un groupe libre aux générateurs  $g_1, g_2, \ldots, g_k$  et m un mot formé avec ces générateurs. Un ordre de succession des générateurs étant fixé une fois pour toutes, nous conviendrons d'écrire le mot m "par tranches"

$$(2) m = g_1^{x_{11}} g_2^{x_{21}} \dots g_k^{x_{k1}} g_1^{x_{12}} g_2^{x_{22}} \dots g_k^{x_{k2}} g_1^{x_{13}} \dots g_1^{x_{1n}} g_2^{x_{2n}} \dots g_k^{x_{kn}}$$

les exposants  $x_{ij}$  étant des entiers positifs, négatifs ou nuls (dans le cas où F est un demi-groupe pourvu d'un élément neutre, les entiers  $x_{ij}$  seront positifs ou nuls). Le mot m est alors défini si l'on connaît la suite ordonnée des exposants  $x_{ij}$ . Un élément de F est une classe de mots équivalents par rapport aux contractions triviales  $g_i^{\alpha} g_i^{\beta} = g_i^{\alpha+\beta}$ ,  $g_i^{0} = 1$  (1 = mot vide). On voit alors que les expressions

(3) 
$$X^{(h)}(m) = x_{h1} + x_{h2} + \ldots + x_{hn}, \ h = 1, 2, \ldots, k$$

gardent leurs valeurs pour tous les mots équivalents à m. Ces constantes caractérisent (sans le définir complètement) un élément de F dont m est un représentant. Les expressions  $X^{(h)}(m)$ , que nous appelons "invariants de contraction" dans F, ont déjà été utilisés dans certaines démonstrations [5, p. 301]. Nous nous proposons de former une suite complète de tels invariants, donc une suite d'expressions dépendant des exposants  $x_{ij}$ , et telles que, si leurs valeurs numériques sont connues, le mot  $\overline{m}$  (mot réduit de m) puisse être complétement déterminé, ces expressions étant invariantes par rapport aux contractions triviales de m. Cette suite d'invariants caractérisera donc l'élément de F dont m est un représentant.

1. Cas d'un groupe libre de rang 2. Afin de simplifier les notations, désignons les deux générateurs par a et b, et les exposants par  $x_i$  et  $y_i$ ,

$$m = a^{x_1} b^{y_1} a^{x_2} b^{y_3} \dots a^{x_n} b^{y_n}.$$

Une fonction  $X(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, \ldots, x_n, y_n)$  est un invariant de contraction de F si elle vérifie le système

Il est naturel d'exiger encore que X vérifie

(5') 
$$X(0, 0, x_2, y_2, ..., x_n, y_n) = X(x_2, y_2, ..., x_n, y_n, 0, 0)$$
  
 $X(x_1, 0, 0, y_2, ..., x_n, y_n) = X(x_1, y_2, ..., x_n, y_n, 0, 0), \text{ etc.}$ 

car, si les exposants  $x_1$ ,  $y_1$  de la première tranche de m sont nuls, la valeur de l'invariant devra pouvoir être calculée en commençant par la seconde tranche, en considérant celle-ci comme première tranche, sans quoi la définition de l'invariant serait incohérente. De même, si deux exposants consécutifs de m sont nuls, une tranche peut être suprimée, ce qui justifie la seconde condition (5'). En acceptant (5'), les conditions (5) peuvent être affaiblies en les remplaçant par

$$X(x_{1}, 0, x_{2}, y_{2}, ..., x_{n}, y_{n}) = \Phi_{0}(x_{1} + x_{2}, y_{2}, ..., x_{n}, y_{n})$$

$$(5'') X(x_{1}, y_{1}, 0, y_{2}, ..., x_{n}, x_{n}) = \Phi_{1}(x_{1}, y_{1} + y_{2}, x_{3}, ..., x_{n}, y_{n})$$

$$... X(x_{1}, y_{1}, x_{2}, ..., y_{n-1}, 0, y_{n}) = \Phi_{2n-1}(x_{1}, y_{1}, x_{2}, ..., x_{n-1}, y_{n-1} + y_{n})$$

sans rien préciser sur les fonctions Φ, ce qui revient à exprimer que, pour  $x_i = 0$ , le premier membre dépend de  $y_{i-1}$  et  $y_i$  par l'intermédiaire de  $y_{i-1}$  +  $+y_i$  seulement (ou est indépendent de  $y_{i-1}$  et  $y_i$ ), et, pour  $y_i=0$ , il dépend de  $x_i$  et  $x_{i+1}$  par l'intermédiaire de  $x_i + x_{i+1}$  seulement (ou est indépendent de  $x_i$  et  $x_{i+1}$ ). En acceptant (5') et (5''), on en déduit (5), car, en posant  $x_1 = 0$  dans la première équation de (5''), puis en appliquant (5'), on a

$$X(0, 0, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) = \Phi_0(x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) = X(x_2, y_2, \ldots, y_n, 0, 0)$$

ce qui détermine  $\Phi_0$  conformément à la première équation de (5), etc.

Le système (5) reste valable dans le cas d'un demi-groupe pourvu d'un élément neutre.

Ayant en vue des applications effectives, nous nous contenterons des plus simples solutions de ce système : des polynômes homogènes par rapport aux  $x_i$ ,  $\hat{y}_i$ . Les solutions polynomiales du système (5) sont assez nombreuses et peuvent être déterminées complètement, mais pour avoir un système complet d'invariants de contraction de F il suffit de considérer le plus

simple de ces systèmes, qui est donné par 
$$X_1(m) = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \qquad Y_1(m) = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

$$X_2(m) = \sum_{1 \le i \le j \le n} x_i y_j, \qquad Y_2(m) = \sum_{1 \le i \le j \le n} y_i x_j$$

$$X_3(m) = \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} x_i y_j x_k, \qquad Y_3(m) = \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} y_i x_j y_k$$

(6) 
$$X_{2p}(m) = \sum_{1 \le i_1 \le j_1 \le i_2 \le j_2 \le \dots \le i_p \le j_p \le n} x_{i_1} y_{j_1} \dots x_{i_p} y_{j_p},$$

$$Y_{2p}(m) = \sum_{1 \le i_1 \le j_1 \le i_2 \le \dots \le i_p \le j_p \le n} y_{i_1} x_{j_1} \dots y_{i_p} x_{j_p}$$

$$X_{2p+1}(m) = \sum_{1 \le i_1 \le j_1 \le i_2 \le \dots \le i_p \le j_p \le n} x_{i_1} y_{j_1} \dots x_{i_p} y_{j_p} x_{i_p+1}$$

$$Y_{2p+1}(m) = \sum_{1 \le i_1 \le j_2 \le \dots \le i_p \le j_p \le n} y_{i_1} x_{j_2} \dots y_{i_p} x_{j_p} y_{i_p+1}$$

On voit que l'indice de X ou Y est égal au degré du polynôme homogène au second membre. Le terme général d'une telle somme est un produit contenant alternativement un x suivi d'un y, les indices des x et y formant une suite non-décroissante (attention aux signes ≤ ou <), et l'on commence par un x pour les sommes  $X_k$ , par un y pour les sommes  $Y_k$ . On peut

(7) 
$$X_{2}(m) = x_{1}(y_{1} + y_{2} + \dots + y_{n}) + x_{2}(y_{2} + \dots + y_{n}) + \dots + x_{n-1}(y_{n-1} + y_{n}) + x_{n} y_{n}$$
$$+ x_{n-1}(y_{n-1} + y_{n}) + x_{n} y_{n}$$
$$+ y_{2}(m) = y_{1}(x_{2} + x_{3} + \dots + x_{n}) + y_{2}(x_{3} + \dots + x_{n}) + \dots + y_{n-2}(x_{n-1} + x_{n}) + y_{n-1} x_{n}.$$

et l'on vérifie la relation  $X_2(m) + Y_2(m) = X_1(m)Y_1(m)$ .

Utilisons la notation  $X(m)|_{y_1y_2...y_k}$  pour la fonction X(m) dans laquelle on pose  $y_1 = y_2 = \dots = y_k = 0$ . On vérifie alors les égalités

$$X_{2}(m) = x_{1}Y_{1}(m) + x_{2}Y_{1}(m)|_{y_{1}} + x_{3}Y_{1}(m)|_{y_{1}y_{2}} + \dots + x_{n-1}Y_{1}(m)|_{y_{1}y_{2}\dots y_{n-2}} + x_{n}Y_{1}(m)|_{y_{1}y_{2}\dots y_{n-1}}$$

$$Y_{2}(m) = y_{1}X_{1}(m)|_{x_{1}} + y_{2}X_{1}(m)|_{x_{1}x_{2}} + \dots + y_{n-2}X_{1}(m)|_{x_{1}x_{2}\dots x_{n-2}} + y_{n-1}X_{1}(m)|_{x_{1}x_{2}\dots x_{n-1}}.$$

D'une manière générale on trouve, pour  $h = 1, 2, \ldots$ 

$$Y_{h}(m) = y_{1}X_{h-1}(m)|_{x_{1}} + y_{2}X_{h-1}(m)|_{x_{1}x_{2}} + \dots + y_{n-2}X_{h-1}(m)|_{x_{1}x_{2}\dots x_{n-2}} + y_{n-1}X_{h-1}(m)|_{x_{1}x_{2}\dots x_{n-1}}.$$

en convenant d'écrire  $X_0(m) = Y_0(m) = 1$ . Remarquons encore que l'on a  $X_h(m) = Y_h(m) = 0$  pour h > 2n et  $Y_{2n}(m) = 0$ , tandis que  $X_{2n}(m) = 0$  $= x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 \ldots x_n y_n.$ 

SUR CERTAINS INVARIANTS ATTACHÉS AUX GROUPES

Pour démontrer que les expressions (6) sont des invariants de contraction, nous procéderons par induction sur le degré. Admettons donc que les  $X_h(m)$ ,  $Y_h(m)$  sont de tels invariants si h < H. Cela signifie que  $X_h(m)|_{y_s}$ dépend de x, et  $x_{s+1}$  par l'intermédiaire de leur somme  $x_s + x_{s+1}$ , car les conditions (5') sont vérifiées. Pour h=1, la propriété est vérifiée. On a

$$X_{H_{s}}(m)|_{y_{s}} = x_{1}Y_{H-1}(m)|_{y_{s}} + x_{2}Y_{H-1}(m)|_{y_{1}y_{s}} + \dots + x_{S-1}Y_{H-1}(m)|_{y_{1}y_{2}\dots y_{s-2}y_{s}} +$$

$$+ x_{s}Y_{H-1}(m)|_{y_{1}y_{2}\dots y_{s-1}y_{s}} + x_{s+1}Y_{H-1}(m)|_{y_{1}y_{2}\dots y_{s-1}y_{s}} +$$

$$+ x_{S+2}Y_{H-1}(m)|_{y_{1}y_{2}\dots y_{s}y_{s+1}} + \dots + x_{n}Y_{H-1}(m)|_{y_{1}y_{2}\dots y_{n-1}}.$$

Les termes de la première ligne ne contiennent que des  $x_i$ , i < s, tandis que  $Y_{H-1}(m)$ , par l'hypothèse d'induction, dépend de  $x_s$  et  $x_{s+1}$  par l'intermédiaire de  $x_s + x_{s+1}$ . Les deux premiers termes de la seconde ligne donnent

$$(x_s + x_{s+1})Y_{H-1}(m)|_{y_1y_2...y_{s-1}y_s}$$

où  $Y_{H-1}(m)|_{y_1y_2...y_{s-1}y_s}$  ne dépend que des  $x_i$ , i>s+1. Enfin, les termes suivants sont indépendents de  $x_s$  et  $x_{s+1}$ . Montrons maintenant que  $X_H(m)|_{x_s}$ dépend de  $y_{s-1}$  et  $y_s$  par l'intermédiaire de  $y_{s-1} + y_s$ . On a

$$X_{H}(m)|_{x_{s}} = x_{1}Y_{H-1}(m)|_{x_{s}} + x_{2}Y_{H-1}(m)|_{y_{1}\tau_{s}} + \dots + x_{s-1}Y_{H-1}(m)|_{y_{1}y_{2}\dots y_{s-2}x_{s}} + x_{s+1}Y_{H-1}(m)|_{y_{1}y_{2}\dots y_{s}x_{s}} + \dots + x_{n}Y_{H-1}(m)|_{y_{1}y_{2}\dots y_{n-1}x_{s}}.$$

Or,  $Y_{H-1}(m)|_{y_1y_2...y_kx_s} = Y_{H-1}(m)|_{x_s}|_{y_1y_2...y_k}$ , et, par l'hypothèse d'induction,  $Y_{H-1}(m)|_{x_s}$  dépend de  $y_{s-1}$  et  $y_s$  par l'intermédiaire de  $y_{s-1} + y_s$ . Les termes de la première ligne ci-dessus jouissent de cette propriété, tandis que ceux de la seconde ligne sont indépendents de  $y_{s-1}$  et  $y_s$ . Une démonstration analogue pour  $Y_H$  (m) en partant de la seconde formule

THÉORÈME I. Le système (6) est complet.

Désignons par  $\overline{m}$  le mot réduit de m; c'est le mot qui résulte de maprès application complète des contractions triviales. Nous montrerons que si les valeurs des  $X_h(m)$ ,  $Y_h(m)$  sont connues pour  $h = 1, 2, \ldots$ , les exposants  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $i=1,2,\ldots$  du mot réduit  $\overline{m}$  peuvent être calculés par des opérations rationnelles.

On a  $X_h(m) = X_h(\overline{m})$ ,  $Y_h(m) = Y_h(\overline{m})$ ,  $h = 1, 2, \ldots$ ; nous pouvons donc admettre que m est un mot réduit :  $m = \overline{m}$ . Alors, tous les exposants de m sont  $\neq 0$ , sauf  $x_1$  ou  $y_n$  qui peuvent être nuls. Si m est le mot vide, on a  $X_k(m) = Y_k(m) = 0$ , tous les exposants de m étant nuls. Réciproquement, si  $X_k(m) = Y_k(m) = 0$ ,  $h = 1, 2, \ldots$ , on a m = 1. En effet, en

admettant  $m \neq 1$ , on a  $Y_{2n-2}(m) = y_1 x_2 y_2 \dots x_n = 0$ , contrairement à l'hypothèse. Ainsi, pour que m soit le mot vide, il faut el il suffit que  $X_h$   $(m) = Y_h(m) = 0$ ,  $h = 1, 2, \dots$ 

Retenons que, si  $m \neq 1$ , on a  $Y_{2n-2}(m) = 0$ .

Désignons par m<sub>1</sub> la première section finale de m

$$m_1 = a^{x_1}b^{y_1}a^{x_2} \ldots a^{x_n}b^{y_n}.$$

Tous les exposants  $x_2, y_2, \ldots, x_n$  étant  $\neq 0$ , on a  $X_{2n-3}(m_1) \neq 0$ . Les formules (8) permettent d'écrire

Désignons par ls(m)=2n la longueur syllabique de m. Alors on a  $ls(m_1)=2n-2$ , donc  $X_{2n-1}(m_1)=0$  et

$$X_{2n-1}(m) = x_1 Y_{2n-2}(m), Y_{2n-1}(m) = y_1 x_2 y_2 \dots x_n y_n$$
  

$$Y_{2n-2}(m) = y_1 x_2 y_2 \dots y_{n-1} x_n, X_{2n}(m) = x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_n y_n.$$

On en déduit, puisque  $Y_{2n-2}(m) \neq 0$ ,

$$x_1 = \frac{X_{2n-1}(m)}{Y_{2n-2}(m)} = \frac{X_{2n}(m)}{Y_{2n-1}(m)}, \quad y_n = \frac{Y_{2n-1}(m)}{Y_{2n-2}(m)} = \frac{X_{2n}(m)}{X_{2n-1}(m)}$$

Ensuite

$$X_{2n-3}(m) = x_1 Y_{2n-4}(m) + X_{2n-3}(m_1), \ X_{2n-3}(m_1) = x_2 y_2 \dots x_n = \frac{Y_{2n-2}(m)}{y_n}$$

d'où, puisque  $X_{2n-3}(m_1) \neq 0$ ,

$$y_1 = \frac{Y_{2n-2}(m)}{X_{2n-3}(m_1)} = \frac{Y_{2n-2}(m)}{X_{2n-3}(m) - x_1 Y_{2n-4}(m)} = \frac{[Y_{2n-2}(m)]^2}{X_{2n-3}(m) Y_{2n-2}(m) - X_{2n-1}(m) Y_{2n-4}(m)}.$$

On a ainsi  $x_1$  et  $y_1$ . Les formules (9) permettent alors de calculer  $X_h(m_1)$ , pour  $h = 1, 2, \ldots, n$ , et l'on peut reprendre les mêmes calculs  $x_i$ ,  $y_i$  étant obtenues par des opérations rationnelles, ce qui démontre notre théorème.

On voit que les valeurs des  $X_h(m)$ ,  $Y_h(m)$  ne peuvent être choisies arbitrairement,  $x_i$  et  $y_i$  devant être des entiers (aussi, la valeur de  $x_1$  calculée ci-dessus a une double expression qui offre une relation entre  $X_{2n-1}$ ,  $X_{2n}$ ,

 $Y_{2n-2}$ ,  $Y_{2n-1}$  pour 1s(m) = 2n). Les invariants sont liés par certaines relations identiques analogues aux syzygies que l'on rencontre dans la théorie des invariants projectifs, affines, etc. des formes homogènes.

2. Syzygies. Afin de trouver toutes ces relations entre les invariants (6), remarquons que les invariants  $Y_h$  sont indépendents de  $x_1$  (en écrivant  $Y_h$  pour  $Y_h(m)$ , etc.) donc, en tenant compte de (8), (9), on a

(10) 
$$\frac{\partial}{\partial x_1} Y_h = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} X_h = Y_{h-1}, \quad \frac{\partial}{\partial y_1} Y_h = X_{h-1} - x_1 Y_{h-2},$$
$$\frac{\partial}{\partial y_1} X_h = x_1 (X_{h-2} - x_1 Y_{h-3})$$

qui seront appliquées dans ce qui suit.

Le m m e. Un invariant de contraction indépendent de  $x_1$  et  $y_1$  se réduit à une constante.

Soit X une solution du système (5), indépendente de  $x_1$  et  $y_1$ . On peut alors poser  $x_1 = y_1 = 0$  sans que X change de valeur. La première équation (5) donne

$$X(0, 0, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) = X(x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, 0, 0).$$

Or, X étant une fonction indépendente de ses deux premières variables, le second membre est indépendent de  $x_2$ ,  $y_2$ , donc le premier membre aussi. On peut poser  $x_2 = y_2 = 0$  dans la troisième équation (5), d'où

$$X(0, 0, 0, 0, x_2, y_3, \dots, x_n, y_n) = X(0, 0, x_3, y_3, \dots, y_n, 0, 0) = X(x_3, y_3, \dots, x_n, y_n, 0, 0, 0, 0).$$

Il en rèsulte que X est indépendente de  $x_3$ ,  $y_3$ , et l'on voit que le procédé peut être répété, donc finalement X = X(0, 0, ..., 0, 0) = const.

Si X est un polynôme homogène de degré n > 0, on a donc  $X \equiv 0$ . Conséquence: X étant un invariant de contraction polynomial, homogène, il faut et il suffit, pour que X soit identiquement nul, que

$$\frac{\partial X}{\partial x_1} = \frac{\partial X}{\partial y_1} = 0.$$

La condition est évidemment nécessaire. Or, si elle est vérifiée, X est indépendent de  $x_1$  et  $y_1$ , donc  $X \equiv 0$ .

Considérons maintenant une relation identique entre les invariants (6)

$$F(X_1, Y_1, X_2, \dots, X_{2n}, Y_{2n}) = 0.$$

Le premier membre étant un invariant de contraction, il faut el il suffit, pour que la relation existe, que

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial y_1} = 0.$$

On trouve alors les conditions

$$\frac{\partial F}{\partial X_1} + \frac{\partial F}{\partial X_2} Y_1 + \frac{\partial F}{\partial X_3} Y_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial X_{2n}} Y_{2n-1} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y_1} + \frac{\partial F}{\partial X_2} x_1 + \frac{\partial F}{\partial Y_2} (X_1 - x_1) + \frac{\partial F}{\partial X_3} x_1 (X_1 - x_1) + \frac{\partial F}{\partial Y_3} (X_2 - x_1 Y_1) + \dots + \frac{\partial F}{\partial X_{2n}} x_1 (X_{2n-2} - x_1 Y_{2n-3}) + \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}} (X_{2n-1} - x_1 Y_{2n-2}) = 0.$$

La variable  $x_1$  étant indépendente de  $X_1, Y_1, \ldots, X_{2n}, Y_{2n}$ , si la longueur de m reste arbitraire, la seconde équation se décompose en trois autres, et l'on a le système

$$\frac{\partial F}{\partial X_{1}} + \frac{\partial F}{\partial X_{2}} Y_{1} + \frac{\partial F}{\partial X_{3}} Y_{2} + \dots + \frac{\partial F}{\partial X_{2n}} Y_{2n-1} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y_{1}} + \frac{\partial F}{\partial Y_{2}} X_{1} + \frac{\partial F}{\partial Y_{3}} X_{2} + \dots + \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}} X_{2n-1} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_{2}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2}} + \frac{\partial F}{\partial X_{3}} X_{1} - \frac{\partial F}{\partial Y_{3}} Y_{1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial X_{2n}} X_{2n-2} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}} Y_{2n-2} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_{3}} + \frac{\partial F}{\partial X_{4}} Y_{1} + \frac{\partial F}{\partial X_{5}} Y_{2} + \dots + \frac{\partial F}{\partial X_{2n}} Y_{2n-3} = 0.$$

En complétant ce système à l'aide des parenthèses de Poisson, on obtient encore

$$\frac{\partial F}{\partial Y_3} + \frac{\partial F}{\partial Y_4} X_1 + \frac{\partial F}{\partial Y_6} X_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}} X_{2n-3} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_4} - \frac{\partial F}{\partial Y_4} + \frac{\partial F}{\partial X_5} X_1 - \frac{\partial F}{\partial Y_5} Y_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial X_{2n}} X_{2n-4} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}} Y_{2n-4} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y_{2q-1}} + \frac{\partial F}{\partial Y_{2q}} X_1 + \frac{\partial F}{\partial Y_{2q+1}} X_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}} X_{2n-2q+1} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_{2q}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2q}} + \frac{\partial F}{\partial X_{2q+1}} X_1 - \frac{\partial F}{\partial Y_{3q+1}} Y_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial X_{2n}} X_{2n-2q} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}} Y_{2n-2q} = 0$$

$$(11') \frac{\partial F}{\partial X_{2q+1}} + \frac{\partial F}{\partial X_{2q+2}} X_1 + \frac{\partial F}{\partial X_{2q+3}} Y_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial X_{2n}} Y_{2n-2q-1} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y_{2n-3}} + \frac{\partial F}{\partial Y_{2n-2}} X_1 + \frac{\partial F}{\partial Y_{2n-1}} X_2 + \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}} X_3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_{2n-2}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n-2}} + \frac{\partial F}{\partial X_{2n-1}} X_1 - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n-1}} Y_1 + \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}} X_2 - \frac{\partial F}{\partial X_{2n}} Y_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y_{2n-1}} + \frac{\partial F}{\partial X_{2n}} Y_1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y_{2n-1}} + \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}} X_1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y_{2n-1}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}} = 0.$$

La dernière équation montre que  $X_{2n}$  et  $Y_{2n}$  figurent dans F par leur somme  $u_n = X_{2n} + Y_{2n}$ . L'intégration des avant-dernières équations (11') conduit au changement de variable  $v_n = u_n - X_1 Y_{2n-1} - Y_1 X_{2n-1}$ , puis, en remontant dans (11'), au changement  $u_{n-1} = X_{2n-2} + Y_{2n-2}$ ,  $v_{n-1} = v_n + X_1 Y_{2n-2} + Y_1 X_{2n-2}$  et d'une manière générale  $v_q = X_{2q} + Y_{2q} - X_1 Y_{2q-1} - Y_1 X_{2q-1} + X_2 Y_{2q-2} + Y_2 X_{2q-2} - \ldots + (-1)^q X_q Y_q$ , et l'on a  $F = \Phi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ,  $\Phi$  étant une fonction arbitraire.

On a donc les seules syzygies existant entre les invariants (6)

$$(12) \quad X_{2q} + Y_{2q} - X_1 Y_{2q-1} - Y_1 X_{2q-1} + \dots + (-1)^i [X_i Y_{2q-i} + Y_i X_{2q-i}] \\ + \dots + (-1)^q X_q Y_q = 0$$

avec q = 1, 2, ..., 2n. L'identité (12) s'écrit encore

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & \dots & X_{2k-1} & X_{2k} \\ 1 & Y_1 & Y_2 & \dots & Y_{2k-2} & Y_{2k-1} \\ 0 & 1 & X_1 & \dots & X_{2k-3} & X_{2k-2} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & Y_1 \end{vmatrix} = Y_{2k}, \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 & \dots & Y_{2k-1} & Y_{2k} \\ 1 & X_1 & X_2 & \dots & X_{2k-2} & X_{2k-1} \\ 0 & 1 & Y_1 & \dots & Y_{2k-3} & Y_{2k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & X_1 \end{vmatrix} = X_{2k}$$

Pour q=2n on retrouve  $Y_{2n}=0$ , et pour q=2n-1 on a  $X_{2n-2}Y_{2n}+Y_{2n-2}X_{2n}-X_{2n-1}Y_{2n-1}=0$  et, comme  $Y_{2n}=0$ , on retrouve la relation  $X_{2n-1}/Y_{2n-2}=X_{2n}/Y_{2n-1}$ , obtenue précédemment en calculant  $x_1$ . Pour q>2n, tous les termes de (12) sont nuls. On a donc le

THÉORÈME II. Afin que  $X_1, Y_1, \ldots, X_{2n}, Y_{2n}$  représentent les valeurs des invariants de contraction d'un mot de longueur syllabique 2n, il faut el il suffit que ces valeurs vérifient les relations (12), pour  $q = 1, 2, \ldots, 2n$ .

D'ailleurs, la relation (12) peut être vérifiée directement en calculant  $\partial/\partial x_1$  et  $\partial/\partial y_1$  pour le premier membre de (12) à l'aide des formules (10) et en constatant que ces dérivées sont nulles identiquement.

Ce théorème permet de ramener la résolution d'une équation (ou d'un système d'équations) dans le groupe libre F à un système algébrique diophantien. Une telle équation s'écrit

$$A_1 \xi_1 A_2 \xi_2 \ldots A_k \xi_k = 1$$

où les  $A_i$  sont des mots donnés et les  $\xi_i$  sont des mots inconnus, 1 représentant le mot vide. Or, cette équation est équivalente à

$$X_h(A_1\xi_1A_2\xi_2 \ldots A_k\xi_k) = 0, Y_h(A_1\xi_1A_2\xi_2 \ldots A_k\xi_k) = 0, h = 1, 2, \ldots$$

Nous verrons que les invariants d'un produit de mots s'expriment sous forme rationnelle entière à l'aide des invariants des facteurs. On obtiendra donc toujours un système d'équations algébriques pour les invariants des inconnues  $\xi_i$ , qui donnera toutes les solutions, si elles existent. Voici un exemple :

u et v étant des mots dans F, montrons que uvu = v entraîne u = 1.

On a

 $X_1(uvu) = 2X_1(u) + X_1(v) = X_1(v), \ Y_1(uvu) = 2Y_1(u) + Y_1(v) = Y_1(v),$ 

donc  $X_1(u) = Y_1(u) = 0$ . On vérifie facilement, en appliquant (6)

one 
$$X_1(u) = Y_1(u) = 0$$
. On vertex  $X_2(uvu) = X_2(uvu) = 2X_2(u) + X_2(v) + X_1(u)Y_1(v) + X_1(v)Y_1(u) + X_1(u)Y_1(u) = 2X_2(u) + X_2(v) = X_2(v)$ , done  $X_2(u) = 0$ .

D'une manière analogue on trouve  $Y_2(u)=0$ . On peut alors procéder par induction en admettant que tous les invariants de u, de degré < nsont nuls et en remarquant que  $X_n(uvu) = 2X_n(u) + X_n(v) + \dots$ , les points de suspension indiquant des termes qui sont des produits d'invariants de u et v de degrés < n, chaque produit contenant au moins un invariant de u, termes qui sont nuls conformément à l'hypothèse d'induction. Il en résulte  $X_n(u) = Y_n(u) = 0$ ,  $n = 1, 2, \ldots$  donc u = 1 conformément au théorème I.

3. Seconde méthode de détermination des syzygies. Une autre méthode, moins laborieuse, pour la détermination des syzygies, est appliquable aussi au cas d'un groupe F de rang > 2. Elle est basée sur le

Lemme 2. Un invariant de contraction polynomial, homogène, qui se comporte additivement par rapport à la multiplication des mots, donc

$$X(\mu\nu) = X(\mu) + X(\nu), \quad \forall \mu, \nu \in F$$

se réduit à  $\alpha X_1 + \beta Y_1$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes numériques entières, arbitraires.

En effet, si  $m = a^{x_1}b^{y_1} \dots a^{x_n}b^{y_n}$ , la relation de l'énoncé entraîne  $X(m) = X(a^{x_1}) + X(b^{y_1}) + \ldots + X(a^{x_n}) + X(b^{y_n}).$ 

Or, X étant un polynôme homogène par rapport aux exposants de m, on a  $X(a^{x_1}) = \alpha_1 x_1^k$ , k entier positif, donc

$$X(m) = \alpha_1 x_1^k + \beta_1 y_1^k + \ldots + \alpha_i x_i^k + \beta_i y_i^k + \ldots + \alpha_n x_n^k + \beta_n y_n^k.$$

Mais, pour  $y_i = 0$ , X(m) dépend de  $x_i$  et  $x_{i+1}$  par  $\alpha_i x_i^k + \alpha_{i+1} x_{i+1}^k$ , et cette expression est une fonction de  $x_i + x_{i+1}$  pour k = 1 et  $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ seulement. Proposons nous de retrouver (12) pour q=2.

Considérons alors les égalités (faciles à établir)

$$\begin{split} X_4(\mu\nu) &= X_4(\mu) + X_3(\mu)Y_1(\nu) + X_2(\mu)X_2(\nu) + X_1(\mu)Y_3(\nu) + X_4(\nu) \\ Y_4(\mu\nu) &= Y_4(\mu) + Y_3(\mu)X_1(\nu) + Y_2(\mu)Y_2(\nu) + Y_1(\mu)X_3(\nu) + Y_4(\nu) \\ X_1(\mu\nu)Y_3(\mu\nu) &= X_1(\mu)Y_3(\nu) + Y_3(\mu)X_1(\nu) + X_1(\mu)Y_2(\mu)Y_1(\nu) + \\ &+ X_1(\mu)Y_1(\mu)X_2(\nu) + X_1(\mu)Y_3(\nu) + Y_2(\mu)X_1(\nu)Y_1(\nu) + \\ &+ Y_1(\mu)X_1(\nu)X_2(\nu) + X_1(\nu)Y_3(\nu) \end{split}$$

$$\begin{split} Y_{1}(\mu\nu)X_{3}(\mu\nu) &= Y_{1}(\mu)X_{3}(\mu) + X_{3}(\mu)Y_{1}(\nu) + Y_{1}(\mu)X_{2}(\mu)X_{1}(\nu) + \\ &+ Y_{1}(\mu)X_{1}(\mu)Y_{2}(\nu) + Y_{1}(\mu)X_{3}(\nu) + X_{2}(\mu)X_{1}(\nu)Y_{1}(\nu) + \\ &+ X_{1}(\mu)Y_{1}(\nu)Y_{2}(\nu) + Y_{1}(\nu)X_{3}(\nu) \\ X_{2}(\mu\nu)Y_{2}(\mu\nu) &= X_{2}(\mu)Y_{2}(\mu) + X_{2}(\mu)Y_{1}(\mu)X_{1}(\nu) + X_{2}(\mu)Y_{2}(\nu) + \\ &+ X_{1}(\mu)Y_{2}(\mu)Y_{1}(\nu) + X_{1}(\mu)Y_{1}(\mu)X_{1}(\nu)Y_{1}(\nu) + X_{1}(\mu)Y_{1}(\nu)Y_{2}(\nu) + \\ &+ Y_{2}(\mu)X_{2}(\nu) + Y_{1}(\mu)X_{1}(\nu)X_{2}(\nu) + X_{2}(\nu)Y_{2}(\nu). \end{split}$$

En changeant de signe les 3me et 4me équations, puis en ajoutant, on obtient

$$\begin{split} X_4(\mu\nu) + Y_4(\mu\nu) - X_1(\mu\nu)Y_3(\mu\nu) - Y_1(\mu\nu)X_3(\mu\nu) + X_2(\mu\nu)Y_2(\mu\nu) = \\ = X_4(\mu) + Y_4(\mu) - X_1(\mu)Y_3(\mu) - Y_1(\mu)X_3(\mu) + X_2(\mu)Y_2(\mu) + \\ + X_4(\nu) + Y_4(\nu) - X_1(\nu)Y_3(\nu) - Y_1(\nu)X_3(\nu) + X_2(\nu)Y_2(\nu) \end{split}$$

les termes restants se réduisant par application de  $X_2 + Y_2 = X_1Y_1$ . En posant

$$E(m) = X_4(m) + Y_4(m) - X_1(m)Y_3(m) - Y_1(m)X_3(m) + X_2(m)Y_2(m)$$

on obtient

$$E(\mu\nu) = E(\mu) + E(\nu),$$

ce qui entraîne  $E(m) = \alpha X_1(m) + \beta Y_1(m)$ . Mais, E étant homogène de degré 4, il en résulte  $\alpha = \beta = 0$ , donc E(m) = 0, ce qui redonne la syzygie de degré 4. On voit que, par cette méthode, les syzygies seront obtenues récursivement, en employant dans le cas des invariants de degré n les syzygies de degré < n. D'une manière générale, pour obtenir une syzygie de degré n, on écrira tous les invariants de degré n appliqués au produit μν, avec leurs développements suivant les invariants de μ et ν, puis, en multipliant chaque équation avec une constante indéterminée et en ajoutant, on déterminera ces constantes de manière à réduire les termes qui dépendent à la fois de µ et v. Si le système linéaire ainsi obtenu possède une solution, on obtiendra un invariant additif, qui est nul suivant le lemme 2. Ce procédé évite l'emploi des systèmes différentiels jacobiens, qui se compliquent encore dans le cas d'un groupe F de rang k > 2.

4. Invariants d'un produit de mots. Considèrons deux mots  $m_1$  et  $m_2$  formés avec les mêmes générateurs a, b. On trouve facilement l'expression de  $X_h(m_1m_2)$  et  $Y_h(m_1m_2)$  en fonction des invariants de  $m_1$  et de  $m_2$ . En tenant compte de la définition de  $X_h$ , chaque terme de  $X_h(m_1m_2)$ est un produit alterné d'exposants x, et y, choisis dans la suite des exposants de  $m_1m_2$ , en commençant avec un  $x_i$  et en continuant de gauche vers la droite. On a donc

$$X_{2p}(m_1m_2) = X_{2p}(m_1) + X_{2p-1}(m_1)Y_1(m_2) + X_{2p-2}(m_1)X_2(m_2) + \dots + \\ + X_{2p-2q+1}(m_1)Y_{2q-1}(m_2) + X_{2p-2q}(m_1)X_{2q}(m_2) + \dots + X_{2p}(m_2) \\ Y_{2p}(m_1m_2) = Y_{2p}(m_1) + Y_{2p-1}(m_1)X_1(m_2) + Y_{2p-2}(m_1)Y_2(m_2) + \dots \\ + Y_{2p-2q+1}(m_1)X_{2q-1}(m_1) + Y_{2p-2q}(m_1)Y_{2q}(m_2) + \dots + Y_{2p}(m_2) \\ (13) \ X_{2p+1}(m_1m_2) = (X_{2p+1}(m_1) + X_{2p}(m_1)X_1(m_2) + X_{2p-1}(m_1)Y_2(m_2) + \dots + \\ + X_{2p-2q+1}(m_1)Y_{2q}(m_2) + X_{2p-2q}(m_1)X_{2q+1}(m_2) + \dots + X_{2p+1}(m_2) \\ Y_{2p+1}(m_1m_2) = Y_{2p+1}(m_1) + Y_{2p}(m_1)Y_1(m_2) + Y_{2p-1}(m_1)X_2(m_2) + \dots + \\ + Y_{2p-2q+1}(m_1)X_{2q}(m_2) + Y_{2p-2q}(m_1)Y_{2q+1}(m_2) + \dots + Y_{2p+1}(m_2). \\ \text{Posons } m_1 = m, \ m_2 = m^{-1}. \ \text{On a} \\ X_h(mm^{-1}) = X_h(1) = 0, \quad Y_h(mm^{-1}) = Y_h(1) = 0, \quad h > 0. \\ \text{On voit directement que } X_1(m^{-1}) = -X_1(m), \ Y_1(m^{-1}) = -Y_1(m). \ \text{Donc} \\ X_2(m) + X_1(m)Y_1(m^{-1}) + X_2(m^{-1}) = 0, \quad Y_2(m) + Y_1(m)X_1(m^{-1}) + \\ + Y_2(m^{-1}) = 0 \\ X_2(m^{-1}) = X_1(m)Y_1(m) - X_2(m) = Y_2(m), \quad (\text{syzygie}), \ Y_2(m^{-1}) = \\ = X_2(m). \\ X_3(m) - X_2(m)X_1(m) + X_1(m)Y_2(m^{-1}) + X_3(m^{-1}) = 0, \\ \end{cases}$$

 $X_3(m^{-1}) = -X_3(m).$ 

D'une manière générale on trouve

(14) 
$$X_{2p+1}(m^{-1}) = -X_{2p+1}(m), \ Y_{2p+1}(m^{-1}) = -Y_{2p+1}(m), \ X_{2p}(m^{-1}) = Y_{2p}(m), \ Y_{2p}(m^{-1}) = X_{2p}(m).$$

Les formules (13) peuvent être présentées sous la forme

$$X_{2p}(m_{1}m_{2}) = \sum_{i+j=p} \begin{vmatrix} X_{2i}(m_{1}), & Y_{2j+1}(m_{2}) \\ -X_{2i-1}(m_{1}), & X_{2j}(m_{2}), \end{vmatrix},$$

$$Y_{2p}(m_{1}m_{2}) = \sum_{i+j=p} \begin{vmatrix} Y_{2i}(m_{1}), & X_{2j+1}(m_{2}) \\ -Y_{2i-1}(m_{1}), & Y_{2j}(m_{2}) \end{vmatrix},$$

$$X_{2p+1}(m_{1}m_{2}) = \sum_{i+j=p} \begin{vmatrix} X_{2i+1}(m_{1}), & X_{2j+1}(m_{2}) \\ -X_{2i}(m_{1}), & Y_{2j}(m_{2}) \end{vmatrix},$$

$$Y_{2p+1}(m_{1}m_{2}) = \sum_{i+j=p} \begin{vmatrix} Y_{2i+1}(m_{1}), & Y_{2j+1}(m_{2}) \\ -Y_{2i}(m_{1}), & X_{2j}(m_{2}) \end{vmatrix},$$

Remarquons que dans (13) ou (15), chaque seconde formule résulte de la première en permutant les majuscules X et Y. En partant de ces formules, on déduit par récurrence des formules qui donnent les invariants d'un produit de plusieurs mots. On trouve ainsi, u, v, w étant des mots quelconques

$$X_{2p}(uvw) = \sum_{i+j+k=p} \begin{vmatrix} -X_{2i}(u), & Y_{2j+1}(v), & Y_{2j}(v) \\ X_{2i+1}(u), & X_{2j}(v), & X_{2j+1}(v) \\ 0, & Y_{2k-1}(w), & -X_{2k}(w) \end{vmatrix},$$

$$X_{2p+1}(uvw) = \sum_{i+j+k=p} \begin{vmatrix} -X_{2i+1}(u), & X_{2j+1}(v), & X_{2j}(v) \\ X_{2i}(u), & Y_{2j}(v), & Y_{2j-1}(v) \\ 0, & X_{2k-1}(w), & -Y_{2k}(w) \end{vmatrix}.$$

Les formules analogues pour  $Y_{2p}$  (uvw) et  $Y_{2p+1}(uvw)$  résultent des précédentes en permutant X et Y. On peut donner des formules générales pour les invariants d'un produit de n mots, à l'aide de dèterminants d'ordre n, mais leur emploi est malaisé; pour le calcul effectif, il est donc préferable d'utiliser les formules de récurrence.

5. Remarque sur le problème du mot (Wordproblem). Désignons par  $R_1, R_2, \ldots, R_q$  des mots quelconques du groupe libre F = |a, b| et par G = |a, b|  $R_1, R_2, \ldots, R_q$  le groupe aux relations  $R_i = 1, i = 1, 2, \ldots, q$ . On sait que, m étant un mot formé avec a et b, m représente l'élément unité du groupe G si et seulement si l'on a

(17) 
$$m = u_1^{-1} R_{i_1}^{\epsilon_1} u_1 u_2^{-1} R_{i_1}^{\epsilon_2} u_2 \dots u_n^{-1} R_{i_n}^{\epsilon_n} u_n, \ \epsilon_h = \pm 1, \ 1 \leqslant i_h \leqslant q,$$

$$h = 1, \ 2, \ \dots, \ n$$

pour un choix convenable de n, des mots  $u_h \in F$ , des  $\varepsilon_h$  et des  $i_h$ . Or, (17) est une équation dans le groupe libre F, les données étant : m,  $R_1$ ,  $R_2$ , ...,  $R_q$ . On s'attend donc à un aspect du probléme faisant intervenir les invariants de contraction, comme nous l'avons indiqué précédemment. Sans nous arrêter ici sur ces questions, indiquons que l'on est ainsi conduit à un système diophantien de degré supérieur par rapport aux invariants des inconnues  $u_h$ .

6. Invariants de conjugaison. Cherchons maintenant les invariants de contraction X(m) qui ne changent pas de valeur quand on remplace m par un quelconque de ses conjugués

$$(18) X(m) = X(u^{-1}mu), \forall u \in F.$$

Il faut et il suffit, pour que (18) ait lieu, que

(19) 
$$X(a^{-s} m a^{s}) = X(m), \quad X(b^{-t} m b^{t}) = X(m), \quad \forall s, t \in \mathbb{Z}.$$

On voit immédiatement que  $X_1$  et  $Y_1$  vérifient (18); ce sont les plus simples invariants de conjugaison. Afin d'obtenir tous les autres,

remarquons que l'on a, en posant  $m' = a^{-s} m a^s$ ,  $m'' = b^{-t} m b^t$ , et en appliquant les formules de multiplication des mots

Soit  $F(X_1, Y_1, \ldots, X_{2n}, Y_{2n})$  un invariant de conjugaison, F étant un polynôme. On a

$$F(X_1, Y_1, \ldots, X_{2n}, Y_{2n}) = F(X'_1, Y'_1, \ldots, X'_{2n}, Y'_{2n}) = F(X''_1, Y''_1, \ldots, X''_{2n}, Y''_{2n}).$$

Ces relations doivent être vérifiées pour  $s,t \in \mathbb{Z}$ ; mais, F étant un polynôme, elles auront lieu aussi pour  $s,t \in \mathbb{R}$ . En dérivant par rapport à s et t, puis en posant s=t=0, on trouve

$$Y_{1}\left(\frac{\partial F}{\partial X_{2}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2}}\right) - (X_{2} - Y_{2})\frac{\partial F}{\partial X_{3}} + Y_{3}\left(\frac{\partial F}{\partial X_{4}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{4}}\right) -$$

$$- (X_{4} - Y_{4})\frac{\partial F}{\partial X_{5}} + \dots + Y_{2n-1}\left(\frac{\partial F}{\partial X_{2n}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}}\right) = 0$$

$$X_{1}\left(\frac{\partial F}{\partial X_{2}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2}}\right) - (X_{2} - Y_{2})\frac{\partial F}{\partial Y_{3}} + X_{3}\left(\frac{\partial F}{\partial X_{4}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{4}}\right) -$$

$$- (X_{4} - Y_{4})\frac{\partial F}{\partial Y_{5}} + \dots + X_{2n-1}\left(\frac{\partial F}{\partial X_{2n}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}}\right) = 0.$$

En complétant ce système à l'aide des parenthèses de Poisson, on y ajoute

$$X_{1} \frac{\partial F}{\partial X_{3}} - Y_{1} \frac{\partial F}{\partial Y_{3}} + X_{3} \frac{\partial F}{\partial X_{5}} - Y_{3} \frac{\partial F}{\partial Y_{5}} + \dots + X_{2n-3} \frac{\partial F}{\partial X_{2n-1}} - Y_{2n-3} \frac{\partial F}{\partial Y_{2n-1}} = 0$$

$$Y_{1} \left(\frac{\partial F}{\partial X_{4}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{4}}\right) - (X_{2} - Y_{2}) \frac{\partial F}{\partial X_{5}} + Y_{3} \left(\frac{\partial F}{\partial X_{6}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{6}}\right) - (X_{4} - Y_{4}) \frac{\partial F}{\partial X_{7}} + \dots + Y_{2n-3} \left(\frac{\partial F}{\partial X_{5}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}}\right) = 0$$

$$X_{1} \left(\frac{\partial F}{\partial X_{4}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{4}}\right) - (X_{2} - Y_{2}) \frac{\partial F}{\partial Y_{5}} + X_{3} \left(\frac{\partial F}{\partial X_{5}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{5}}\right) - (X_{4} - Y_{4}) \frac{\partial F}{\partial Y_{7}} + \dots + X_{2n-3} \left(\frac{\partial F}{\partial X_{2n}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}}\right) = 0$$

$$(21') \qquad X_{1} \frac{\partial F}{\partial X_{2n-3}} - Y_{1} \frac{\partial F}{\partial Y_{2n-3}} + X_{3} \frac{\partial F}{\partial X_{2n-1}} - Y_{3} \frac{\partial F}{\partial Y_{2n-1}} = 0$$

$$Y_{1} \left(\frac{\partial F}{\partial X_{2n-2}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n-2}}\right) - (X_{2} - Y_{2}) \frac{\partial F}{\partial X_{2n-1}} + Y_{3} \left(\frac{\partial F}{\partial X_{2n}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}}\right) = 0$$

$$Y_{1} \left(\frac{\partial F}{\partial X_{2n-2}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n-2}}\right) - (X_{2} - Y_{2}) \frac{\partial F}{\partial Y_{2n-1}} + X_{3} \left(\frac{\partial F}{\partial X_{2n}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}}\right) = 0$$

$$Y_{1} \left(\frac{\partial F}{\partial X_{2n}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n-2}}\right) - (X_{2} - Y_{2}) \frac{\partial F}{\partial Y_{2n-1}} + X_{3} \left(\frac{\partial F}{\partial X_{2n}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}}\right) = 0$$

$$Y_{1} \left(\frac{\partial F}{\partial X_{2n}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n-2}}\right) - (X_{2} - Y_{2}) \frac{\partial F}{\partial Y_{2n-1}} + X_{3} \left(\frac{\partial F}{\partial X_{2n}} - \frac{\partial F}{\partial Y_{2n}}\right) = 0$$

La dernière équation montre que F dépend de  $X_{2n}$  et  $Y_{2n}$  par l'intermédiaire de  $u_n = X_{2n} + Y_{2n}$ , et l'intégration successive des équations en partant de la dernière conduit à la solution générale

$$F(X_1, Y_1, X_2 + Y_2, X_4 + Y_4, \ldots, X_{2n} + Y_{2n})$$

dont les solutions fondamentales sont  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $X_{2i} + Y_{2i}$ ,  $i = 1, 2, \ldots, n$ . Ce sont là les seuls invariants (polynomiaux) de conjugaison, indépendents, que nous désignerons par

$$\mathcal{Q}_{i}(m) = X_{2i}(m) + Y_{2i}(m), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

On doit y ajouter  $X_1(m)$  et  $Y_1(m)$ .

Pendant l'intégration du système (21), (21') on rencontre aussi les solutions  $v_i = X_1 Y_{2i-1} + Y_1 X_{2i-1} - X_2 Y_{2i-2} - Y_2 X_{2i-2} + \dots + (-1)^i X_i Y_i$  mais on doit remarquer que l'on a  $v_i = X_{2i} + Y_{2i}$  en vertu des syzygies (12).

La suite  $X_1(m)$ ,  $Y_1(m)$ ,  $\mathcal{Q}_i(m)$  n'est pas complète; elle ne détermine pas m à un automorphisme intérieur de F près. En effet, considérons

$$m = a^{x_1}b^{y_1}a^{x_2}b^{y_2}, \qquad m' = a^{x_1}b^{y_2}a^{x_2}b^{y_2}.$$

SUR CERTAINS INVARIANTS ATTACHÉS AUX GROUPES

On constate que  $X_1(m) = X_1(m')$ ,  $Y_1(m) = Y_1(m')$ ,  $\mathcal{C}_i(m) = \mathcal{C}_i(m')$ . On constate que  $A_1(m) - A_1(m)$ ,  $A_1(m) = C_i(m) = C_i(m)$ ,  $A_1(m) = C_i(m)$ ,  $A_2(m) = C_i(m)$ ,  $A_2(m$ permutation circulaire de m' ne donnant m.

nutation circulaire de m ne donnaire mutation circulaire de m ne donnaire de mariants de conjugaison, nous Afin d'obtenir une suite complète d'invariants de conjugaison, nous Afin d'obtemir une saite competent arithmétique; contrairement devrons recourir à des expressions de nature arithmétique; contrairement devrous recount a des expressions de la restriction aux procédés employés précédemment, nous renoncerons à la restriction aux procedes employes precedent aux exposants du mot m; nous d'utiliser des polynômes par rapport aux exposants du mot m; nous d'utiliser des polynomes par l'étant des expressions qui ont un sens seulement lorsque allons considérer aussi des expressions qui ont un sens seulement lorsque allons considerer aussi des entiers. Les nouveaux invariants seront formés à ces exposants sont des entiers. ces exposants sont des différentaires portant sur les invariants l'aide de fonctions arithmétiques élémentaires portant sur les invariants de contraction du mot m, en exploitant ainsi les propriétés arithmétiques Désignons par (p, q) le plus grand commun diviseur des entiers bde ces derniers.

et q, et par  $\mathcal{R}(a|b)$  le reste positif de la division de a par b.

En appliquant (20) on voit que

$$(X_1(m'), Y_1(m')) = (X_1(m''), Y_1(m'') = (X_1(m), Y_1(m))$$

$$(X_2(m'), X_1(m'), Y_1(m')) = (X_2(m''), X_1(m''), Y_1(m'')) = (X_2(m), X_1(m), Y_1(m)).$$
En posant  $d_1(m) = (X_1(m), Y_1(m))$ , on a les invariants de conjugaison

(22) 
$$(X_2(m), d_1(m)), r_2(m) = \mathcal{Q}(X_2(m)/d_1(m)), r'_2(m) = \mathcal{Q}(Y_2(m)/d_1(m))$$
  
 $(X_2(m) - Y_2(m), 2d_1(m)), r''_2(m) = \mathcal{Q}(X_2(m) - Y_2(m)/2d_1(m))$ 

On voit que

$$(Y_2(m), d_1(m)) = (X_1(m)Y_1(m) - X_2(m), d_1(m)) = (X_2(m), d_1(m)) = d_2(m)$$
 le plus grand commun diviseur jouissant de la propriété

(23) 
$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1 + \lambda_2^1 a_2 + \lambda_3^1 a_3 + \ldots + \lambda_n^1 a_n, a_2 + \lambda_3^2 a_3 + \ldots + \lambda_n^2 a_n, a_3 \lambda_4^3 a_4 + \ldots + \lambda_n^3 a_n, \ldots, a_{n-1} + \lambda_n^{n-1} a_n, a_n)$$

où les  $\lambda_i^j$  sont des entiers arbitraires. Ensuite

$$(X_3(m'), X_2(m) - Y_2(m), Y_1(m)) = (X_3(m''), X_2(m) - Y_2(m), Y_1(m)) = (X_3(m), X_2(m) - Y_2(m), Y_1(m)).$$

Or

$$X_2(m') - Y_2(m') = X_2(m) - Y_2(m) - 2sY_1(m)$$
  
 $X_2(m'') - Y_2(m'') = X_2(m) - Y_2(m) + 2tX_1(m)$ 

d'où les invariants de conjugaison

(24) 
$$d_{2}'(m) = (X_{2}(m) - Y_{2}(m), 2X_{1}(m), Y_{1}(m)), d_{2}''(m) = (X_{2}(m) - Y_{2}(m), X_{1}(m), 2Y_{1}(m))$$

$$(X_{3}(m), d_{2}'(m)), (Y_{3}(m), d_{2}''(m)), r_{3}(m) = \mathcal{R}(X_{3}(m)/d_{2}'(m))$$

$$r_{3}'(m) = \mathcal{R}(Y_{3}(m)/d_{2}''(m)).$$

En général, en tenant compte de (20), on trouve les invariants

$$d'_{2q}(m) = (X_{2q}(m) - Y_{2q}(m), 2X_{2q-1}(m), Y_{2q-1}(m), d'_{2q-2}(m))$$

$$d''_{2q}(m) = (X_{2q}(m) - Y_{2q}(m), X_{2q-1}(m), 2Y_{2q-1}(m), d''_{2q-2}(m))$$

$$d_{2q}(m) = (X_{2q}(m), d_{2q-1}(m)), (X_{2q+1}(m), d'_{2q}(m)), (Y_{2q+1}(m), d''_{2q}(m))$$

$$(25) r_{2q+1}(m) = \mathcal{R}(X_{2q+1}(m)/d'_{2q}(m)), r'_{2q+1}(m) = \mathcal{R}(Y_{2q+1}(m)/d''_{2q}(m))$$

$$d_{2q+1}(m) = (X_{2q+1}(m), Y_{2q+1}(m), X_{2q}(m) - Y_{2q}(m), d_{2q-1}(m))$$

$$(X_{2q}(m), d_{2q-1}(m)), (Y_{2q}(m), d_{2q-1}(m)), (X_{2q}(m) - Y_{2q}(m), 2d_{2q-1}(m))$$

$$r_{2q}(m) = \mathcal{R}(X_{2q}(m)/d_{2q-1}(m)), r'_{2q}(m) = \mathcal{R}(Y_{2q}(m)/d_{2q-1}(m)),$$

$$r''_{2q}(m) = \mathcal{R}(X_{2q}(m) - Y_{2q}(m)/2d_{2q-1}(m)).$$

Ces invariants ont un sens si  $d_1(m)$  est déterminé, donc si  $X_1(m)$ et  $Y_1(m)$  ne sont pas nuls tous les deux. Si  $X_1(m) = Y_1(m) = 0$  (nous dirons alors que m est un mot "équilibré")  $X_2(m)$  et  $Y_2(m)$  sont des invariants de conjugaison, à partir desquels on peut construire comme précédemment unde suite d'autres invariants. De même, si  $X_0(m)$  et  $Y_0(m)$ sont nuls aussi (m équilibré du  $2^d$  ordre)  $X_3(m)$  et  $Y_3(m)$  sont des invariants de conjugaison, etc. Le problème de la complétitude du système ne sera pas abordé ici.

7. Cas d'un groupe libre de rang 3. Nous désignerons les générateurs par a, b, c. Un mot de F s'écrit

$$m = a^{x_1}b^{y_1}c^{z_1}a^{x_2}b^{y_2}c^{z_2} \dots a^{x_n}b^{y_n}c^{z_n}.$$

Un invariant de contraction  $I(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n)$ devra satisfaire au système

$$I(x_1, 0, 0, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n) =$$

$$= I(x_1 + x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n, 0, 0, 0)$$

$$I(x_1, y_1, 0, 0, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n) =$$

$$= I(x_1, y_1 + y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n, 0, 0, 0)$$

$$I(x_1, y_1, z_1, 0, 0, z_2, ..., x_n, y_n, z_n) =$$

$$= I(x_1, y_1, z_1 + z_2, ..., x_n, y_n, z_n, 0, 0, 0)$$

(27)

$$I(x_{1}, y_{1}, z_{1}, x_{2}, y_{2}, z_{2}, \dots, x_{n-1}, 0, 0, x_{n}, y_{n}, z_{n}) =$$

$$= I(x_{1}, y_{1}, z_{1}, \dots, x_{n-1} + x_{n}, y_{n}, z_{n}, 0, 0, 0)$$

$$I(x_{1}, y_{1}, z_{1}, x_{2}, y_{2}, z_{2}, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, 0, 0, y_{n}, z_{n}) =$$

$$= I(x_{1}, y_{1}, z_{1}, \dots, x_{n-1}, y_{n-1} + y_{n}, z_{n}, 0, 0, 0)$$

$$I(x_{1}, y_{1}, z_{1}, x_{2}, y_{2}, z_{2}, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}, 0, 0, z_{n}) =$$

$$= I(x_{1}, y_{1}, z_{1}, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1} + z_{n}, 0, 0, 0).$$

Nous adoptons ici une nouvelle notation pour les invariants de contraction, qui sont les suivants

$$X(m) = \sum_{1 \le i \le n} x_i, \qquad Y(m) = \sum_{1 \le i \le n} y_i, \qquad Z(m) = \sum_{1 \le i \le n} z_i$$

$$XY(m) = \sum_{1 \le i \le j \le n} x_i y_j, \qquad YX(m) = \sum_{1 \le i \le j \le n} y_i x_j, \qquad ZX(m) = \sum_{1 \le i < j \le n} z_i x_j$$

$$XZ(m) = \sum_{1 \le i \le j \le n} x_i z_j, \qquad YZ(m) = \sum_{1 \le i \le j \le n} y_i z_j, \qquad ZY(m) = \sum_{1 \le i < j \le n} z_i y_j$$

$$XYX(m) = \sum_{1 \le i \le j < k \le n} x_i y_j x_k, \qquad YZX(m) = \sum_{1 \le i \le j < k \le n} y_i z_j x_k,$$

$$ZYX(m) = \sum_{1 \le i \le j < k \le n} z_i y_j x_k \qquad XYZ(m) = \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} x_i y_j z_k,$$

$$YZY(m) = \sum_{1 \le i \le j < k \le n} y_i z_j y_k, \qquad ZYZ(m) = \sum_{1 \le i < j \le k \le n} z_i y_j z_k$$

$$XYXY(m) = \sum_{1 \le i \le j < k \le l \le n} x_i y_j x_k y_l, \qquad XZXY(m) = \sum_{1 \le i \le j < k \le l \le n} x_i z_j x_k y_l,$$

$$ZYXY(m) = \sum_{1 \le i \le j < k \le l \le n} x_i y_j x_k y_l, \qquad XZXY(m) = \sum_{1 \le i \le j < k \le l \le n} x_i z_j x_k y_l,$$

$$ZYXY(m) = \sum_{1 \le i \le j < k \le l \le n} x_i y_j x_k y_l, \qquad ZYZ(m) = \sum_{1 \le i \le j < k \le l \le n} x_i z_j x_k y_l,$$

En général, à chaque succession des majuscules X, Y, Z, avec répétition, mais sans que deux majuscules successives soient égales, il correspond le symbole d'un invariant de contraction dans le groupe libre F = |a, b, c|. Avec la notation (28) de ces invariants, on voit que le nombre des majuscules X, Y, Z au premier membre est égal au degré de l'invariant. L'ordre de succession de ces majuscules au premier membre précise l'ordre de succession des letters x, y, z dans chaque produit au second membre, lettres que l'on choisit dans la suite  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, z_n, y_n, z_n$  en allant de gauche vers la droite, et de toutes les manières possibles pour chaque somme.

On voit que si le nombre des majuscules X, Y, Z dans un tel invariant dépasse ls(m) = 3n, l'invariant en question est nul, m pouvant être considéré comme un mot de longueur syllabique > 3n dont les derniers exposants sont nuls.

Avant d'établir la propriété d'invariance des expressions (28) par rapport aux contractions triviales de m, remarquous que ces expressions (que nous appellerons "invariants" par anticipation) admettent des formules de multiplication des mots. Par ex. on a

$$XYZ(m_1m_2) = XYZ(m_1) + XY(m_1)Z(m_2) + X(m_1)YZ(m_2) + XYZ(m_2)$$

$$ZYZX(m_1m_2) = ZYZX(m_1) + ZYZ(m_1)X(m_2) + ZY(m_1)ZX(m_2) + Z(m_1)YZX(m_2) + ZYZX(m_2)$$

Une formule analogue a lieu pour chaque arrangement (avec répétition) des majuscules X, Y, Z, avec la restriction déjà mentionnée (YZXX ou XZZY ne donnent pas des invariants).

Pour établir l'invariance des expressions (28), désignons une telle expression par le symbole  $A_1A_2 \ldots A_k(m)$ , où chaque  $A_i$  représente l'une des lettres X, Y ou Z et  $A_i \neq A_{i+1}$  pour  $i = 1, 2, \ldots, k-1$ . Dans l'expression (26) de m, mettons en évidence les syllabes correspondant aux exposants  $x_i$  est  $x_{i+1}$ , de manière que m s'écrit alors

$$m = \mu \cdot a^{x_i} b^{y_i} c^{x_i} a^{x_{i+1}} \cdot v = \mu \cdot \omega \cdot v \text{ avec } \omega = a^{x_i} b^{y_i} c^{x_i} a^{x_{i+1}}.$$

On peut écrire, en tenant compte des formules des multiplication,

$$A_{1}A_{2} \dots A_{k}(m) = A_{1}A_{2} \dots A_{k}(\mu\nu) + A_{1}A_{2} \dots A_{k}(\omega) + A_{1} \dots A_{k-1}(\mu)A_{k}(\omega) + A_{1} \dots A_{k-2}(\mu)A_{k-1}A_{k}(\omega) + \dots + A_{1} \dots A_{k-5}(\mu)A_{k-4}A_{k-3}A_{k-2}A_{k-1}A_{k}(\omega) + A_{1} \dots A_{5}(\omega)A_{6} \dots A_{k}(\nu) + A_{1} \dots A_{4}(\omega)A_{5} \dots A_{k}(\nu) + \dots + A_{1}(\omega)A_{2} \dots A_{k}(\nu),$$

en remarquant que les "invariants" de  $\omega$  de degré  $\geqslant 5$  sont nuls.

Or, les "invariants" de  $\mu\nu$ ,  $\mu$  et  $\nu$ , ne dépendent ni de  $x_i$ , ni de  $x_{i+1}$ , ces exposants ne figurant que dans  $\omega$ . Si l'on pose  $y_i = z_i = 0$ , les "invariants" de  $\omega$  sont tous nuls, sauf si  $A_k = X$  ou  $A_1 = X$  ou  $A_1 = A_k = X$ . Dans ce cas, on a  $A_k(\omega|_{y_iz_i}) = x_i + x_{i+1}$  ou  $A_1(\omega)|_{y_iz_i}) = x_i + x_{i+1}$ , ou les deux égalités. Il reste donc

$$A_1 A_2 \dots A_k(m|_{y_i z_i}) = A_1 \dots A_k(\mu \nu) + \varepsilon_1(x_i + x_{i+1}) A_1 \dots A_{k-1}(\mu) + \varepsilon_2(x_i + x_{i+1}) A_2 \dots A_k(\nu),$$

les  $\varepsilon$  pouvant prendre la valeur 0 ou 1. Or, le second membre coı̈ncide dans tous les cas avec  $A_1A_2 \ldots A_k(\mu a^{x_i+x_{i+1}}\nu)$ , ce qui montre le caractère invariant (sans guillemets) de  $A_1A_2 \ldots A_k(m)$ , pour  $y_i = z_i = 0$ . Une demonstration analogue vaut pour  $z_i = x_{i+1} = 0$  ou  $x_i = y_i = 0$ . Bien des propriétés déjà rencontrées dans le cas des groupes libres de rang 2 se retrouvent ici (et même dans le cas de k générateurs). Ainsi, on montre par les procédés déjà indiqués que si un invariant de contraction  $F(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$ , solution du système (27), est indépendent de  $x_1, y_1, z_1$ , il est identiquement nul (en admettant que F est un polynôme homogène). Mais un invariant de la suite (28) dont le symbole commence par Y est indépendent de  $x_1$ , et si le symbole commence par Z l'invariant est indépendent de  $x_1$  et  $y_1$ .

Pour montrer que les invariants (28) forment un système complet, remarquons que si  $m = \overline{m} = 1$ , le dernier invariant non-nul de m est

égal au produit de tous ses exposants non-nuls. Admettons que m s'étend sur n tranches

$$m = a^{x_1}b^{y_1}c^{z_1}a^{x_2}b^{y_2}c^{z_2} \dots a^{z_n}b^{y_n}c^{z_n}.$$

Certains de ces exposants peuvent être nuls, mais chaque tranche doit contenir au moins une syllabe à exposant non-nul. Le mot étant supposé réduit, les exposants de deux syllabes voisines ne peuvent être nuls, sauf  $x_1$ ,  $y_1$  ou  $y_n$ ,  $z_n$ . Désignons par k le nombre des exposants nonnuls de m et considérons les invariants  $A_1A_2 \ldots A_k(m)$  de degré k, du système (28). Si  $x_1 \neq 0$ , prenons,  $A_1 = \hat{X}$ , les majuscules suivantes  $A_2, \ldots$ , correspondant successivement aux exposants non-nuls de m, en ce sens que si  $y_1 \neq 0$  on prendra  $A_2 = Y$ , si  $y_1 = 0$  donc  $z_1 \neq 0$ , on prendra  $A_2 = Z$ , etc. Pour  $x_1 \neq 0$ ,  $y_1 \neq 0$ ,  $z_1 \neq 0$ ,  $XYZA_4 \ldots A_k(m) =$  $x_1y_1z_1$  ... est égal au produit des exposants non-nuls de m, puis  $YZA_4$  ...  $A_k(m) = y_1 z_1 \dots \neq 0$  et  $ZA_4 \dots A_k(m) = z_1 \dots \neq 0$ . On a donc

 $x_1 = \frac{XYZA_4 ... A_k(m)}{YZA_4 ... A_k(m)}, \ y_1 = \frac{YZA_4 ... A_k(m)}{ZA_4 ... A_k(m)}, \ z_1 = \frac{ZA_4 ... A_k(m)}{A_4 ... A_k(m)}$ 

les exposants de la première tranche étant ainsi calculés.

Si  $x_1 = 0$ , on reconnaîtra ce cas par  $XA_2 \ldots A$  (m) = 0. On calcule alors  $y_1$  et  $z_1$  comme précédemment si  $z_1 \neq 0$ . Si  $z_1 = 0$ , donc  $y_1 \neq 0$ ,

$$y_1 = \frac{YA_2 \dots A_k(m)}{A_2 \dots A_k(m)}.$$

Ainsi, les exposants de la première tranche peuvent être calculés par des opérations rationnelles. En désignant par  $m_1$  la première section finale

$$m_1 = a^{x_2}b^{y_1}c^{z_2} \ldots a^{x_n}b^{y_n}c^{z_n}$$

on a des formules analogues à (9)

$$X(m) = x_1 + X(m_1), Y(m) = y_1 + Y(m_1), XY(m) = x_1Y(m) + XY(m_1), YX(m) = y_1X(m_1) + YX(m_1), XZ(m) = x_1Z(m) + XZ(m_1), YZ(m) = y_1Z(m) + YZ(m_1), XYX(m) = x_1YX(m) + XYX(m_1), YZX(m) = y_1ZX(m) + YZX(m_1), XYZ(m) = x_1YX(m) + XYZ(m_1), YZY(m) = y_1ZY(m) + YZY(m_1), XYZ(m) = x_1YX(m) + XYZ(m_1), YZY(m) = y_1ZY(m) + YZY(m_1), XYZ(m) = x_1YX(m) + XYZ(m_1), YZY(m) = y_1ZY(m) + YZY(m_1), XYZ(m) = x_1YX(m) + XYZ(m_1), XYZ(m) = x_1YX(m) + XYZ(m) + XY$$

(29) 
$$Z(m) = z_1 + Z(m_1)$$

$$ZX(m) = z_1 X (m_1) + ZX(m_1)$$

$$ZY(m) = z_1 Y(m_1) + ZY(m_1)$$

$$ZYX(m) = z_1 YX(m_1) + ZYX(m_1)$$

$$ZYZ(m) = z_1 YZ(m_1) + ZYZ(m_1)$$

formules qui permettent de calculer les invariants de  $m_1$  et de déterminer  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$  comme auparavant, etc.

31 La complétitude du système (28) etant etablie (et le procedê est applicable sans modification dans le cas où F est un groupe libre de rang >3) on arrive au problème des syzygies. Leur détermination peut être ramenée encore à un système jacobien d'équations linéaires aux dérivées partielles diu Ier ordre, mais les calculs se compliquent en conséquence à mesure que le nombre des générateurs augmente. Un procédé plus simple ayant été indiqué précédemment [3], nous nous contentons d'indiquer ici quelques syzygies qui interviennent dans la suite. On a, par ex., en écrivant XY pour XY(m), etc.,

$$XYZ - ZYX = X \cdot YZ - Z \cdot YX; XYZY + YZYX = X \cdot YZY + Y \cdot ZYX - YX \cdot ZY$$

le point entre deux symboles signifiant la multiplication des invariants correspondents. D'une manière générale

$$A_1 A_2 \dots A_{2k+1}(m) - A_{2k+1} A_{2k} \dots A_1 \text{ et } A_1 A_2 \dots A_{2k} + A_{2k} A_{2k-1} \dots A_1$$
 s'expriment sous forme rational.

s'expriment sous forme rationnelle entière à l'aide des invariants de degré inférieur à 2k + 1, resp. 2k. Signalons aussi

$$XYZXYZ + ZYXZYX = X \cdot YZXYZ + Z \cdot YXZYX - YX \cdot ZXYZ - - YZ \cdot XZYX + ZYX \cdot XYZ$$

et en général

$$A_{1}A_{2} \dots A_{k} + (-1)^{k}A_{k}A_{k-1} \dots A_{1} = A_{1} \cdot A_{2} \dots A_{k} + (-1)^{k}A_{k} \cdot A_{k-1} \dots A_{1} - A_{2}A_{1} \cdot A_{3} \dots A_{k} - (-1)^{k}A_{k-1}A_{k} \cdot A_{k-2} \dots A_{1} + A_{3}A_{2}A_{1} \cdot A_{4} \dots A_{k} + (-1)^{k}A_{k-2}A_{k-1}A_{k} \cdot A_{k-3} \dots A_{1} - \dots$$
Pour vérifier ces formula :

Pour vérifier ces formules, il suffit de vérifier l'égalité des dérivées  $\partial/\partial x_1$ ,  $\partial/\partial y_1$ ,  $\partial/\partial z_1$  des deux membres de chaque formule, car, ces identités étant algébriques, elles seront vérifiées pour toutes les valeurs des exposants si elles le sont pour les valeurs entières de ceux-ci. Un autre genre de syzygies transforme la somme des permutations circulaires du

$$XYZ + YZX + ZXY = X \cdot YZ + Y \cdot ZX + Z \cdot XY - X \cdot Y \cdot Z$$
Hous verrons que les 1

et nous verrons que les deux membres sont aussi des invariants de conjugaison, de même que  $A_1A_2 \ldots A_k + A_2 \ldots A_kA_1 + \ldots + A_kA_1 \ldots A_{k-1}$ , avec  $A_1 \neq A_k$ ;  $A_i \neq A_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \ldots, k-1$ . En posant

$$m' = a^{-s}ma^{s}, \quad m'' = b^{-t}mb^{t}, \quad m''' = c^{-u}mc^{u}, \quad s, \quad t, \quad u \in Z$$

une fonction F des invariants de contraction sera un invariant de conjugaison si elle reste inchangée quand on remplace m par m', m'' ou m'''.

Il est évident que X(m), Y(m), Z(m) sont de tels invariants. On a ensuite, en écrivant toujours XY pour XY(m), etc.,

$$XY(m') = XY - sY,$$
  $XZ(m') = XZ - sZ,$   $XZ(m') = XZ + sY,$   $YZ(m') = YZ,$   $YZ(m') = YZ,$   $YZ(m') = YZ,$   $ZX(m') = ZX + sZ,$   $ZY(m') = ZY,$   $ZY(m') = ZY,$   $ZY(m') = ZY,$   $ZY(m') = ZY,$   $ZY(m') = ZY + tZ,$   $ZY(m') = XYZ - sYZ,$   $ZYZ(m') = XYZ,$   $ZYZ(m') = XYZ,$   $ZYZ(m') = XYZ,$ 

XY(m''') = XY XZ(m''') = XZ + uX YX(m''') = YX YZ(m''') = YZ + uY ZX(m''') = ZX - uX ZY(m''') = ZY - uY XYX(m''') = XYX XYZ(m''') = XYZ + uXY

D'une manière générale,  $A_1A_2$  ...  $A_k$  étant le symbole d'un invariant de contraction, avec  $A_1 \neq A_k$  (en plus de  $A_i \neq A_{i+1}$ ,  $i=1,2,\ldots,k-1$ ), on a

(30) 
$$A_1 A_2 \dots A_k(m') = A_2 \dots A_k A_1(m) - s\xi(A_2) A_3 \dots A_k A_1(m) + s\xi(A_1) A_2 \dots A_{k-1}(m)$$

avec

$$\xi(A_i) = 1 \text{ si } A_i = X, \ \xi(A_i) = 0 \text{ si } A_i \neq X.$$

On en déduit, par permutations circulaires

$$A_2 \ldots A_k A_1(m') = A_2 \ldots A_k A_1(m) - s\xi(A_2)A_3 \ldots A_k A_1(m) + s\xi(A_1)A_2 \ldots A_k(m)$$

$$A_{i} \dots A_{k}A_{1} \dots A_{i-1}(m') = A_{i} \dots A_{k}A_{1} \dots A_{i-1}(m) - s\xi(A_{i})A_{i+1} \dots A_{k}A_{1} \dots A_{i-1}(m) + s\xi(A_{i-1})A_{i} \dots A_{k}A_{1} \dots A_{i-2}(m)$$

$$A_k A_1 \ldots A_{k-1}(m') = A_k A_1 \ldots A_{k-1}(m) - s\xi(A_k) A_1 \ldots A_{k-1}(m) + s\xi(A_{k-1}) A_k A_1 \ldots A_{k-2}(m)$$

En ajoutant ces égalités, on obtient

$$A_1 A_2 \dots A_k(m') + A_2 \dots A_k A_1(m') + \dots + A_k A_1 \dots A_{k-1}(m') = A_1 A_2 \dots A_k(m) + A_2 \dots A_k A_1(m) + \dots A_k A_1 \dots A_{k-1}(m).$$

On a également

$$A_{1}A_{2} \dots A_{k}(m'') = A_{1}A_{2} \dots A_{k}(m) - t\eta(A_{1})A_{2} \dots A_{k}(m) + t\eta(A_{k})A_{1}A_{2} \dots A_{k-1}(m)$$

$$A_{1}A_{2} \dots A_{k}(m''') = A_{1}A_{2} \dots A_{k}(m) - u\zeta(A_{1})A_{2} \dots A_{k}(m) + u\zeta(A_{k})A_{1}A_{2} \dots A_{k-1}(m)$$

avec

$$\eta(A_i) = 1 \text{ si } A_i = Y, \quad \eta(A_i) = 0 \text{ si } A_i \neq Y \\
\zeta(A_i) = 1 \text{ si } A_i = Y, \quad \zeta(A_i) = 0 \text{ si } A_i \neq Z$$

qui permettent de conclure à l'invariance par conjugaison de

Ce procédé est appliquable sans modification au cas d'un groupe libre F de rang >3.

8. Les invariants ternaires comme fonctions des invariants binaires. Nous appelons "invariants binaires" les invariants (6) relatifs à un groupe libre de rang 2, et "invariants ternaires" ceux qui sont relatifs à un groupe libre de rang 3. Ces derniers peuvent être exprimés sous forme rationnelle à l'aide des invariants binaires, et l'on peut voir qu'il en est de même des invariants de contraction d'un groupe libre de rang >3, ce qui confère un intérêt particulier aux invariants binaires. Mais, au point de vue du calcul, nous verrons qu'il est souvent avantageux d'employer directement les invariants ternaires, quaternaires, etc.

Soit m un mot ternaire (26). Si, dans m, on pose a = 1, on obtient le mot binaire (projection de m sur b et c)

$$m_a = b^{y_1}c^{z_1}b^{y_2}c^{z_2} \dots b^{y_n}c^{z_n}$$

et l'on a

$$Y(m_a) = Y(m), Z(m_a) = Z(m), YZ(m_a) = YZ(m), ZY(m_a) = ZY(m), YZY(m_a) = YZY(m), \dots$$

puisque, en calculant un invariant YZYZY...(m) ou ZYZYZ...(m), on ,,saute" sur les exposants de a. De même, en posant b=1 ou c=1 dans m, on a

$$m_b = a^{x_1} c^{z_1} a^{x_2} c^{z_3} \dots a^{z_n} c^{z_n}, m_i = a^{x_1} b^{y_1} a^{x_2} b^{y_3} \dots a^{x_n} b^{y_n}$$

et

$$X(m_b) = X(m), \quad Z(m_b) = Z(m), \quad XZ(m_b) = XZ(m), \quad ZX(m_b) = ZX(m),$$
 $X(m_c) = X(m), \quad Y(m_c) = Y(m), \quad XY(m_c) = XY(m), \quad YX(m_c) = YX(m).$ 
 $XZX(m_b) = XZX(m), \quad \dots$ 
 $XYX(m_c) = XYX(m), \quad \dots$ 

Or, si les invariants de contraction de m sont connus, ces formules montrent que les invariants de  $m_a$ ,  $m_b$ ,  $m_c$  sont connus. Réciproquement, les invariants de  $m_a$  permettent le calcul des exposants  $y_i$ ,  $z_i$  de m, ceux de  $m_b$  permettent le calcul des  $x_i$ ,  $z_i$  et ceux de  $m_c$  permettent le calcul des  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$ , chaque exposant étant exprimé de deux manières. En substituant ces valeurs dans un invariant ternaire de m, on obtient donc l'expression de celui-ci sous forme rationnelle en fonction des invariants binaires de m. Mais l'expression ainsi obtenue a l'inconvénient de changer avec la longueur syllabique de m. La double expression que l'on obtient pour chaque exposant de m conduit à des relations identiques entre les invariants binaires de m, qui ont aussi l'inconvénient de dépendre de la longueur syllabique de m. Voici un exemple; pour n=2,  $m=a^{z_1}b^{y_1}c^{z_1}a^{z_2}b^{y_2}c^{z_3}$ , on a (tous les invariants se référant à m)

$$XYZ = \frac{YZ}{ZX} \left( XZX + \frac{X \cdot ZX - XZX}{Z \cdot YZ - ZYZ} ZYZ \right) \cdot$$

Mais l'expression binaire de XYZ se complique si n > 2, donc si ls(m) > 6.

9. Cas d'un groupe libre de rang > 3. Les considérations précédentes peuvent être étendues au cas d'un groupe libre, dénombrable, quelconque, sans autre difficulté que celle de l'écriture. Soit F un groupe de rang 4 et

$$m = a^{x_1}b^{y_1}c^{z_1}d^{u_1}a^{x_2}b^{y_2}c^{z_2}d^{u_2} \dots a^{x_n}b^{y_n}c^{z_n}d^{u_n}.$$

Chaque symbole  $A_1A_2 \ldots A_k(m)$ , où chaque majuscule  $A_i$  représente l'une des lettres X, Y, Z, U et  $A_i \neq A_{i+1}$ ,  $i=1,2,\ldots,k-1$ , donne un invariant de contraction de m. On a par exemple

$$XUZYU(m) = \sum_{i \le j < l < p \le q} x_i u_j z_l y_p u_q, \text{ etc.}$$

On constate ici l'existence de syzygies qui relient les invariants binaires de m, ces relations étant indépendentes de ls(m). Ainsi

$$\begin{vmatrix} XU & UX & X \\ YU & UY & Y \\ ZU & UZ & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} XU + UX & UX & X \\ YU + UY & UY & Y \\ ZU + UZ & UZ & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X \cdot U & UX & X \\ Y \cdot U & UY & Y \\ Z \cdot U & UZ & Z \end{vmatrix} = 0$$

done

$$X(YU \cdot UZ - UY \cdot ZU) + Y(ZU \cdot UX - UZ \cdot XU) + + Z(XU \cdot UY - UX \cdot YU) = 0$$

dont les généralisations sont nombreuses.

# II. INVARIANTS DANS LES GROUPES À RELATIONS. AUTOMORPHISMES.

1. Invariants d'insertion. Soit F un groupe libre et R un mot formé avec les générateurs de F. Soit N(R) le sousgroupe normal engendré par R dans F et G = F/N(R). Si m est un autre mot formé avec les générateurs de F, on appelle insertion de R dans m l'opération qui consiste d'abord à décomposer m en produit de deux mots  $\mu$  et  $\nu$  sous la forme  $m = \mu \nu$ , puis à former le mot  $\mu R \nu$ . Une telle décomposition de m peut être précédée d'une "extension" de m de la forme  $m = \mu u^{-1} \cdot uv$ , où u est un fragment initial et v est un fragment final de m. Deux mots m et  $m_1$  sont dits équivalents relativement à R si  $m_1$  résulte de m par un nombre fini d'insertions de R ou  $R^{-1}$ , chaque insertion étant suivie des contractions triviales possibles; nous écrirons alors  $m_{\sim}m_1$  et les classes d'équivalence ainsi définies dans F forment le groupe G. D'une manièregénérale, si R, S, T, ..., sont des mots de F,  $m_{PST}m_1$  signifie que  $m_1$ résulte de m par une succession d'insertions de R, S, T, ... ou de leurs inverses dans m, suivies des contractions triviales après chaque insertion. et les classes d'équivalence ainsi définies forment les éléments du groupe  $G = F/N(R, S, T, \ldots)$  aux relations  $R = S = T = \ldots = 1$ .

Nous formerons ici des invariants de contraction de F qui, de plus, sont des invariants d'insertion, permettant ainsi de caractériser en quelque sorte les éléments d'un groupe à relations, correspondant aux relateurs R, S, T, ....

En partant d'un mot m et en inserant  $R^{\pm 1}$ ,  $S^{\pm 1}$ ,  $T^{\pm 1}$ , ... dans m de toutes les manières possibles, on obtient des mots de différentes longueurs; parmi ces derniers, il existe au moins un mot de longueur syllabique minima. Ce mot n'est pas unique en général; nous désignerons par  $\overline{m}$  l'un quelconque de ces mots, que nous appellerons un mot réduit de m par rapport aux relateurs R, S, T, ... (ou un mot réduit mod  $(R, S, T, \ldots)$ ). Si  $I(m; R, S, T, \ldots)$  est un invariant d'insertion, on a donc

$$I(m; R, S, T, \ldots) = I(\overline{m}; R, S, T, \ldots).$$

Un problème fondamental qui se pose alors est le suivant: Dans quelles conditions existe-t-il une suite complète d'invariants d'insertion? Par d'autres mots: Une suite d'invariants d'insertion étant donnée par les valeurs numériques de ces invariants, peut-on trouver l'un des mots  $\overline{m}$  corespondents? On voit qu'une réponse affirmative serait possible dans les cas où le problème du mot (Wordproblem) est décidable. On sait que ce dernier problème est soluble par un algorithme fini dans le cas d'un groupe à un seul relateur; aussi, nous commençons la recherche des invariants d'insertion dans cette hypothèse.

2. Cas d'un seul relateur. Soit I(m; R) une combinaison linéaire d'invariants de contraction de m, dont les coefficients sont des invariants de contraction de R

$$I(m; R) = \sum_{i} A_{i}(R)B_{i}(m)$$

telle que, pour toute décomposition  $m=\mu\nu$ , l'on ait

(1) 
$$I(\mu R \nu; R) = I(\mu \nu; R).$$

Cette égalité devra donc être vérifiée quels que soient les mots  $\mu \in F$ ,  $\nu \in F$ ,  $R \in F$ . Dans ces conditions, nous dirons que I(m; R) est un invariant d'insertion (mod. R). Soit  $R_1 = u^{-1}Ru$ ,  $u \in F$ . La relation  $R_1 = 1$  équivaut R = 1; donc nous exigerons, de plus,  $I(m; R_1) = I(m; R)$ . Ceci impose que les coefficients A(R) dans (1) soient des invariants de conjugaison de R,  $A_i(R_1) = A_i(R)$ . D'ailleurs, l'insertion  $\mu R_1 \nu$  pour la décomposition  $m = \mu \nu$  revient à l'insertion  $\mu u^{-1}Ru\nu$  de R pour la décomposition  $m = \mu \nu$ .

La formation de tels invariants est facilitée par l'emploi d'expressions que nous appelons des *préinvariantes* (mod. R); ce sont des combinaisons linéaires

$$P(m; R) = \sum_{i} A_{i}(R) B_{i}(m)$$

de même forme que I(m; R), vérifiant une condition plus faible

$$P(\mu R \nu; R) = P(\mu \nu; R) + Q(R), \forall \mu, \nu, R \in F$$

le "reste" Q(R) étant indépendent de  $\mu$  et  $\nu$ . Alors, pour  $\mu = \nu^{-1}$ , on a

$$P(v^{-1}Rv; R) = P(1; R) + Q(R) = Q(R).$$

Pour v = 1, il en résulte  $Q(R) = P(R; R) = P(v^{-1}Rv; R)$ , qui montre que le reste P(R; R) est aussi un invariant de conjugaison de R, Ainsi

(2) 
$$P(vRv; R) = P(\mu v; R) + P(R; R) = P(\mu Rv; R_1).$$

Dans P(m; R), les coefficients  $A_i(R)$  et le reste P(R; R) dans (2) seront des invariants de conjugaison de R.

Si  $P_1(m; R)$ ,  $P_2(m; R)$  sont deux tels préinvariants, on voit que

$$P_2(R; R)P_1(m; R) - P_1(R; R)P_2(m; R)$$

est un invariant (mod. R), et ceci justifie l'étude des preinvariants (mod. R). En remplaçant  $\mu$  par  $\mu R^{-1}$  dans (2), on a

$$P(\mu\nu; R) = P(\mu R^{-1}\nu; R) + P(R; R), \text{ donc } P(\mu R^{-1}\nu; R) = P(\mu\nu; R) - P(R; R).$$

Il en résulte que, après  $\rho$  insertions de R et  $\sigma$  insertions de  $R^{-1}$ , dans m, P(m; R) augmente de  $(\rho - \sigma)P(R; R)$ ; c'est une information que

les invariants I(m; R) ne peuvent fournir. Si  $P_1(m; R)$  et  $P_2(m; R)$  sont deux préinvariants (mod. R), et si  $m_1 \sim m_2$  (mod. R), on a donc

$$\frac{P_1(m_1; R) - P_1(m_2; R)}{P_1(R; R)} = \frac{P_2(m_1; R) - P_2(m_2; R)}{P_2(R; R)} = \rho - \sigma.$$

La relation (2) implique, pour v = 1,

(3) 
$$P(mR; R) = P(m; R) + P(R; R)$$

qui correspond à l'insertion ,,finale" de R, pour la décomposition triviale  $m=m\cdot 1$ . Mais cette condition, jointe à l'hypothèse que les coefficients  $A_i(R)$  de P(m;R) et le reste P(R;R) sont des invariants de conjugaison, implique (2). En effet, si  $P(m;R) = P(m;R_1)$  et  $P(R;R) = P(R_1;R_1)$ , on a, pour  $R_1 = v^{-1}Rv$ ,

$$P(\mu R \nu; R) = P(\mu R \nu; R_1) = P(\mu \nu \cdot \nu^{-1} R \nu; R_1) = P(mR_1; R_1) = P(m; R_1) + P(R_1; R_1) = P(m; R) + P(R; R) = P(\mu \nu; R) + P(R; R).$$

Pour la recherche des préinvariants, on peut donc se restreindre à la condition (3); or, cette condition exprime l'additivité de P(m; R) par rapport à la multiplication des mots (l'un de ces mots étant R), ce qui nous ramène au procédé de détermination des syzygies. Mais une différence essentielle consiste dans le fait que, dans le cas des syzygies, les coefficients d'une combinaison linéaire d'invariants de contraction formant syzygie sont des constantes numériques, tandis que, pour satisfaire à (3), ces coefficients seront des invariants de conjugaison de R.

3. Groupe F de rang 2. Si le nombre des générateurs de F est 2, un préinvariant sera une combinaison linéaire des invariants de contraction  $X, Y, XY, YX, \ldots$  On a

$$X(mR) = X(m) + X(R), \qquad Y(mR) = Y(m) + Y(R)$$

qui montre que X et Y sont des préinvariants (mod. R). On obtient donc un invariant (mod. R), du  $1^{\rm re}$  degré par rapport aux exposants de m et ceux de R

$$I(m; R) = Y(R)X(m) - X(R)Y(m).$$

On a ensuite

$$XY(mR) = XY(m) + X(m)Y(R) + XY(R)$$

$$YX(mR) = YX(m) + Y(m)X(R) + YX(R)$$

$$XYX(mR) = XYX(m) + XY(m)X(R) + X(m)YX(R) + XYX(R)$$

$$YXY(mR) = YXY(m) + YX(m)Y(R) + Y(m)XY(R) + YXY(R)$$

D'une manière générale, si S est le symbole d'un invariant de contraction, nous posons  $\overline{S} = S(mR) - S(m) - S(R)$ . On a alors

$$\overline{XY} = X(m)Y(R)$$

$$\overline{YX} = Y(m)X(R)$$

$$\overline{XYX} = XY(m)X(R) + X(m)YX(R)$$

$$\overline{YXY} = YX(m)Y(R) + Y(m)XY(R)$$

(4) 
$$\frac{\overline{X \cdot XY}}{\overline{X \cdot YX}} = X(m)^{2}Y(R) + XY(m)X(R) + X(m)XY(R) + X(m)X(R)Y(R) \overline{X \cdot YX} = X(m)Y(m)X(R) + YX(m)X(R) + X(m)YX(R) + Y(m)X(R)^{2} \overline{Y \cdot XY} = X(m)Y(m)Y(R) + XY(m)Y(R) + Y(m)XY(R) + X(m)Y(R)^{2} \overline{Y \cdot YX} = Y(m)^{2}X(R) + YX(m)Y(R) + Y(m)YX(R) + Y(m)X(R)Y(R)$$

La notation  $X \cdot XY$  représente ici X(m)XY(m), donc

$$\overline{X \cdot XY} = X(mR)XY(mR) - X(m)XY(m) - X(R)XY(R)$$
, etc.

Pour obtenir un préinvariant (mod.R), on doit former d'abord une combinaison linéaire de  $XY, YX, XYX, \ldots$  dont les coefficients sont des invariants de conjugaison de R, combinaison nulle identiquement. En multipliant les équations (4) par des coefficients indéterminés  $A, B, C, \ldots$  et en ajoutant, nous choisirons ces indéterminés de manière à faire disparaître au second membre tous les termes qui dépendent de m; dans ce calcul nous pourrons utiliser les syzygies telles que  $XY + YX = X \cdot Y$ . On obtient ainsi un système linéaire pour  $A, B, C, \ldots$  Par ex., en nous limitant aux 4 premières équations de (4) nous aurons

$$2X(R)\overline{XY} - Y(R)\overline{X^2} = 0.$$
  $2Y(R)\overline{YX} - X(R)\overline{Y^2} = 0$ 

qui conduisent aux expressions

(5) 
$$2X(R)XY(m) - Y(R)X(m)^2$$
,  $2Y(R)YX(m) - X(R)Y(m)^2$ .

Les coefficients 2X(R), -Y(R), etc. sont bien des invariants de conjugaison de R, mais les restes ne le sont pas; en effet, ces restes sont  $2X(R)XY(R) - Y(R)X(R)^2$ ,  $2Y(R)YX(R) - X(R)Y(R)^2$ 

Or, XY(R) et YX(R) ne sont pas des invariants de conjugaison (voir 3. chap. I). En ajoutant les deux restes après multiplication par reste nul pour la combinaison correspondente des expréssions (5), qui sera donc un invariant (mod. R); mais on trouve ainsi

$$2X(R)Y(R)X(m)Y(m) - [X(R)Y(m)]^2 - [Y(R)X(m)]^2 = -[X(R)Y(m) - Y(R)X(m)]^2$$

lonne que le carré de  $X$ 

qui ne donne que le carré de l'invariant linèaire déjà rencontré.

En employant toutes les équations (4), en vue d'obtenir un préinvariant de degré 3 par rapport aux exposants de m, on trouve le système linéaire

$$AX + CX + EY = 0$$
,  $BY + DX + FY = 0$ ,  $CY + 3GX = 0$ ,  $FX + 3HY = 0$ ,  $DX + EY = 0$ ,  $A \cdot YX + C(XY + X \cdot Y) + D \cdot YX + E \cdot Y^2 + 3G \cdot X^2 + P \cdot Y = 0$ ,  $B \cdot XY + D \cdot X + E \cdot XY + F(YX + X \cdot Y) + 3H \cdot Y^2 + Q \cdot X = 0$ 

avec X = X(R), XY = XY(R), etc. On trouve

$$A = aY - 3bX \cdot Y$$
,  $D = aY$ ,  $G = -bY^2$ ,  $H = -cX^2$   
 $B = -aX - 3cX \cdot Y$ ,  $E = -aX$ ,  $K = -2MX + (a - 3bX)(XY - YX)$   
 $C = 3bX \cdot Y$ ,  $F = 3cX \cdot Y$ ,  $L = -2NY + (a + 3cY)(XY - YX)$ .

où a. b. c. M. N restent arbitraires. Or, XY-YX n'étant pas un invariant de conjugaison de R, on devra prendre  $a - 3bX = \hat{0} = a + 3cY$ . donc  $a = 3X \cdot Y$ , b = Y, c = -X, et ceci conduit, après calcul, à l'invariant  $[X(R)Y(m) - Y(R)X(m)]^3$ . Le préinvariant de degré 3 n'existe donc, pas, de même qu'une syzygie de degré 3. En passant à la recherche d'un préinvariant de degré 4, on doit continuer le tableau (4) avec les invariants de contraction de degré 4, en y ajoutant XYXY, YXYX, X.YXY,  $\overline{XYX \cdot Y}$ ,  $\overline{XY^2}$ ,  $\overline{XY \cdot YX}$ ,  $\overline{YX^2}$ . Nous ne donnerons pas ici le détail des calculs et nous contenterons d'indiquer que, malgré le nombre plus grand des coefficients qui restent indéterminés, la présence de XY-YX empêche d'obtenir des préinvariants, sauf dans le cas de  $[X(R)Y(m)-Y(R)X(m)]^4$ qui est dépourvu d'intérêt. Aussi ne semble-t-il pas possible d'éviter XY--YX en passant à la recherche de préinvariants de degré > 4. D'ailleurs. nous verrons se répéter ce phénomène dans le cas de k générateurs. Les préinvariants n'existent pas pour un groupe présenté avec k générateurs et k-1 relations, mais ils existent si le nombre des relations est  $\leq k-2$ .

4. Groupe F de rang 3. On obtient un préinvariant du  $2^d$  degré en tenant compte de

$$\overline{XY} = Y(R)X(m), \ \overline{YZ} = Z(R)Y(m), \ \overline{ZX} = X(R)Z(m), \ \overline{YX} = X(R)Y(m)$$
(6) 
$$\overline{XY} - \overline{YX} = Y(R)X(m) - X(R)Y(m), \qquad \overline{ZY} = Y(R)Z(m)$$

$$\overline{YZ} - \overline{ZY} = Z(R)Y(m) - Y(R)Z(m), \ X(R)\overline{ZY} - Y(R)\overline{ZX} = 0$$

$$ZX - XZ = X(R)Z(m) - Z(R)X(m),$$

d'où

(7) 
$$X(R)(\overline{YZ} - \overline{ZY}) + Y(R)(\overline{ZX} - \overline{XZ}) + Z(R)(\overline{XY} - \overline{YX}) = 0.$$
  
On a donc le préinvariant

(8) 
$$P_{XYZ}(m; R) = X(R)[YZ(m) - ZY(m)] + Y(R)[ZX(m) - XZ(m)] + Z(R)[XY(m) - YX(m)].$$

Le reste est la différence des invariants de conjugaison

$$X(R)YZ(R) + Y(R)ZX(R) + Z(R)XY(R), X(R)ZY(R) +$$
  
  $+ Y(R)XZ(R) + Z(R)YX(R)$ 

Pour former un invariant du 3me degré, considérons

$$\overline{XYX} = XY(m)X(R) + X(m)YX(R), \quad \overline{YXY} = YX(m)Y(R) + Y(m)XY(R)$$

$$\overline{XYZ} = XY(m)Z(R) + X(m)YZ(R), \quad \overline{YXZ} = YX(m)Z(R) + Y(m)XZ(R)$$

$$Z(R)\overline{XYX} - X(R)\overline{XYZ} = [Z(R)YX(R) - X(R)YZ(R)]X(m) =$$

$$= [ZYX(R) - XYZ(R)]X(m).$$

En tenant compte de (6), on a

$$Y(R)[Z(R)\overline{XYX} - X(R)\overline{XYZ}] + [XYZ(R) - ZYX(R)]\overline{XY} = 0$$

mais, XYZ(R) - ZYX(R) n'étant pas un invariant de conjugaison, cette égalité ne conduit pas à un préinvariant. En passant au  $4^{me}$  degré, on conclut encore à l'inexistence d'un préinvariant.

5. Groupe de rang 4. On a les 4 préinvariants du 2d degré

$$P_{XYZ}(m; R) = X(R)[YZ(m) - ZY(m)] + Y(R)[ZX(m) - XZ(m)] + Z(R)[XY(m) - YX(m)]$$

$$P_{XYU}(m; R) = X(R)[YU(m) - UY(m)] + Y(R)[UX(m) - XU(m)] + U(R)[XY(m) - YX(m)]$$

$$P_{XZU}(m; R) = X(R)[ZU(m) - UZ(m)] + Z(R)[UX(m) - XU(m)] + U(R)[XZ(m) - ZX(m)]$$

$$P_{YZU}(m; R) = Y(R)[ZU(m) - UZ(m)] + Z(R)[UY(m) - YU(m)] + U(R)[YZ(m) - ZY(m)]$$

qui sont les préinvariants quadratiques des projections de m sur les générateurs pris 3 à 3. On a d'ailleurs

$$X(R)P_{YZU}(m; R) - Y(R)P_{XZU}(m; R) + Z(R)P_{XYU}(m; R) - U(R)P_{XYZ}(m; R) = 0.$$

Ensuite

$$Z(R)\overline{XU} - U(R)\overline{XZ} = 0$$
,  $Z(R)\overline{YU} - U(R)\overline{YZ} = 0$ 

mais les restes Z(R)XU(R)-U(R)XZ(R), Z(R)YU(R)-U(R)YZ(R) ne sont pas des invariants de conjugaison. On obtient un tel invariant en prenant la combinaison

$$Y(R)[Z(R)XU(R) - U(R)XZ(R)] - X(R)[Z(R)YU(R) - U(R)YZ(R)]$$

$$= Y(R)[ZXU(R) - UXZ(R)] - X(R)[ZYU(R) - UYZ(R)]$$

et l'on en déduit les préinvariants (l'indice supérieur donnant le degré par rapport aux exposants de m)

$$P_{1}^{2}(m; R) = X(R)[Z(R)YU(m) - U(R)YZ(m)] - Y(R)[Z(R)XU(m) - U(R)XZ(m)]$$

$$P_{2}^{2}(m; R) = X(R)[Y(R)ZU(m) - U(R)ZY(m)] - Z(R)[Y(R)XU(m) - U(R)XY(m)]$$

$$P_{3}^{2}(m; R) = X(R)[Y(R)UZ(m) - Z(R)UY(m)] - U(R)[Y(R)XZ(m) - Z(R)XY(m)]$$

$$P_{4}^{2}(m; R) = Y(R)[X(R)ZU(m) - U(R)ZX(m)] - Z(R)[X(R)YU(m) - U(R)YX(m)]$$

$$P_{5}^{2}(m; R) = Y(R)[X(R)UZ(m) - Z(R)UX(m)] - U(R)[X(R)YZ(m) - Z(R)YX(m)]$$

$$P_{6}^{2}(m; R) = Z(R)[X(R)UY(m) - Y(R)UX(m)] - U(R)[X(R)YZ(m) - Y(R)UX(m)] - U(R)[X(R)ZY(m) - Y(R)ZX(m)]$$

les 5 derniers résultant de  $P_1^2$  en permutant les lettres X, Y, Z, U et en remarquant que  $P_1^2$  reste inchangé au signe près par permutation de X et Y ou Z et U. On constate que les préinvariants (9) sont des combinaisons linéaires des précédents, mais la réciproque n'a pas lieu. Remarquons les formules

$$\begin{split} P_1^2(m\,;\,R) + P_6^2(m\,;\,R) &= [X(R)Y(m) - Y(R)X(m)] \cdot [Z(R)U(m) - U(R)Z(m)] \\ &- U(R)Z(m)] \\ P_2^2(m\,;\,R) + P_5^2(m\,;\,R) &= [X(R)Z(m) - Z(R)X(m)] \cdot [Y(R)U(m) - U(R)Y(m)] \\ &- U(R)Y(m)] \\ P_3^2(m\,;\,R) + P_4^2(m\,;\,R) &= [X(R)U(m) - U(R)X(m)] \cdot [Y(R)Z(m) - U(R)Y(m)] \\ &- Z(R)Y(m)] \\ \text{d'où } P_6^2(R\,;\,R) &= -P_1^2(R\,;\,R), \ P_5^2(R\,;\,R) &= -P_2^2(R\,;\,R), \ P_4^2(R\,;\,R) &= -P_2^2(R\,;\,R), \end{split}$$

Avec  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  on forme 2 invariants (mod. R) du second degré (par rapport aux exposants de m). Passons aux préinvariants du  $3^{me}$  degré.

Afin de simplifier l'écriture, nous conviendrons d'écrire X pour X(R), XY pour XY(R), etc., la notation X(m), XY(m), etc. restant inchangée pour m. On a

$$\overline{XYX} = XYX(mR) - XYX(m) - XYX = X \cdot XY(m) + YX \cdot X(m)$$

$$\overline{XYZ} = Z \cdot XY(m) + YZ \cdot X(m)$$

d'où

$$Z \cdot \overline{XYX} - X \cdot \overline{XYZ} = (Z \cdot YX - X \cdot YZ)X(m) = (ZYX - XYZ)X(m).$$

En permutant X et Z on a

$$Z \cdot \overline{ZYX} - X \cdot \overline{ZYZ} = (ZYX - XYZ)Z(m)$$

et en prenant une combinaison des précédentes

$$Z^{2} \cdot \overline{XYX} - X \cdot Z(\overline{XYZ} + \overline{ZYX}) + X^{2} \cdot \overline{ZYZ} = (ZYX - XYZ)[Z \cdot X(m) - X \cdot Z(m)].$$

En remplaçant ici Y par U

$$Z^{2} \cdot \overline{XUX} - X \cdot Z(\overline{XUZ} + \overline{ZUX}) + X^{2} \cdot \overline{ZUZ} = (ZUX - XUZ)[Z \cdot X(m) - X \cdot Z(m)]$$

d'où la combinaison

$$\begin{split} &\Lambda_2 = Z^2 \cdot U \cdot \overline{XYX} - X \cdot Z \cdot U(\overline{XYZ} + \overline{ZYX}) + X^2 \cdot U \cdot \overline{ZYZ} - \\ &- Y \cdot Z^2 \cdot \overline{XUX} + X \cdot Y \cdot Z(\overline{XUZ} + \overline{ZUX}) - X^2 \cdot Y \cdot \overline{ZUZ} = \\ &= \left[ U(ZYX - XYZ) - Y(ZUX - XUZ) \right] \cdot \left[ Z \cdot X(m) - X \cdot Z(m) \right] - \\ &- X \cdot Z(m) \right] = P_5^2(R; R) \left[ Z \cdot X(m) - X \cdot Z(m) \right]. \end{split}$$

Les coefficients sont ici des invariants de conjugaison, et il suffira d'éliminer la différence  $Z \cdot X(m) - X \cdot Z(m)$  pour arriver au but. En permutant dans cette équation Z et U, puis U et X, on a

$$\Lambda_{3} = U^{2} \cdot Z \cdot \overline{XYX} - X \cdot Z \cdot U(\overline{XYU} + \overline{UYX}) + X^{2} \cdot Z \cdot \overline{UYU} - Y \cdot U^{2} \cdot \overline{XZX} + \\ + X \cdot Y \cdot U(\overline{XZU} + \overline{UZX}) - X^{2} \cdot Y \cdot \overline{UZU} = [Z(UYX - XYU - \\ -Y(UZX - XZU)] \cdot [U \cdot X(m) - X \cdot U(m)] = P_{4}^{2}(R; R) [U \cdot X(m) - \\ - X \cdot U(m)]$$

$$\Lambda_{6} = Z^{2} \cdot X \cdot \overline{UYU} - X \cdot Z \cdot U(\overline{UYZ} + \overline{ZYU}) + U^{2} \cdot X \cdot \overline{ZYZ} - Y \cdot Z^{2} \cdot \overline{UXU} + \\ + Y \cdot Z \cdot U(\overline{UXZ} + \overline{ZXU}) - Y \cdot U^{2} \cdot \overline{ZXZ} = [X(ZYU - UYZ) - \\ -Y(ZXU - UXZ)] \cdot [Z \cdot U(m) - U \cdot Z(m)] = P_{1}^{2}(R; R) [Z \cdot U(m) - \\ - U \cdot Z(m)].$$

Enfin, en tenant compte de  $P_5^2=-P_2^2$ ,  $P_4^2=-P_3^2$ , la combinaison  $U\cdot P_3^2\cdot P_1^2\cdot \Lambda_2-Z\cdot P_1^2\cdot P_2^2\cdot \Lambda_3+X\cdot P_2^2\cdot P_3^2\cdot \Lambda_6$ 

fournit le préinvariant

(11) 
$$P_1^3(m; R) = X \cdot P_2^2 \cdot P_3^2 \cdot \Lambda_1(m; R) + U \cdot P_3^2 \cdot P_1^2 \cdot \Lambda_2(m; R) - Z \cdot P_1^2 \cdot P_2^2 \cdot \Lambda_3(m; R)$$

avec

$$\Lambda_{1}(m; R) = X^{2}[U \cdot YZY(m) - Z \cdot YUY(m)] - X \cdot Y[U\{XZY(m) + YZX(m)\}] - Z\{XUY(m) + YUX(m)\}] + Y^{2}[U \cdot XZX(m) - Z \cdot XUX(m)]$$

$$\Lambda_{2}(m; R) = X^{2}[U \cdot ZYZ(m) - Y \cdot ZUZ(m)] - X \cdot Z[U\{XYZ(m) + ZYX(m)\} - Y\{XUZ(m) + ZUX(m)\}] + Z^{2}[U \cdot XYX(m) - Y \cdot XUX(m)]$$

$$\begin{split} \Lambda_3(m\;;\;R) &= X^2[Z\cdot UYU(m)-Y\cdot UZU(m)]-X\cdot U[Z\{XYU(m)+\\ &+UYX(m)\}-Y\{XZU(m)+UZX(m)\}]+U^2[Z\cdot XYX(m)-\\ &-Y\cdot XZX(m)]. \end{split}$$

En permutant encore, posonos

$$\begin{array}{ll} \Lambda_4(m\;;\;R) = Y^2[U\cdot ZXZ(m) - X\cdot ZUZ(m)] - Y\cdot Z[U\{YXZ(m) + \\ + ZXY(m)\} - X\{YUZ(m) + ZUY(m)\}] + Z^2[U\cdot YXY(m) - \\ & - X\cdot YUY(m)] \end{array}$$

$$\Lambda_5(m; R) = Y^2[Z \cdot UXU(m) - X \cdot UZU(m)] - Y \cdot U[Z\{YXU(m) + UXY(m)\}] - X\{YZU(m) + UZY(m)\}] + U^2[Z \cdot YXY(m) - X \cdot YZY(m)]$$

$$\begin{split} \Lambda_{6}(m; R) &= Z^{2}[X \cdot UYU(m) - Y \cdot UXU(m)] - Z \cdot U[X\{UYZ(m) + \\ &+ ZYU(m)\} - Y\{UXZ(m) + ZXU(m)\}] + U^{2}[X \cdot ZYZ(m) - \\ &- Y \cdot ZXZ(m)]. \end{split}$$

Les 24 permutations des majuscules entraînent la permutation de ces 6 expressions  $\Lambda_i$ , et l'on a encore les préinvariants

$$P_{2}^{3}(m; R) = X \cdot P_{2}^{2} \cdot P_{3}^{2} \cdot \Lambda_{6}(m; R) - U \cdot P_{1}^{2} \cdot P_{2}^{2} \cdot \Lambda_{4}(m; R) + Z \cdot P_{3}^{2} \cdot P_{1}^{2} \cdot \Lambda_{5}(m; R)$$

(11') 
$$P_3^3(m; R) = X \cdot P_3^2 \cdot P_1^2 \cdot \Lambda_5(m; R) + Y \cdot P_1^2 \cdot P_2^2 \cdot \Lambda_3(m; R) - U \cdot P_2^2 \cdot P_3^2 \cdot \Lambda_1(m; R)$$

$$P_4^3(m; R) = X \cdot P_1^2 \cdot P_2^2 \cdot \Lambda_4(m; R) - Z \cdot P_2^2 \cdot P_3^2 \cdot \Lambda_1(m; R) + P_3^2 \cdot P_1^2 \cdot \Lambda_2(m; R).$$

Ces 4 préinvariants (11, 11') sont indépendents. Ces 4 preinvailants (22, 2) à obtenir un préinvariant du 4<sup>me</sup> degré. Nous n'avons pas réussi à obtenir un préinvariant du 4<sup>me</sup> degré. Nous n'avons pas reale. Aussi nous semble-t-il que, d'une manière générale, dans le cas d'un relation. il n'existe que des préires d'un Aussi nous semble-t-11 que, d'un fexiste que des préinvariants groupe à k générateurs et une relation, il n'existe que des préinvariants groupe à k générateurs et une relation, il n'existe que des préinvariants de degrés  $d \le k-1$ , leur nombre étant  $\binom{k}{d}$ .

6. Cas de 2 relations. Soient R et S les deux relateurs. Alors X(m), Y(m), Z(m), U(m) sont des préinvariants, car

$$X(m)$$
,  $U(m)$  sont des prenvers  
 $X(\mu R \nu) = X(\mu \nu) + X(R)$ ,  $Y(\mu R \nu) = Y(\mu \nu) + Y(R)$ , ...  
 $X(\mu S \nu) = X(\mu \nu) + X(S)$ ,  $Y(\mu S \nu) = Y(\mu \nu) + Y(S)$ , ...

On a donc les invariants linéaires (par rapport aux invariants de contraction de m)

contraction de m)
$$I_{XYZ}(m; R, S) = \begin{vmatrix} X(m) & X(R) & X(S) \\ Y(m) & Y(R) & Y(S) \\ Z(m) & Z(R) & Z(S) \end{vmatrix}, I_{XTU}(m; R, S) = \begin{vmatrix} X(m) & X(R) & X(S) \\ Y(m) & Y(R) & Y(S) \\ U(m) & U(R) & U(S) \end{vmatrix}$$

$$I_{XZU}(m; R, S) = \begin{vmatrix} X(m) & X(R) & X(S) \\ Z(m) & Z(R) & Z(S) \\ U(m) & U(R) & U(S) \end{vmatrix}, I_{YZU}(m; R, S) = \begin{vmatrix} Y(m) & Y(R) & Y(S) \\ Z(m) & Z(R) & Z(S) \\ U(m) & U(R) & U(S) \end{vmatrix}$$

qui sont liés par

$$X(R)I_{YZU} + Y(R)I_{XZU} + Z(R)I_{XYU} + U(R)I_{XYZ} = 0.$$
  
$$X(S)I_{YZU} + Y(S)I_{XZU} + Z(S)I_{XYU} + U(S)I_{XYZ} = 0.$$

Pour obtenir des préinvariants du 2<sup>d</sup> degré, nous devrons former des combinaisons linéaires convenables des  $P_i^2(m; R)$ ,  $i = 1, 2, \ldots, 6$ . En posant

$$[XY] = \begin{vmatrix} X(R) & Y(R) \\ X(S) & Y(S) \end{vmatrix}, \quad [XZ] = \begin{vmatrix} X(R) & Z(R) \\ X(S) & Z(S) \end{vmatrix}, \quad \text{etc.}$$

on trouve

$$\begin{split} P_1^2(mS\,;\,R) &- P_1^2(m\,;\,R) - P_1^2(S\,;\,R) = [ZU] \cdot [X(R)Y(m) - Y(R)X(m)] \\ P_2^2(mS\,;\,R) &- P_2^2(m\,;\,R) - P_2^2(S\,;\,R) = [YU] \cdot [X(R)Z(m) - Z(R)X(m)] \\ P_3^2(mS\,;\,R) &- P_3^2(m\,;\,R) - P_3^2(S\,;\,R) = [YZ] \cdot [X(R)U(m) - U(R)X(m)] \\ P_4^2(mS\,;\,R) &- P_4^2(m\,;\,R) - P_4^2(S\,;\,R) = [XU] \cdot [Y(R)Z(m) - Z(R)Y(m)] \\ P_5^2(mS\,;\,R) &- P_5^2(m\,;\,R) - P_5^2(S\,;\,R) = [XZ] \cdot [Y(R)U(m) - U(R)Y(m)] \\ P_6^2(mS\,;\,R) &- P_6^2(m\,;\,R) - P_6^2(S\,;\,R) = [XY] \cdot [Z(R)U(m) - U(R)Z(m)] \end{split}$$

ce qui conduit aux expressions

$$Q_3^2(m; R, S) = U[XZ][YZ]P_1^2(m; R) - Y[XZ][ZU]P_3^2(m; R) + X[YZ][ZU]P_5^2[m; R)$$

$$(12) \quad Q_3^2(m; R, S) = U[XY][YZ]P_2^2(m; R) - Z[XY][YU]P_3^2(m; R) + X[YZ][YZ]P_2^2(m; R) + Z[XY][YZ]P_3^2(m; R) + Z[XZ][YZ]P_3^2(m; R) + Z[$$

$$Q_1^2(m; R, S) = U[XU][XY]P_4^2(m; R) - Z[XU][XY]P_5^2(m; R) + Y[XU][XZ]P_6^2(m; R)$$

$$Q_4^2(m; R, S) = Z[XU][YU]P_1^2(m; R) - Y[XU][ZU]P_2^2(m; R) + X[YU][ZU]P_4^2(m; R)$$

telles que  $Q_i^2(mS; R, S) - Q_i^2(m; R, S) - Q_i^2(S; R, S) = 0$ , i = 1, 2, 3, 4. On a ici  $X = X(R), \ldots, U = U(R)$ . Mais les restes n'étant pas encore des invariants de conjugaison, nous devons faire une nouvelle combinaison linéaire des Qi, de manière à obtenir cette propriété du reste. On constate que, par conjugaison de S avec a, b, c, d, les  $P_i^2(S, R)$ augmentent des termes ci-dessous:

-	$a^{-1}Sa$	$b^{-1}Sb$	$c^{-1}Sc$	$d^{-1}Sd$	
$P_1^2(S; R)$	Y[ZU]	X[UZ]	U[YX]	Z[XY]	
$P_2^2(S;R)$	Z[YU]	U[ZX]	X[UY]	Y[XZ]	
$P_3^2(S;R)$	U[YZ]	Z[UX]	Y[XU]	X[ZY]	
$P_4^2(S;R)$	U[ZY]	Z[XU]	Y[UX]	X[YZ]	
$P_{5}^{2}[S;R)$	Z[UY]	[UXZ]	X[YU]	Y[ZX]	
$P_6^2(S; R)$	Y[UZ]	X[ZU]	U[XY]	Z[YX]	

donc, en tenant compte de l'indetité

$$X^{2}[YZ][ZU][UY] - Y^{2}[ZU][UX][XZ] + Z^{2}[UX][XY][YU] - U^{2}[XY][YZ][ZX] = 0,$$

on trouve pour les Qi les accroissements correspondents

$$Q_1^2(S; R, S) \quad X^2[YZ][ZU][UY], \quad -X \cdot Y[ZU][UX][XZ],$$

$$X \cdot Z[UX][XY][YU], \quad -X \cdot U[XY][YZ][ZX]$$

$$Q_2^2(S; R, S) \quad X \cdot Y[YZ][ZU][UY], \quad -Y^2[ZU][UX][XZ],$$
  
 $Y \cdot Z[UX][XY][YU], \quad -Y \cdot U[XY][YZ][ZX]$ 

$$Q_3^2(S; R, S) \quad X \cdot Z[YZ][ZU][UY], \quad -Y \cdot Z[ZU][UX][XZ],$$
  
 $Z^2[UX][XY][YU], \quad -Z \cdot U[XY][YZ][ZX]$ 

En multipliant par les indéterminées A, B, C, D et en exprimant  $\frac{1}{100}$  do  $\frac{1}{100}$  do  $\frac{1}{100}$  de  $\frac{1}{100}$  est nul pour En multipliant par les macroissement de  $AQ_1^2 + BQ_2^2 + CQ_3^2 + DQ_4^2$  est nul pour chaque que l'accroissement de AX + BY + CZ + DU = 0, d'où les trois que l'accroissement de AX + BY + CZ + DU = 0, d'où les trois préinconjugaison, on trouve AX + BY + CZ + DU = 0, d'où les trois préinconjugaison, on trouve AX + BY + CZ + DU = 0, d'où les trois préinconjugaison, on trouve AX + BY + CZ + DU = 0, d'où les trois préinconjugaison, on trouve AX + BY + CZ + DU = 0, d'où les trois préinconjugaison, on trouve AX + BY + CZ + DU = 0, d'où les trois préinconjugaison, on trouve AX + BY + CZ + DU = 0, d'où les trois préinconjugaison, on trouve AX + BY + CZ + DU = 0, d'où les trois préinconjugaison, on trouve AX + BY + CZ + DU = 0, d'où les trois préinconjugaison, on trouve AX + BY + CZ + DU = 0, d'où les trois préinconjugaison, on trouve AX + BY + CZ + DU = 0, d'où les trois préinconjugaison, on trouve AX + BY + CZ + DU = 0, d'où les trois préinconjugaison, on trouve AX + BY + CZ + DU = 0, d'où les trois préinconjugaison. variants

variants
$$\begin{array}{lll}
\text{(13)} & Y \cdot Q_1^2 - X \cdot Q_2^2, & Z \cdot Q_2^2 - Y \cdot Q_3^2, & U \cdot Q_3^2 - Z \cdot Q_4^2.
\end{array}$$

On en déduit deux invariants quadratiques mod(R, S). On en deduit de la précédents exemples suffiront comme une indi-Nous croyons que les précédents exemples suffiront comme une indinous croyons que de ces invariants polynomiaux dont le nombre est cation sur le calcul de ces invariants arithmétiques cation sur le calcul de sur les invariants arithmétiques existent et assez restreint. Mais, là aussi, les invariants arithmétiques existent et sont plus nombreux.

Revenons au cas d'un seul relateur R, avec les notations de I.1. donc  $X(m) = X_1(m)$ ,  $Y(m) = Y_1(m)$ ,  $XY(m) = X_2(m)$ ,  $YX(m) = Y_2(m)$ ,  $XYX(m) = X_3(m), \ldots$ 

7. Invariants arithmétiques. En partant d'un invariant de contraction  $X_k(m)$  ou  $Y_k(m)$ , essayons de former des invariants d'insertion pour le mot m en employant des fonctions arithmétiques élémentaires. En posant  $m = \mu v$ ,  $m' = \mu R v = m \cdot v^{-1} R v$ , on a  $X_1(m') = X_1(m) + X_1(R)$ .  $Y_1(m') = Y_1(m) + Y_1(R)$  d'où les invariants d'insertion

(14) 
$$\mathcal{Q}(X_1(m)/X_1(R)), \qquad \mathcal{Q}(Y_1(m)/Y_1(R)).$$

On a ensuite

$$\begin{array}{l} X_2(m') - X_2(m) = X_1(m) Y_1(\mathsf{v}^{-1}R\mathsf{v}) + X_2(\mathsf{v}^{-1}R\mathsf{v}) = X_1(m) Y_1(R) + \\ + X_2(R) + X_1(R) Y_1(\mathsf{v}) - Y_1(R) X_1(\mathsf{v}). \end{array}$$

Afin d'obtenir un invariant d'insertion dérivé de X2(m), on devra diviser le second membre par un nombre convenable, de manière que l'expression obtenue soit un entier (reste de la division) indépendent des valeurs de  $X_1(v)$  et  $Y_1(v)$ . Ainsi, en posant  $\delta_2(R) = (X_1(R), Y_1(R), X_2(R))$ ,

(15) 
$$\mathcal{Q}(X_2(m)/\delta_2(m)), \quad \mathcal{Q}(Y_2(m)/\delta_2(R))$$

sont des invariants d'insertion, en remarquant que

$$(X_1(R), Y_1(R), Y_2(R)) = (X_1(R), Y_1(R), X_1(R) \cdot Y_1(R) - X_2(R)) = \delta_2(R).$$
 Ensuite

$$\begin{split} X_3(m') - X_3(m) &= X_2(m) X_1(R) + X_1(m) Y_2(\mathsf{v}^{-1} R \mathsf{v}) + X_3(\mathsf{v}^{-1} R \mathsf{v}) = \\ &= X_2(m) X_1(R) + X_1(m) [Y_2(R) - X_1(R) Y_1(\mathsf{v}) + \\ &+ Y_1(R) X_1(\mathsf{v})] + X_3(R) + [X_2(R) - Y_2(R)] X_1(\mathsf{v}) + \\ &+ 2 X_1(R) Y_2(\mathsf{v}) - Y_1(R) [X_1(\mathsf{v})]^3 = \\ &= a + bs + ct + ds^2 ] + eu \end{split}$$

$$a = X_2(m)X_1(R) + X_1(m)Y_2(R) + X_3(R), b = X_2(R) - Y_2(R) + X_1(m)Y_1(R),$$
  
 $c = -X_1(m)X_1(R) d = -Y_1(R), e = 2X_1(R); s = X_1(v), t = Y_1(v), u = Y_2(v).$ 

Appelons "diviseur maximum" d'un polynôme à coefficients entiers le plus grand entier positif qui divise P(x, y, z, ...) quelles que soient les valeurs entières des variables. Le diviseur maximum du polynôme  $X_3(m') - X_3(m)$  en s, t, u est  $\delta = (a, c, c, b + d, 2d)$  et1) l'on a

$$\begin{cases} \delta(m, R) = (X_2(m)X_1(R) + X_1(m)Y_2(R) + X_3(R), X_1(m)X_1(R), \\ 2X_1(R), X_2(R) - Y_2(R) + [X_1(m) - 1]Y_1(R), 2Y_1(R)) = \\ = (2X_1(R), 2Y_1(R), X_1(m)X_1(R), X_2(R) - Y_2(R) + \\ + [X_1(m) - 1]Y_1(R), X_2(m)X_1(R)] + X_1(m)Y_2(R) + X_3(R)). \end{cases}$$

On obtient un invariant d'insertion de m si

$$\mathcal{Q}(X_3(m')/\delta(m', R))$$
 et  $\mathcal{Q}(X_3(m)/\delta(m, R))$ 

sont égaux, ce qui exige  $\delta(m', R) = \delta(m, R)$ . Or, cette égalité n'a pas lieu en général;  $\delta(m, R)$  n'est pas un invariant d'insertion de m, mais il admet un diviseur δ<sub>3</sub>(m, R) qui possède cette propriété. Pour l'obtenir, il suffit d'ajouter entre les parenthèses de nouveaux éléments, ceux qui correspondent aux accroissements des éléments de  $\delta(m, R)$  après remplacement de m par m'. On trouve ainsi

$$\delta^*(m, R) = (2X_1(R), 2Y_1(R), X_1(m)X_1(R), X_2(R) - Y_2(R) + [X_1(m) - 1]Y_1(R), X_2(m)X_1(R) + X_1(m)Y_2(R) + X_3(R), [X_1R)]^2, X_1(R)Y_1(R)).$$

Au lieu des trois termes ajoutés à la fin de  $\delta(m, R)$ , il suffit d'en ajouter un seul:  $X_1(R)$ . On trouve alors

$$\delta_3(m, R) = (X_1(R), 2Y_1(R), X_2(R) - Y_2(R) + [X_1(m) - 1]Y_1(R), X_1(m)Y_2(R) + X_3(R))$$

et

(16) 
$$\mathcal{R}(X_3(m)/\delta_3(m, R)), \qquad \mathcal{R}(Y_3(m)/\delta_3'(m, R))$$

qui sont des invariants d'insertion pour le mot m;  $\delta$  résulte de  $\delta_3$  en permutant les majuscules. On a  $\delta_3(m, R^{-1}) = \delta_3(m, R)$ , car  $X_1(m)X_2(R)$ —  $-X_3(R) = X_1(m)X_1(R)Y_1(R) - X_1(m)Y_2(R) - X_3(R).$ 

Remarquons qu'il serait plus simple de choisir le dénominateur indépendent du mot m, en prenant par exemple

$$\mathcal{R}(X_3(m)/(X_1(R), Y_1(R), X_2(R), Y_2(R), X_3(R))$$

et en général

$$\mathcal{Q}(X_n(m)/(X_1(R), Y_1(R), X_2(R), Y_2(R), \dots, X_{n-1}(R), Y_{n-1}(R), X_n(R))).$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Pour une étude du diviseur maximum d'un polynôme j'ai reçu l'aide de mon collègue le prof. F. Rado.

et d'une manière générale

$$\delta_{n}(m; R_{1}, R_{2}, \ldots, R_{q}) = (\delta_{n}(m; R_{1}), \delta_{n}(m; R_{2}), \ldots, \delta_{n}(m; R_{q})),$$

$$r_{n} = \mathcal{R}(X_{n}(m)/\delta_{n}(m; R_{1}, R_{2}, \ldots, R_{q})), r'_{n} = \mathcal{R}(Y_{n}(m)/\delta'_{n}(m; R_{1}, R_{2}, \ldots, R_{q})).$$

8. Invariants logarithmiques. Pour l'étude des automorphismes d'un groupe, il est avantageux d'employer une suite d'invariants de contraction qui jouissent d'une propriété des logarithmes. Soit

$$m = a^{x_1}b^{y_1}a^{x_2}b^{y_2}\ldots a^{x_n}b^{y_n}.$$

Nous construirons une suite complète d'invariants de contraction  $\xi_i(m)$ ,  $\eta_i(m)$ ,  $i = 1, 2, \ldots$  telle que l'on ait

(18) 
$$\xi_i(m^k) = k\xi_i(m), \ \eta_i(m^k) = k\eta_i(m), \ k \in \mathbb{Z}, \ i = 1, 2, \ldots$$

On a d'abord

$$X_1(m^k) = kX_1(m), Y_1(m^k) = kY_1(m), \text{ donc } \xi_1(m) = X_1(m), \eta_1(m) = Y_1(m).$$

Ensuite

$$X_{2}(m^{k}) = X_{2}(m^{k-1} \cdot m) = X_{2}(m^{k-1}) + (k-1)X_{1}(m)Y_{1}(m) + X_{2}(m)$$

$$X_{2}(m^{k-1}) = X_{2}(m^{k-2}) + (k-2)X_{1}(m)Y_{1}(m) + X_{2}(m)$$

$$X_2(m^2) = X_2(m) + X_1(m)Y_1(m) + X_2(m)$$

d'où

$$X_{2}(m^{k}) = kX_{2}(m) + {k \choose 2} X_{1}(m) Y_{1}(m)$$

Or,

$$\frac{1}{2} X_1(m^k) Y_1(m^k) = \frac{h^2}{2} X_1(m) Y_1(m)$$

done

$$X_{2}(m^{k}) - \frac{1}{2} X_{1}(m^{k}) Y_{1}^{k}(m) = k \left[ X_{2}(m) - \frac{1}{2} X_{1}(m) Y_{1}(m) \right]$$
  
$$\xi_{2}(m) = 2X_{2}(m) - X_{1}(m) Y_{1}(m) = X_{2}(m) - Y_{2}(m).$$

On trouve d'une manière analogue

$$\begin{array}{l} \eta_2(m) = 2Y_2(m) - X_1(m)Y_1(m) = -\xi_2(m) \\ \xi_3(m) = 6X_3(m) - X_1^2(m)Y_1(m), \ \eta_3(m) = 6Y_3(m) - X_1(m)Y_1^2(m) \\ \xi_4(m) = 6[X_4(m) - Y_4(m)] - X_1(m)Y_1(m)[X_2(m) - Y_2(m)], \ \eta_4(m) = -\eta_4(m). \end{array}$$

Afin d'obtenir l'expression générale de ces invariants, nous sommes conduits à considérér la "scission" du symbole X<sub>n</sub>(ou Y<sub>n</sub>) d'un invariant de contraction. Dans le cas d'un groupe libre de rang 2, nous avons utilisé les deux notations  $X_n(m)$  et XYXYX ... (m) avec la même sig-

L'inconvénient serait alors que si deux termes du dénominateur étaient 48

L'inconvément serant alors que réduirait à 1, et l'invariant serait nul premiers entre eux, celui-ci se réduirait à 1, et l'invariant serait nul premiers entre eux, ne conservant donc aucune trace de la roll man ne conservant donc aucune trace de la roll nul premiers entre eux, ceiui-ci servant donc aucune trace de ce mot quel que soit le mot m, ne conservant donc aucune trace de ce mot quel que soit le mot m, ne conservons  $X_1(m)$  dans  $\delta$ . quel que soit le mot m, il conservons  $X_1(m)$  dans  $\delta_3$ . C'est le motif pour lequel nous conservons  $X_1(m)$  dans  $\delta_3$ .

En passant à  $X_4(m)$ , on a

 $s = X_1(v), \quad t = Y_1(v), \quad u = Y_2(v), \quad v = Y_3(v) + Y_2(v)Y_1(v),$ avec  $w = X_2(v) + X_2(v)X_1(v).$ 

On trouve alors le diviseur maximum (qui n'est pas un invariant de conjugaison)

$$\delta(m, R) = (X_1(R), Y_1(R), 2X_2(R), X_3(R), Y_3(R), X_2(m)X_2(R) + X_4(R)).$$

Si l'on forme  $\delta(m', R)$ , on constate que l'accroissement du dernier terme se réduit à  $X_2^2(R)$ . On prendra donc

 $\delta_4(m;R) = (X_1(R), Y_1(R), 2X_2(R), X_2(R), X_3(R), Y_3(R), Y_4(R) + X_4(R))$ qui est un invariant d'insertion, de même que

(17) 
$$r_4(m; R) = \mathcal{Q}(X_4(m)/\delta_4(m; R)).$$

On obtient de même

$$r'_{4}(m; R) = \mathcal{R}(Y_{4}(m)/\delta'_{4}(m; R))$$

où  $\delta_4'(m, R)$  résulte de  $\delta_4(m, R)$  par permutation des majuscules.

D'une manière analogue, on fait correspondre à chaque  $X_n(m)$  ou  $Y_n(m)$ deux invariants d'insertion:  $\delta_n(m; R)$ ,  $r_n(m; R)$  et  $\bar{\delta}'_n(m; R)$ ,  $r'_n(m; R)$ . Le problème de la complétitude de ce système revient à chercher si la connaîssance de ces valeurs pour  $n = 1, 2, \ldots$ , permet de déterminer un mot réduit  $\overline{m}$  du mot m.

Dans le cas de plusieurs relateurs, la généralisation est immédiate. En prenant le cas de deux relateurs R et S, on aura

$$\begin{array}{l} \delta_2(R,\,S) = (X_1(R),\,Y_1(R),\,X_2(R),\,X_1(S),\,Y_1(S),\,X_2(S)) = (\delta_2(R),\,\delta_2(S)),\\ r_2(m\,;\,R,\,S) = \mathcal{Q}(X_2(m)/\delta_2(R,\,S)),\,r_2'(m\,;\,R,\,S) = \mathcal{Q}(Y_2(m)/\delta_2(R,\,S))\\ \delta_3(m\,;\,R,\,S) = (\delta_3(m\,;\,R),\,\delta_3(m\,;\,S)),\,r_3 = \mathcal{Q}(X_3(m)/\delta_3(m\,;\,R,\,S)),\\ r_3' = \mathcal{Q}(Y_3(m)/\delta_3'(m\,;\,R,\,S)),\,\,\text{etc.} \end{array}$$

4 - Mathematica 1/1975 - Tome 17 (40)

nification, dans le second symbole, le nombre des majuscules étant égal nification, dans le second symbolo, le second symbo à n. Une scission de ce de la montaire de points entre les majuscules, par ex.  $XYXYX \rightarrow XY \cdot X \cdot YX$ , ou  $X \cdot YXYX$  de points entre les majuscules, par ex.  $XYXYX \rightarrow XY \cdot X \cdot YX$ de points entre les majuscules, par sur mot m, une scission de  $X_n$  conduit Le symbole  $X_n(m)$  étant appliqué au mot m, une scission de  $X_n$  conduit Le symbole  $A_n(m)$  etant approprie de l'invariant  $X_n(m)$ , chaque "fragment" à une scission correspondente de l'invariant  $X_n(m)$ , chaque "fragment" à une scission corresponde au même mot m, et les points entre obtenu par scission étant appliqué au même mot m, et les points entre obtenu par scission centre les fragments représentant l'opération de multiplication d'entiers. Ainsi, on a dans les cas envisagés

$$XYXYX(m) \rightarrow XY(m) \cdot X(m) \cdot YX(m)$$
 ou  $X(m) \cdot YXYX(m)$ .

Si le nombre des points intercalés dans  $X_n$  est  $s \le n-1$ , on a  $\binom{n-1}{s}$ manières différentes de placer ces points entre les majuscules. Nous désignerons par  $X_n(m|s)$  la somme de tous les produits ainsi obtenus. Par ex.

$$X_{5}(m|3) = X(m) \cdot Y(m) \cdot X(m) \cdot YX(m) + X(m) \cdot Y(m) \cdot XY(m) \cdot X(m) + X(m) \cdot YX(m) \cdot Y(m) \cdot X(m) + XY(m) \cdot Y(m) \cdot X(m) \cdot Y(m) \cdot X(m).$$

Cherchons maintenant l'expression de  $X_n(m^k)$ , k > 1. En tenant compte de la définition de  $X_n(m)$ , on obtient

$$X_{2}(m^{k}) = kX_{2}(m) + {k \choose 2} X_{2}(m|1)$$

$$X_{3}(m^{k}) = kX_{3}(m) + {k \choose 2} X_{3}(m|1) + {k \choose 3} X_{3}(m|2)$$

$$\vdots$$

$$X_{n}(m^{k}) = kX_{n}(m) + {k \choose 2} X_{n}(m|1) + {k \choose 3} X_{n}(m|2) + \dots + {k \choose s+1} X_{n}(m|s) + \dots + {k \choose n} X_{n}(m|n-1)$$

en remarquant que pour chaque scission avec s points il y a  $\binom{k}{s+1}$  manières de choisir les facteurs m du produit  $m^k$  dans lesquels se trouvent les exposants  $x_i$ ,  $y_i$  servant à calculer  $X_n$ . La dernière formule peut encore être écrite

$$X_{n}(m^{k}) = k \left[ X_{n}(m) - \frac{1}{2} X_{n}(m|1) + \frac{1}{3} X(m|2) - \frac{1}{4} X(m|3) + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} X_{n}(m|n-1) \right] + \\ + k^{2} \left[ \frac{1}{2} X_{n}(m|1) - \frac{1}{2} X_{n}(m|2) + \frac{11}{24} X_{n}(m|3) - \cdots \right] + \\ + k^{3} \left[ \frac{1}{2} X_{n}(m|2) - \frac{1}{4} X_{n}(m|3) + \cdots \right] + \cdots$$

Or, la première expression entre crochets au second membre est un invariant logarithmique associé à  $X_n$ , car, en remplaçant m par  $m^p$ , p>1,

$$\begin{split} X_{n}(m^{kp}) &= k \left[ X_{n}(m^{p}) - \frac{1}{2} X_{n}(m^{p}|1) + \frac{1}{3} X_{n}(m^{p}|2) + \ldots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^{n-1}}{n} X_{n}(m^{p}|n-1) \right] + \\ &\quad \left. + k^{2} \left[ \frac{1}{2} X_{n}(m^{p}|1) - \frac{1}{2} X_{n}(m^{p}|2) + \ldots \right] + \ldots \\ &\quad \left. = kp \left| X_{n}(m) - \frac{1}{2} X_{n}(m|1) + \frac{1}{3} X_{n}(m|2) - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} X_{n}(m|n-1) \right| + \\ &\quad \left. + k^{2} p^{2} \left[ \frac{1}{2} X_{n}(m|1) - \frac{1}{2} X_{n}(m|2) + \ldots \right] + \ldots \end{split}$$

et, vu l'arbitraire du choix des entiers k et p, il en résulte

$$X_{n}(m^{p}) - \frac{1}{2} X_{n}(m^{p}|1) + \frac{1}{3} X_{n}(m^{p}|2) - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} X_{n}(m^{p}|n-1) =$$

$$= p \left[ X_{n}(m) - \frac{1}{2} X_{n}(m|1) + \frac{1}{3} X_{n}(m|2) - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} X_{n}(m|n-1) \right].$$

Le raisonnement est appliquable sans modification dans le cas d'un groupe libre à plusieurs générateurs. Par exemple, le symbole XUZY engendre l'invariant logarithmique

$$\xi$$
ν $\zeta$ η $(m) = XUZY(m) - \frac{1}{2}XUZY(m|1) + \frac{1}{3}XUZY(m|2) - \dots$ 

la scission étant appliquée au symbole XUZY, etc.

L'identification des autres puissances de k dans l'équation plus haut met en évidence d'autres expressions remarquables que nous n'envisagerons pas ici. Afin d'avoir des invariants logarithmiques à coefficients entiers, nous multiplierons l'expression précédente par  $\bar{D}_n = [1, 2, ..., n] =$ = plus petit multiple commun des entiers 1, 2, ..., n. En développant ensuite les expressions  $X_n(m|s)$ , nous aurons l'occasion de les simplifier par application des syzygies, et cela pourra faire apparaître des facteurs communs aux nouveaux coefficients de l'invariant logarithmique. Nous prendrons donc

$$\xi_n(m) = D_n^* \left[ X_n(m) - \frac{1}{2} X_n(m|1) + \frac{1}{3} X_n(m|2) - \dots + \frac{(-1)^s}{s+1} X(m|s) + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} X_n(m|n-1) \right]$$
(19)

où  $D_n^*$  représente  $D_n$  dans lequel on aura supprimé les facteurs numériques communs apparus entre crochets après application des syzygies. Ainsi,  $X_5(m)$  conduit à

$$D_{5}\left[X_{5}(m) - \frac{1}{2}X_{5}(m|1) + \frac{1}{3}X_{5}(m|2) - \frac{1}{4}X_{5}(m|3) + \frac{1}{5}X_{5}(m|4)\right]$$

où  $D_5=60$ . Mais après application des syzygies, le facteur 2 apparaît dans le crochet, et l'on peut prendre  $D_5^*=30$ , d'où

$$\xi_5(m) = 30X_5(m) - 5X_1(m)[X_4(m) + Y_4(m) + X_1(m)Y_1(m)] + X_1^3(m)Y_1^3(m).$$

On voit donc que à chaque  $X_n(m)$  se trouve associé un invariant logarithmique  $\xi_n(m)$ . Par permutation des majuscules X, Y on forme immédiatement  $\eta_n(m)$ , associé à  $Y_n(m)$ .

Nous venons de supposer k > 1. Or, en remplaçant m par  $m^{-1}$  dans les formules précédentes, on a

$$\xi_{2q+1}(m^{-k}) = -k\xi_{2q+1}(m), \ \xi_{2q}(m^{-k}) = \eta_{2q}(m^k) = k\eta_{2q}(m).$$

D'autre part, en appliquant les syzygies, on trouve  $\xi_{2q}(m) + \eta_{2q}(m) = 0$ , donc on a en général

$$\xi_n(m^k) = k\xi_n(m), \quad \eta_n(m^k) = k\eta_n(m), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On voit que la donnée des  $\xi_n(m)$ ,  $\eta_n(m)$ , pour  $n=1, 2, \ldots$  permet, réciproquement, de calculer les  $X_n(m)$ ,  $Y_n(m)$ , pourvu que chaque  $\xi_n(m)$ ,  $\eta_n(m)$  soit divisible par  $D_n^*$  et que  $\xi_{2q}(m) + \eta_{2q}(m) = 0$  soit vérifiée pour  $q=1, 2, \ldots$ , cette égalité étant equivalente aux syzygies. On doit remarquer encore que, contrairement au fait que le nombre des  $X_n(m)$ ,  $Y_n(m)$  non-nuls est fini pour chaque mot m, les  $\xi_n(m)$ ,  $\eta_n(m)$  forment une suite infinie, quoique, à partir d'un n suffisamment grand ces invariants cessent d'être linéairement distincts.

Comme première application, cherchons la condition pour que m soit une puissance d'un autre mot; supposons donc  $m=\mu^k$ ,  $\mu\in F$ , |k|>1. On a  $\xi_i(m)=k\xi_i(\mu)$ ,  $\eta_i(m)=k\eta_i(\mu)$ , donc nécéssairement

$$(\xi_1(m), \eta_1(m), \xi_2(m), \xi_3(m), \eta_3(m), \xi_4(m), \ldots,) \equiv 0 \pmod{k}.$$

Si, réciproquement, cette condition est satisfaite, posons

$$\xi_i' = \frac{1}{k} \, \xi_i(m), \quad \eta_i' = \frac{1}{k} \, \eta_i(m).$$

Les syzygies  $\xi_{2q}(m) + \eta_{2q}(m) = 0$  étant vérifiées, on a aussi  $\xi'_{2q} + \eta'_{2q} = 0$ ,  $q = 1, 2, \ldots$  Il existe donc un mot  $\mu$  tel que  $\xi_i(\mu) = \xi'_i$ ,  $\eta_i(\mu) = \eta'_i$ .

Appliquons maintenant les invariants logarithmiques à l'étude des automorphismes d'un groupe libre. a et b étant les générateurs du groupe F, considérons deux mots

$$A = a^{\alpha_1}b^{\beta_1}a^{\alpha_2}b^{\beta_2} \dots a^{\alpha_p}b^{\beta_p}, \quad B = a^{\alpha'_1}b^{\beta'_2}a^{\alpha'_2}b^{\beta'_2} \dots a^{\alpha'_q}b^{\beta'_q}.$$

Alors A et B engendrent un sous-groupe  $F_1 \subset F$ , et l'application  $\varphi:(a,\ b)\to(A,\ B)$  détermine un endomorphisme de F. Si

$$m = a^{x_1}b^{y_1}a^{x_2}b^{y_2} \dots a^{x_n}b^{y_n}$$

est un mot de F, son transformé par φ est

$$M = \varphi(m) = A^{x_1}B^{y_1}A^{x_2}B^{y_2} \ldots A^{x_n}B^{y_n}.$$

On voit alors que l'on a

$$\xi_1(M) = \xi_1(A)\xi_1(m) + \xi_1(B)\eta_1(m), \quad \eta_1(M) = \eta_1(A)\xi_1(m) + \eta_1(B)\eta_1(m).$$

On trouve des formules de multiplication des mots pour  $\xi_i(m)$  et  $\eta_i(m)$  en utilisant les formules correspondentes obtenues pour les  $X_i(m)$ ,  $Y_i(m)$ . Ainsi

$$\xi_{2}(AB) = XY(AB) - YX(AB) = XY(A) - YX(A) + XY(B) - YX(B) + X(A)Y(B) - Y(A)X(B) = \xi_{2}(A) + \left| \begin{array}{cc} \xi_{1}(A) & \xi_{1}(B) \\ \eta_{1}(A) & \eta_{1}(B) \end{array} \right|$$

et en général, par itération,

$$\xi_2(m_1m_2 \ldots, m_n) = \sum_{i=1}^n \xi_2(m_i) + \sum_{i < j} \begin{vmatrix} \xi_1(m_i) & \xi_1(m_j) \\ \eta_1(m_i) & \eta_1(m_j) \end{vmatrix}$$

On trouve alors

$$\xi_{2}(M) = \xi_{2}(A^{x_{1}}B^{y_{1}} \dots A^{x_{n}}B^{y_{n}}) =$$

$$= \xi_{2}(A)\xi_{1}(m) + \xi_{2}(B)\eta_{1}(m) + \begin{vmatrix} \xi_{1}(A) & \xi_{1}(B) \\ \eta_{1}(A) & \eta_{1}(B) \end{vmatrix} \xi_{2}(m)$$

$$\eta_{2}(M) = -\xi_{2}(M) = \eta_{2}(A)\xi_{1}(m) + \eta_{2}(B)\eta_{1}(m) - \begin{vmatrix} \xi_{1}(A) & \xi_{1}(B) \\ \eta_{1}(A) & \eta_{1}(B) \end{vmatrix} \xi_{2}(m).$$

Ensuite

$$\xi_{3}(AB) = \xi_{3}(A) + \xi_{3}(B) + 3 \begin{vmatrix} \xi_{2}(A) & \xi_{2}(B) \\ \xi_{1}(A) & \xi_{1}(B) \end{vmatrix} - \left[ \xi_{1}(A) - \xi_{1}(B) \right] \begin{vmatrix} \xi_{1}(A) & \xi_{1}(B) \\ \eta_{1}(A) & \eta_{1}(B) \end{vmatrix}$$

et en général

$$\xi_{3}(m_{1}m_{2}...m_{n}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{3}(m_{i}) + 3 \sum_{i < j} \left| \begin{array}{c} \xi_{2}(m_{i}) & \xi_{2}(m_{j}) \\ \xi_{1}(m_{i}) & \xi_{1}(m_{j}) \end{array} \right| - \\ - \sum_{i < j} \left[ \xi_{1}(m_{i}) - \xi_{1}(m_{j}) \right] \left| \begin{array}{c} \xi_{1}(m_{i}) & \xi_{1}(m_{j}) \\ \eta_{1}(m_{i}) & \eta_{1}(m_{j}) \end{array} \right|$$

puis

$$\xi_{3}(M) = \xi_{3}(A)\xi_{1}(m) + \xi_{3}(B)\eta_{1}(m) + 3 \begin{vmatrix} \xi_{2}(A) & \xi_{2}(B) \\ \xi_{1}(A) & (\xi_{1}B) \end{vmatrix} \xi_{2}(m) + + \begin{vmatrix} \xi_{1}(A) & \xi_{1}(B) \\ \eta_{1}(A) & \eta_{1}(B) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_{1}(A) & \xi_{1}(B) \\ \eta_{3}(m) & \eta_{3}(m) \end{vmatrix}$$

On obtient  $\eta_3(M)$  en permutant  $\xi$  avec  $\eta$  dans les invariants de A et B, sans rien changer aux invariants de m. D'une manière générale, les invariants  $\xi_i(M)$ ,  $\eta_i(M)$  sont des polynômes par rapport aux invariants de A, B, et m. Remarquons que, si l'on remplace m par  $m^k$ , M doit être remplacé par  $M^k$  et  $\xi_i(M)$ ,  $\eta_i(M)$  deviennent  $k\xi_i(M)$ ,  $k\eta_i(M)$ , ce qui entraîne, en écrivant

$$\xi_i(M) = P(\xi_1(m), \eta_1(m), \xi_2(m), \ldots; \xi_1(A), \eta_1(A), \xi_2(A), \ldots; \xi_1(B), \eta_1(B))$$

où P est un polynôme, que les invariants  $\xi_i(m)$ ,  $\eta_i(m)$  entrent linéairement dans P; on a

$$\xi_i(M) = \sum_{j \ge 1} \left[ P_{2j-1} \xi_{2j-1}(m) + Q_{2j-1} \eta_{2j-1}(m) + R_j \xi_{2j}(m) \right],$$

où les P, Q, R sont des polynômes par rapport aux invariants de A et B. Pour m=a, M=A,  $\xi_1(a)=1$ ,  $\eta_1(a)=0$ ,  $\xi_i(a)=\eta_i(a)=0$ , i>1, donc  $P=\xi_i(A)$ ,  $Q=\xi_i(B)$ .

Considérons maintenant deux mots

$$m_1 = a^{x_1}b^{y_1} \dots a^{x_n}b^{y_n}, \quad m_2 = a^{x_1'}b^{y_1'} \dots a^{x_n'}b^{y_n'}$$

et l'endomorphisme  $h:(a, b) \rightarrow (m_1, m_2)$  de F. Si

$$M_1 = A^{x_1}B^{y_1} \dots A^{x_n}B^{y_n}, \quad M_2 = A^{x_1'}B^{y_1'} \dots A^{x_n'}B^{y_n'}$$

alors  $\varphi:(a, b) \to (M_1, M_2)$  représente un second endomorphisme de F. On a, conformément aux précédents calculs,

$$\xi_1(M_1) = \xi_1(A)\xi_1(m_1) + \xi_1(B)\eta_1(m_1), \ \xi_1(M_2) = \xi_1(A)\xi_1(m_2) + \xi_1(B)\eta_1(m_2).$$

$$\eta_1(M_1) = \eta_1(A)\xi_1(m_1) + \eta_1(B)\eta_1(m_1), \ \eta_1(M_2) = \eta_1(A)\xi_1(m_2) + \eta_1(B)\eta_1(m_2).$$

Si, de plus, h est un automorphisme de F, on peut choisir A et B de manière à avoir  $M_1=a$ ,  $M_2=b$ , donc  $\xi_1(M_1)=\eta_1(M_2)=1$ ,  $\eta_1(M_1)=\xi_1(M_2)=0$ , donc

$$\begin{array}{l} \xi_1(A)\xi_1(m_1) + \xi_1(B)\eta_1(m_1) = 1, \ \xi_1(A)\xi_1(m_2) + \xi_1(B)\eta_1(m_2) = 0 \\ \eta_1(A)\xi_1(m_1) + \eta_1(B)\eta_1(m_1) = 0, \ \eta_1(A)\xi_1(m_2) + \eta_1(B)\eta_1(m_2) = 1. \end{array}$$

En posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1(A) & \xi_1(B) \\ \eta_1(A) & \eta_1(B) \end{vmatrix}$$

les équations ci-dessus impliquent  $\Delta \neq 0$  et l'on aura

$$\Delta \xi_1(m_1) = \eta_1(B), \ \Delta \eta_1(m_1) = -\eta_1(A), \ \Delta \xi_1(m_2) = -\xi_1(B),$$
  
 $\Delta \eta_1(m_2) = \xi_1(A).$ 

Les mêmes équations impliquent  $(\xi_1(A), \xi_1(B)) = 1 = (\eta_1(A), \eta_1(B))$  et il en résulte  $\Delta = \pm 1$ ; prenons  $\Delta = 1$ . Alors

$$\xi_1(m_1) = \eta_1(B), \quad \eta_1(m_1) = -\eta_1(A), \quad \xi_1(m_2) = -\xi_1(B),$$

$$\eta_1(m_2) = \xi_1(A).$$

On trouve ensuite, puisque  $\xi_2(a) = 0 = \xi_2(b)$ ,

$$\xi_2(A)\xi_1(m_1) + \xi_2(B)\eta_1(m_1) + \xi_2(m_1) = 0, \quad \xi_2(A)\xi_1(m_2) + \xi_2(B)\eta_1(m_2) + \xi_2(m_2) = 0.$$

(il est inutile d'écrire les équations correspondentes pour  $\eta_2$ , car  $\xi_2 + \eta_2 = 0$ ). En y introduisant les valeurs déjà trouvées, on a

$$\xi_2(m_1) = \xi_2(B)\eta_1(A) - \xi_2(A)\eta_1(B), \quad \xi_2(m_2) = -\xi_2(B)\xi_1(A) + \xi_2(A)\xi_1(B).$$

De même,  $\xi_3(a) = \xi_3(b) = \eta_3(a) = \eta_3(b) = 0$  donnent

$$\begin{aligned} \xi_{3}(A)\eta_{1}(B) - \xi_{3}(B)\eta_{1}(A) - 3 \begin{vmatrix} \xi_{2}(A) & \xi_{2}(B) \\ \xi_{1}(A) & \xi_{1}(B) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_{2}(A) & \xi_{2}(B) \\ \eta_{1}(A) & \eta_{1}(B) \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} \xi_{1}(A) & \xi_{1}(B) \\ \eta_{3}(m_{1}) & \xi_{3}(m_{1}) \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\eta_{3}(A)\eta_{1}(B) - \eta_{3}(B)\eta_{1}(A) - 3 \begin{vmatrix} \eta_{2}(A) & \eta_{2}(B) \\ \eta_{1}(A) & \eta_{1}(B) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \eta_{2}(A) & \eta_{2}(B) \\ \xi_{1}(A) & \xi_{1}(B) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta_{1}(A) & \eta_{1}(B) \\ \eta_{3}(m_{1}) & \xi_{3}(m_{1}) \end{vmatrix} = 0$$

Ce système détermine  $\xi_3(m_1)$ ,  $\eta_3(m_1)$ , et l'on a un système analogue pour  $\xi_3(m_2)$ ,  $\eta_3(m_2)$ . Mais, en tenant compte de la relation de réciprocité qui existe entre les applications  $(a, b) \rightarrow (m_1, m_2)$  et  $(a, b) \rightarrow (A, B)$  lorsque la première induit un automorphisme de F, les relations obtenues entre les invariants de  $m_1$ ,  $m_2$ , A, B subsistent si l'on permute  $m_1$  avec A et  $m_2$  avec B. Les relations que l'on obtient ainsi sont équivalentes aux précédentes, mais cette fois elles sont linéaires par rapport aux invariants de A et B, ce qui permet une élimination de ces invariants si la longueur des mots A, B a été fixée. Cherchons les automorphismes pour les que la (A) = (

$$\xi_1(m_1) = \tau$$
,  $\eta_1(m_1) = -\mu$ ,  $\xi_1(m_2) = -\sigma$ ,  $\eta_1(m_2) = \lambda$ 

 $\xi_1(m_1)$   $-\xi_2(m_1)\eta_1(m_2) = \lambda\mu = -\eta_1(m_1)\eta_1(m_2)$  (1<sup>re</sup>-relation nécessaire)

$$\begin{split} \xi_{3}(m_{1}) \eta_{1}(m_{2}) - \xi_{3}(m_{2}) \eta_{1}(m_{1}) - 3 \begin{vmatrix} \xi_{2}(m_{1}) & \xi_{2}(m_{2}) \\ \xi_{1}(m_{1}) & \xi_{1}(m_{2}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_{2}(m_{1}) & \xi_{2}(m_{2}) \\ \eta_{1}(m_{1}) & \eta_{1}(m_{2}) \end{vmatrix} - \\ - \lambda^{2} \mu \xi_{1}(m_{1}) - \lambda \mu^{2} \xi_{1}(m_{2}) = 0 \end{split}$$

et l'élimination donne

$$\begin{vmatrix} \xi_{3}(m_{1}) & \xi_{3}(m_{2}) \\ \eta_{1}(m_{1}) & \eta_{1}(m_{2}) \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} \xi_{2}(m_{1}) & \xi_{2}(m_{2}) \\ \xi_{1}(m_{1}) & \xi_{1}(m_{2}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_{2}(m_{1}) & \xi_{2}(m_{2}) \\ \eta_{1}(m_{1}) & \eta_{1}(m_{2}) \end{vmatrix} + \eta_{1}(m_{1})\eta_{1}(m_{2}) = 0$$

qui est une seconde relation nécessaire pour que  $(m_1, m_2)$  définisse un automorphisme de F. Le calcul complet conduit aux générateurs bien connus  $(a, b) \rightarrow (a^{-1}, b)$ ,  $(a, b) \rightarrow (b, a)$ ,  $(a, b) \rightarrow (ab, b)$  qui engendrent le groupe  $Aut_eF$ . En nous proposant de revenir ailleurs sur ces questions, nous terminerons par quelques indications sur les invariants d'automorphisme dans le cas du groupe fondamental d'une surface fermée orientable de genre 2.

Le groupe fondamental est alors engendré par 4 générateurs a, b, c, d, reliés par la relation  $R = aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = 1$ . Un mot s'écrit alors

$$m = a^{x_1}b^{y_1}c^{z_1}d^{u_1} \dots a^{x_n}b^{y_n}c^{z_n}d^{u_n}.$$

et un invariant de contraction aura pour symbole un produit formel des majuscules X, Y, Z, U, deux majuscules de même nom n'êtant jamais voisines. On a X(R) = Y(R) = Z(R) = U(R) = 0, donc R est un mot équilibré. On possède alors d'assez nombreux invariants d'insertion, d'abord X(m), Y(m), Z(m), U(m). Les autres invariants de contraction de R sont

$$XY = 1$$
,  $XZ = 0$ ,  $XU = 0$ ,  $ZX = ZY = 0$ ,  $ZU = 1$   
 $YX = -1$ ,  $YZ = 0$ ,  $YU = 0$ ,  $UX = UY = 0$ ,  $UZ = -1$ .

On en déduit les 9 invariants d'insertion du  $2^d$  degré XZ(m), XU(m), YZ(m), YU(m), ZX(m), ZY(m), UX(m). UY(m), XY(m) + UZ(m).

Parmi les 36 invariants de contraction du 3<sup>me</sup> degré de R, on a

$$XYX(R) = -1$$
,  $YXY(R) = 1$ ,  $ZUZ(R) = -1$ ,  $UZU(R) = 1$ 

les autres étant nuls, ce qui conduit à 19 invariants d'insertion du 3<sup>me</sup> degré

XZX, XZY, XUX, XUY, YZX, YZY, YUX, YUY, ZXZ, ZXU, ZYZ, ZYU, UXZ, UXU, UYZ, UYU, XYX + YXY, XYX - ZUZ, XYX + UZU.

On trouve de tels invariants d'insertion de forme simple jusqu'au degré 8, car 1s(R) = 8. Pour le calcul des invariants de contraction de R = [a, b][c, d], où  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ , on peut appliquer la formule de multiplication des mots. Désignons par ABC... le symbole d'un invariant de contraction, les lettres A, B, C représentant chacune l'une des majuscules X, Y, Z, U. On a A(R) = A[a, b] + A[c, d] = 0, un comutateur étant équilibré. Ensuite, AB[a, b] = 0, sauf pour A = X, B = Y, et alors XY[a, b] = 1; ABC[a, b] = 0, sauf pour XYX[a, b] = -1, YXY[a, b] = 1; ABCD[a, b] = 0, sauf pour XYXY[a, b] = 1, les invariants de degré > 4 étant nuls. Alors

AB(R) = AB[a, b] + AB[c, d] car A[a, b] = B[c, d] = 0 ABC(R) = ABC[a, b] + ABC[c, d]  $ABCD(R) = ABCD[a, b] + AB[a, b] \cdot CD[c, d] + ABCD[c, d]$  ABCDE(R) = ABC[a, b]DE[c, d] + AB[a, b]CDE[c, d] ABCDEF(R) = ABCD[a, b]EF[c, d] + ABC[a, b]DEF[c, d] + + AB[a, b]CDEF[c, d] ABCDEFG(R) = ABCD[a, b]EFG[c, d] + ABC[a, b]DEFG[c, d] ABCDEFGH(R) = ABCD[a, b]EFGH[c, d]

le dernier étant nul, sauf pour XYXYZUZU(R) = 1.

Avec les invariants d'insertion, il s'agit de former des invariants d'automorphisme pour le groupe  $G = |a, b, c, d: aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}|$ . Les générateurs de Aut, G sont, d'après J. Nielsen

 $\beta:(a,\,b,\,c,\,d)\to(ab,\,b,\,c,\,d)\quad {\rm et}\quad \nu:(a,\,b,\,c,\,d)\to(c^{-1}b,\,a^{-1},\,a^{-1}d,\,c^{-1}).$ 

Pour  $m = a^{x_1}b^{y_1}c^{z_1}d^{u_1} \dots a^{x_n}b^{y_n}c^{z_n}d^{u_n}$ , posons

$$m' = \beta(m) = (ab)^{x_1}b^{y_1}c^{z_1}d^{u_1} \dots (ab)^{x_n}b^{y_n}c^{z_n}d^{u_n}$$
  

$$m'' = \nu(m) = (c^{-1}b)^{x_1}a^{-y_1}(a^{-1}d)^{z_1}c^{-u_1} \dots (c^{-1}b)^{x_n}a^{-y_n}(a^{-1}d)^{z_n}c^{-u_n}.$$

On House 
$$X(m') = X(m), Y(m') = Y(m) + X(m), Z(m') = Z(m), U(m') = U(m), X(m'') = -Y(m) - Z(m), Y(m'') = X(m), Z(m'') = -X(m) - U(m), U(m'') = Z(m),$$

et l'on voit qu'il n'existe pas d'invariant d'automorphisme polynomial du le degré, mais on a l'invariant arithmétique

$$\delta = (X(m), Y(m), Z(m), U(m))$$

qui est aussi un invariant de conjugaison, donc un invariant pour tous les qui est aussi un invalua la surface fermée orientable S de genre 2, une courbe automorphismes. Sur la surface fermée orientable S de genre 2, une courbe est simple et ne sépare pas S si elle peut être appliquée sur une coupure est simple et le separe pur la compre canonique de S par un automorphisme de S (théorème de Zieschang [2]). Il suffit donc de prendre m = a (ou b, c, d) pour avoir la valeur de  $\delta$  pour toute classe simple non-séparatrice de S. Or, si m = a, on a X(a) = 1Y(a) = Z(a) = U(a) = 0, donc  $\delta = 1$ . Pour prendre un exemple, la classe  $m = abcdb^{-1}a^{-1}b^{-1}cd$  contient des courbes simples nonséparatrices; on a X(m) = 0, Y(m) = -1, Z(m) = U(m) = 2,  $\delta = 1$ . Ces courbes donnent le noeud 3, qui ne sépare pas la surface.

Si la courbe simple sépare S, elle est applicable (en vertu du théorème cité) par un automorphisme de S sur la séparatrice canonique appartenant à la classe  $aba^{-1}b^{-1}$ . On a alors  $X(m) = \tilde{Y}(m) = Z(m) = U(m) = 0$ , et § reste indéterminé. C'est une condition nécessaire pour qu'une courbe simple sépare S en deux domaines D et D', ce qui résulte aussi d'autres considérations: en "abélianisant" le groupe fondamental  $\pi_1(S)$ , on obtient le groupe d'homologie  $H_1(S)$ ; or, une classe simple représentée par m dans  $\pi_1(S)$  sera représentée par  $a^{X_1(m)}b^{Y_1(m)}c^{Z_1(m)}d^{U_1(m)}$  dans  $\hat{H_1}(S)$ ; une courbe de la classe m, étant la frontière d'une chaîne bidimensionnelle (D ou D') de S, est homologue à zéro donc  $X_1(m) = Y_1(m) = Z_1(m) = U_1(m) = 0$ .

Ces conditions nécessaires ne sont pas suffisantes, et pour en obtenir d'autres nous devons recourir aux invariants de degré > 1. Nous nous proposons de revenir ultérieurement sur ces indication sommaires.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] Reinhardt, B. L., Algorithms for Jordan curves on compact surfaces. (Ann. of math., 75, 209-222 (1962).
- [2] Zieschang, H., Algorithmen für einfache Kurven auf Flächen. Mathematica Scandinavica, 17, 17-40 (1965).
- [3] Calugareanu, G., Courbes fermées simples sur une surface fermée orientable. Mathematica, 9, (32), 225-231 (1967).
- [4] Chillingworth, D. R. J., An algorithm for families of disjoint simple closed curves
- on surfaces. The Bulletin of the London math. Soc., 3, 23-26 (1971).
- [5] Magnus, W-., Das Identitätsproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation. Math. Annalen, 106, 295-307 (1932).
- -[6] Calugareanu, G., Invariants de contraction dans les groupes. Studia Univ. Babes-Bolyai, Cluj, 16, 9-27 (1971). Reçu le 30.VI.1974.