

SUR LA FONCTIONNELLE  $\frac{f(z_1)}{f'(z_2)}$  AU CAS DES  
FONCTIONS TYPIQUEMENT REELLES (II)

par

DUMITRU RIPEANU

§ 5. CONSTRUCTION DES BOUCLES  $(B_s)$ ,  $(s = \overline{1, 4})$  DE (23).

Bien que ce soient des courbes unicursales il est commode de se servir d'une représentation paramétrique irrationnelle, en posant  $b = \rho s$  ( $s$  paramètre) ce qui donne pour la courbe  $(C_1)$  les branches

$$(51) \quad (C_{1,+}) : \rho = \frac{1}{\delta + s} \left( -\delta + \sqrt{1 + \delta^2} \cdot \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}} \right), \quad b = \rho s$$

$$(52) \quad (C_{1,-}) : \rho = -\frac{1}{\delta + s} \left( \delta + \sqrt{1 + \delta^2} \cdot \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}} \right), \quad b = \rho s.$$

Il s'ensuit le long de la branche  $(C_{1,+})$

$$\varphi_1(s) = \sqrt{\rho^2 + b^2} = |\varphi_2(s)|$$

avec

$$\varphi_2(s) = \frac{1}{\delta + s} (s \sqrt{1 + \delta^2} - \delta \sqrt{1 + s^2}).$$

| $s$            | $-\infty$                      | $-\delta$             | $0$           | $\delta$     | $+\infty$                                |
|----------------|--------------------------------|-----------------------|---------------|--------------|------------------------------------------|
| $\varphi_2(s)$ | $\delta + \sqrt{1 + \delta^2}$ | $\nearrow \pm \infty$ | $\nearrow -1$ | $\nearrow 0$ | $\nearrow -\delta + \sqrt{1 + \delta^2}$ |
| $\varphi_1(s)$ | $\delta + \sqrt{1 + \delta^2}$ | $\nearrow \infty$     | $\searrow 1$  | $\searrow 0$ | $\searrow -\delta + \sqrt{1 + \delta^2}$ |

Tableau 1

Par suite

$$\varphi_2'(s) = \frac{\delta}{(\delta + s)^2 \sqrt{1 + s^2}} (1 - \delta s + \sqrt{1 + \delta^2} \cdot \sqrt{1 + s^2}) > 0.$$

Selon le tableau 1 la branche  $(B_{1,+})$  s'obtient de (51) pour les valeurs  $s \geq 0$  (nous désignons par  $(B_{1,+})$  la branche de la boucle  $(B_1)$  constituée par la section de la branche  $(C_{1,+})$  comprise dans  $\Delta$ ).

$$(53) \quad \frac{d\rho}{ds} = \frac{\varphi_3(s)}{(\delta + s)^2 (1 + s^2) \sqrt{1 + s^2}}; \quad \frac{db}{ds} = \frac{\sqrt{1 + \delta^2}}{(\delta + s)^2} \left( \varphi_4(s) - \frac{\delta^2}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right)$$

avec  $\varphi_3(s) = (\delta - s^3) \sqrt{1 + \delta^2} + \delta(1 + s^2) \sqrt{1 + s^2}$  et  $\varphi_4(s) = \frac{s(2\delta + s + \delta s^3)}{(1 + s^2) \sqrt{1 + s^2}}$ .

Par suite  $\varphi_3'(s) = 3s(-s \sqrt{1 + \delta^2} + \delta \sqrt{1 + s^2})$ . Les tableaux 2 et 3 donnent le tableau 4, auquel

$$\varphi_4'(s) = \frac{(\delta + s)(2 - s^2)}{(1 + s^2)^2 \sqrt{1 + s^2}}$$

| s               | 0                                 | $\delta$                      | $s_1$ | $\infty$  |
|-----------------|-----------------------------------|-------------------------------|-------|-----------|
| $\varphi_3'(s)$ | +                                 | 0                             | -     |           |
| $\varphi_3(s)$  | $\delta(1 + \sqrt{1 + \delta^2})$ | $2\delta \sqrt{1 + \delta^2}$ | $0$   | $-\infty$ |

Tableau 2

| s               | 0   | $s_2$                                  | $\sqrt{2}$            | $\infty$ |
|-----------------|-----|----------------------------------------|-----------------------|----------|
| $\varphi_4'(s)$ | +   | 0                                      | -                     |          |
| $\varphi_4(s)$  | $0$ | $\frac{\delta^2}{\sqrt{1 + \delta^2}}$ | $\varphi_4(\sqrt{2})$ | $\delta$ |

Tableau 3

| s                  | 0                                             | $s_1$                | $\delta$     | $s_1$                | $\infty$                                 |
|--------------------|-----------------------------------------------|----------------------|--------------|----------------------|------------------------------------------|
| $\frac{d\rho}{ds}$ | +                                             | +                    | +            | 0                    | -                                        |
| $\rho$             | -1                                            | $\nearrow \rho(s_2)$ | $\nearrow 0$ | $\nearrow \rho(s_1)$ | $\searrow 0$                             |
| $\frac{db}{ds}$    | -                                             | 0                    | +            | +                    | +                                        |
| b                  | 0                                             | $\searrow b(s_2)$    | $\nearrow 0$ | $\nearrow b(s_1)$    | $\nearrow -\delta + \sqrt{1 + \delta^2}$ |
| $\frac{db}{d\rho}$ | $-\frac{1}{\delta}(-1 + \sqrt{1 + \delta^2})$ | 0                    | $\delta$     | $\infty$             | $-\delta$                                |

Tableau 4

$s_2 < \delta < s_1$  ainsi qu'il résulte des relations  $\frac{1}{\delta} \cdot \frac{db}{ds} \Big|_{s=\delta} = \frac{d\rho}{ds} \Big|_{s=\delta} = \frac{1}{2\delta(1 + \delta^2)} > 0$ , données par (53). Le long de la branche  $(C_{1,-})$ , (52) donne

$$\varphi_5(s) = \sqrt{\rho^2 + b^2} = \frac{1}{\delta + s} (s \sqrt{1 + \delta^2} + \delta \sqrt{1 + s^2}),$$

par suite

$$\varphi_5'(s) = \frac{\delta}{(\delta + s)^2 \sqrt{1 + s^2}} (-1 + \delta s + \sqrt{1 + \delta^2} \cdot \sqrt{1 + s^2}) \geq 0.$$

| s              | $-\infty$                       | $-\delta$                                | 0            | $\infty$                                |
|----------------|---------------------------------|------------------------------------------|--------------|-----------------------------------------|
| $\varphi_5(s)$ | $-\delta + \sqrt{1 + \delta^2}$ | $\nearrow \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}}$ | $\nearrow 1$ | $\nearrow \delta + \sqrt{1 + \delta^2}$ |

Tableau 5

Selon le tableau 5, la branche  $(B_{1,-})$  s'obtient de (52) pour les valeurs  $s \leq 0$  du paramètre. Or,  $\frac{d\rho}{ds} = \frac{\varphi_6(s)}{(\delta + s)^2 (1 + s^2) \sqrt{1 + s^2}}$  avec  $\varphi_6(s) = (-\delta + s^3) \sqrt{1 + \delta^2} + \delta(1 + s^2) \sqrt{1 + s^2}$ . Par suite

$$\varphi_6'(s) = 3s(s \sqrt{1 + \delta^2} + \delta \sqrt{1 + s^2}), \quad \frac{db}{ds} = -\frac{\sqrt{1 + \delta^2}}{(\delta + s)^2} \left( \varphi_4(s) + \frac{\delta^2}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right)$$

et  $\varphi_4(s)$  donnée par (53).

| s               | $-\infty$ | $-\delta$    | 0                                   |
|-----------------|-----------|--------------|-------------------------------------|
| $\varphi_6'(s)$ | +         | 0            | -                                   |
| $\varphi_6(s)$  | $-\infty$ | $\nearrow 0$ | $-\delta(-1 + \sqrt{1 + \delta^2})$ |

Tableau 6

| s               | $-\infty$ | $s_3$                                            | $-\sqrt{2}$                     | $-\delta$                                        | 0            |
|-----------------|-----------|--------------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------|--------------|
| $\varphi_4'(s)$ | +         | +                                                | 0                               | -                                                | +            |
| $\varphi_4(s)$  | $-\delta$ | $\nearrow -\frac{\delta^2}{\sqrt{1 + \delta^2}}$ | $\nearrow \varphi_4(-\sqrt{2})$ | $\searrow -\frac{\delta^2}{\sqrt{1 + \delta^2}}$ | $\nearrow 0$ |

Tableau 7

Les tableaux 6 et 7 donnent le tableau 8 et les tableaux 4 et 8 donnent la forme de la boucle  $(B_1)$  de la fig. 2. L'équation (23) de  $(C_2)$  place la boucle  $(B_2)$  comme symétrique de la boucle  $(B_1)$  par rapport à l'origine des axes. Les points  $M_1, M_2, M_3$  de la fig. 2 sont donnés par (51) ou (52), pour les valeurs du paramètre écrites en parenthèse. Si dans l'équation (23) de  $(C_1)$ ,  $\rho^2 + b^2 = 1$ , il vient  $\rho = -1$ . Par conséquent, le seul point d'intersection de  $(B_1)$  avec le cercle unité est le point  $A_-$ . En posant dans l'équation (23) de  $(C_3)$ ,  $b = \rho s$ , il vient les deux branches

$$(54) \quad (C_{3,-}) : \rho = -\frac{1}{1 - \delta s} \left( 1 + \sqrt{1 + \delta^2} \cdot \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}} \right), \quad b = \rho s$$

$$(55) \quad (C_{3,+}) : \rho = \frac{1}{1 - \delta s} \left( -1 + \sqrt{1 + \delta^2} \cdot \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}} \right), \quad b = \rho s.$$

Il s'ensuit le long de la branche  $(C_3, -)$ :

$$\varphi_7(s) = \sqrt{\rho^2 + b^2} = |\varphi_8(s)|, \text{ avec } \varphi_8(s) = \frac{1}{1-\delta s} (s\sqrt{1+\delta^2} + \sqrt{1+s^2}).$$

Par suite  $\varphi_8'(s) = \frac{\delta + s + \sqrt{1+\delta^2} \cdot \sqrt{1+s^2}}{(1-\delta s)^2 \cdot \sqrt{1+s^2}} > 0$ . Selon le tableau 9, la branche  $(B_{3,-})$  s'obtient de (54) pour les valeurs  $s \leq 0$  du paramètre.

| s                  | $-\infty$                     | $s_3$                | $-\delta$                        | 0                                          |
|--------------------|-------------------------------|----------------------|----------------------------------|--------------------------------------------|
| $\frac{d\rho}{ds}$ |                               | -                    | $-\frac{3\delta}{2(1+\delta^2)}$ | -                                          |
| $\rho$             | 0                             | $\searrow \rho(s_3)$ | $-\frac{1}{1+\delta^2}$          | $\searrow -1$                              |
| $\frac{db}{ds}$    |                               | +                    | 0                                | $-\frac{2-\delta^2}{2(1+\delta^2)}$        |
| b                  | $-\delta + \sqrt{1+\delta^2}$ | $\nearrow b(s_3)$    | $\frac{\delta}{1+\delta^2}$      | $\searrow 0$                               |
| $\frac{db}{d\rho}$ | $-\delta$                     | 0                    | $\frac{2-\delta^2}{3\delta}$     | $\frac{1}{\delta} (1 + \sqrt{1+\delta^2})$ |

Tableau 8

| s              | $-\infty$                                   | $-\frac{1}{\delta}$ | 0            | $\frac{1}{\delta}$   | $+\infty$                                   |
|----------------|---------------------------------------------|---------------------|--------------|----------------------|---------------------------------------------|
| $\varphi_8(s)$ | $\frac{1}{\delta} (1 - \sqrt{1+\delta^2})$  | $\nearrow 0$        | $\nearrow 1$ | $\nearrow \pm\infty$ | $-\frac{1}{\delta} (1 + \sqrt{1+\delta^2})$ |
| $\varphi_7(s)$ | $\frac{1}{\delta} (-1 + \sqrt{1+\delta^2})$ | $\searrow 0$        | $\searrow 1$ | $\searrow \infty$    | $\frac{1}{\delta} (1 + \sqrt{1+\delta^2})$  |

Tableau 9

(56)

$$\frac{d\rho}{ds} = -\frac{\varphi_8(s)}{(1-\delta s)^2 \cdot (1+s^2)\sqrt{1+s^2}}, \quad \frac{db}{ds} = -\frac{\sqrt{1+\delta^2}}{(1-\delta s)^2} \cdot \left( \varphi_{10}(s) + \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \right),$$

avec

$$\varphi_9(s) = \sqrt{1+\delta^2}(1+\delta s^3) + \delta(1+s^2)\sqrt{1+s^2} \text{ et}$$

$$\varphi_{10}(s) = \frac{s(2-\delta s+s^2)}{(1+s^2)\sqrt{1+s^2}}.$$

Par suite

$$\varphi_9'(s) = 3\delta s(\sqrt{1+s^2} + s\sqrt{1+\delta^2}) \text{ et } \varphi_{10}'(s) = \frac{(1-\delta s)(2-s^2)}{(1+s^2)^2 \cdot \sqrt{1+s^2}}.$$

| s               | $-\infty$ | $s_4$        | $-\frac{1}{\delta}$           | 0                                     |
|-----------------|-----------|--------------|-------------------------------|---------------------------------------|
| $\varphi_9'(s)$ |           | +            | +                             | 0                                     |
| $\varphi_9(s)$  | $-\infty$ | $\nearrow 0$ | $\nearrow 2\sqrt{1+\delta^2}$ | $\searrow \delta + \sqrt{1+\delta^2}$ |

Tableau 10

| s                  | $-\infty$ | $-\sqrt{2}$                        | $s_5$                                   | 0            |
|--------------------|-----------|------------------------------------|-----------------------------------------|--------------|
| $\varphi_{10}'(s)$ |           | -                                  | 0                                       | +            |
| $\varphi_{10}(s)$  | $-1$      | $\searrow \varphi_{10}(-\sqrt{2})$ | $\nearrow -\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}$ | $\nearrow 0$ |

Tableau 11-12

Les tableaux 10 et 11-12 donnent le tableau 13, où  $s_4 < -\frac{1}{\delta} < s_5$ , ainsi qu'il résulte des relations  $\frac{d\rho}{ds} \Big|_{s=-\frac{1}{\delta}} = \frac{-\delta^3}{2(1+\delta^2)} < 0$  et  $\frac{db}{ds} \Big|_{s=-\frac{1}{\delta}} = \frac{\delta^3}{2(1+\delta^2)} > 0$  données par (56). Le long de la branche  $(C_3, +)$  (55) donne

$$\varphi_{11}(s) = \sqrt{\rho^2 + b^2} = \frac{-s\sqrt{1+\delta^2} + \sqrt{1+s^2}}{1-\delta s}, \quad \varphi_{11}'(s) = \frac{\delta + s - \sqrt{1+\delta^2} \cdot \sqrt{1+s^2}}{(1-\delta s)^2 \sqrt{1+s^2}} \leq 0$$

Selon le tableau 14, la branche  $(B_{3,+})$  s'obtient de (55) pour les valeurs  $s \geq 0$  du paramètre.

| s                  | $-\infty$                                    | $s_4$                | $-\frac{1}{\delta}$ | $s_5$                | 0                             |
|--------------------|----------------------------------------------|----------------------|---------------------|----------------------|-------------------------------|
| $\frac{d\rho}{ds}$ | +                                            | +                    | 0                   | -                    | -                             |
| $\rho$             | 0                                            | $\nearrow \rho(s_4)$ | $\searrow 0$        | $\searrow \rho(s_5)$ | $\searrow -1$                 |
| $\frac{db}{ds}$    |                                              | +                    | +                   | +                    | 0                             |
| b                  | $-\frac{1}{\delta} (-1 + \sqrt{1+\delta^2})$ | $\nearrow b(s_4)$    | $\nearrow 0$        | $\nearrow b(s_5)$    | $\searrow 0$                  |
| $\frac{db}{d\rho}$ | $\frac{1}{\delta}$                           | $\infty$             | $-\frac{1}{\delta}$ | 0                    | $-\delta + \sqrt{1+\delta^2}$ |

Tableau 13

| s                 | $-\infty$                                   | 0          | $\frac{1}{\delta}$ | $\infty$                                                                                 |
|-------------------|---------------------------------------------|------------|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\varphi_{11}(s)$ | $\frac{1}{\delta}(1 + \sqrt{1 + \delta^2})$ | $\searrow$ | $1 \searrow$       | $\frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \searrow \frac{1}{\delta}(-1 + \sqrt{1 + \delta^2})$ |

Tableau 14

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\varphi_{13}(s)}{(1 - \delta s)^2(1 + s^2)\sqrt{1 + s^2}}$$

$$\frac{db}{ds} = \frac{\sqrt{1 + \delta^2}}{(1 - \delta s)^2} \left( \varphi_{10}(s) - \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right)$$

avec

$$\varphi_{13}(s) = \sqrt{1 + \delta^2}(1 + \delta s^3) - \delta(1 + s^2)\sqrt{1 + s^2}$$

et  $\varphi_{10}(s)$  donnée par (56). Par suite  $\varphi'_{12}(s) = 3\delta s(\sqrt{1 + \delta^2} \cdot s - \sqrt{1 + s^2})$ 

| s                  | 0                               | $\frac{1}{\delta}$ | $\infty$              |
|--------------------|---------------------------------|--------------------|-----------------------|
| $\varphi'_{12}(s)$ | -                               | 0                  | +                     |
| $\varphi_{13}(s)$  | $-\delta + \sqrt{1 + \delta^2}$ | $\searrow$         | 0 $\nearrow$ $\infty$ |

Tableau 15

| $s$                | 0            | $s_*$                         | $\sqrt{2}$                                 | $\frac{1}{\delta}$            | $\infty$   |   |
|--------------------|--------------|-------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------|------------|---|
| $\varphi'_{10}(s)$ | +            | +                             | 0                                          | -                             | 0          | + |
| $\varphi_{10}(s)$  | 0 $\nearrow$ | $\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}$ | $\nearrow \varphi_{10}(\sqrt{2}) \searrow$ | $\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}$ | $\nearrow$ | 1 |

Tableau 16

| s                  | 0            | $s_* = \sqrt{2}$                | $\infty$     |
|--------------------|--------------|---------------------------------|--------------|
| $\varphi'_{10}(s)$ | +            | 0                               | +            |
| $\varphi_{10}(s)$  | 0 $\nearrow$ | $\frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}}$ | $\nearrow$ 1 |

Tableau 17

| $s$                | 0            | $\frac{1}{\delta}$            | $\sqrt{2}$                                 | $s_*$                         | $\infty$     |
|--------------------|--------------|-------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------|--------------|
| $\varphi'_{12}(s)$ | +            | 0                             | -                                          | 0                             | +            |
| $\varphi_{10}(s)$  | $0 \nearrow$ | $\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}$ | $\searrow \varphi_{10}(\sqrt{2}) \nearrow$ | $\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}$ | $\nearrow 1$ |

Tableau 18

Les tableaux 16, 17, 18 sont valables selon que  $\delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ou  $\delta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Les tableaux 15-18 donnent le tableau 19, où pour fixer les idées,  $\delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$  et les tableaux 13 et 19 donnent la forme de la boucle  $(B_3)$  de la fig. 3. L'équation (23) de  $(C_4)$  place la boucle  $(B_4)$  comme symétrique de la boucle  $(B_3)$  par rapport à l'origine des axes. En faisant dans l'équation (23) de  $(C_3)$ ,  $\rho^2 + b^2 = 1$ , il vient  $\rho = -1$ . Par suite le seul point d'intersec-

|                    |                               |                               |                                         |                                                 |
|--------------------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------------|
| $s$                | 0                             | $s_*$                         | $\frac{1}{\delta}$                      | $\infty$                                        |
| $\frac{d\rho}{ds}$ |                               | +                             | $\frac{3\delta^2}{2(1+\delta^2)^2}$     | +                                               |
| $\rho$             | -1                            | $\nearrow \rho(s_*) \nearrow$ | $-\frac{\delta^2}{1+\delta^2} \nearrow$ | 0                                               |
| $\frac{db}{ds}$    | -                             | 0                             | +                                       | $\frac{\delta^2(1-2\delta^2)}{2(1+\delta^2)^2}$ |
| $b$                | 0                             | $\searrow b(s_*) \nearrow$    | $-\frac{\delta}{1+\delta^2} \nearrow$   | $-\frac{1}{\delta}(-1+\sqrt{1+\delta^2})$       |
| $\frac{db}{d\rho}$ | $-(\delta+\sqrt{1+\delta^2})$ | 0                             | $\frac{1-2\delta^2}{3\delta}$           | $\frac{1}{\delta}$                              |

Tableau 19

tion de  $(B_3)$  avec le cercle-unité, est le point  $A_-$ . En éliminant  $\rho^2$  entre les équations (23) et (27) de  $(C_1)$  et de  $(K_{\Lambda, -})$  il vient  $\rho = -\frac{1}{\delta(1 + l_1 b)}(\delta + 2\delta l_1 b + l_1 b^2)$ . En portant cette valeur dans l'équation (27) il vient  $b^4 = 0$ . La boucle  $(B_1)$  et l'arc  $(K_{\Lambda, -})$  se coupent par suite au seul point  $A_-$ . En éliminant  $\rho^2$  entre les équations (23) et (28) de  $(C_1)$  et de  $(K_{\mu, +})$  il vient  $\rho = -\frac{\delta l_1 - 2\delta b - b^2}{\delta(l_1 - b)}$ . En portant cette valeur dans (28), il vient  $b^4 = 0$ . Par suite la boucle  $(B_1)$  et l'arc  $(K_{\mu, +})$  se coupent au seul point  $A_-$ . En éliminant  $\rho^2$  entre les équations (23) et (29) de  $(C_3)$  et de  $(K_{\Lambda, +})$ , il vient  $\rho = -\frac{1 - 2l_3 b + \delta l_3 b^2}{1 - l_3 b}$ . En portant cette valeur dans (29), il vient  $b^4 = 0$ . Par suite la boucle  $(B_3)$  et l'arc  $(K_{\Lambda, +})$  se coupent au seul point  $A_-$ . En éliminant enfin  $\rho^2$  entre les équations (23) et (30) de  $(C_3)$  et de  $(K_{\mu, -})$ , il vient  $\rho = -\frac{l_3 + 2b - \delta b^2}{l_3 + b}$ . En portant cette valeur dans (30), il vient  $b^4 = 0$ . La boucle  $(B_3)$  et l'arc  $(K_{\mu, -})$  se coupent par suite au seul point  $A_-$ . Si  $(B_s^+)$ ,  $(B_s^-)$  désignent les arcs de la boucle  $(B_s)$  situés au-dessus, respectivement au-dessous de l'axe  $O\rho$  ( $s = 1, 3$ ) alors il résulte des tableaux 4 et 8 et des équations (27) et (28) des arcs  $(K_{\Lambda, -})$  et  $(K_{\mu, +})$  que l'arc  $(K_{\Lambda, -})$  et l'arc  $(B_1^-)$  sont tangents au point  $A_-$  et que l'arc  $(K_{\mu, +})$  et l'arc  $(B_1^+)$  sont tangents au point  $A_-$  et des tableaux 13 et 19 et des équations (29)

et (30) des arcs  $(K_{\Lambda_s,+})$  et  $(K_{\mu_s,-})$  que l'arc  $(K_{\Lambda_s,+})$  et l'arc  $(B_3^+)$  sont tangents au point  $A_-$  et que l'arc  $(K_{\mu_s,-})$  et l'arc  $(B_3^-)$  sont tangents au point  $A_-$ . Les équations (23) donnent l'origine comme seul point commun aux boucles  $(B_1)$  et  $(B_2)$  respectivement  $(B_3)$  et  $(B_4)$  et l'origine et le point  $A_-$  comme seuls points communs aux boucles  $(B_1)$  et  $(B_3)$  comme il résulte de la relation

$$C_1(\rho, b) - \delta \cdot C_3(\rho, b) = (1 + \delta^2) \cdot b(-1 + \rho^2 + b^2)$$

donnée par (23).

Ces informations donnent les figures 4 et 5.

### § 6. CONSTRUCTION DES ARCS $(\beta_s)$ ( $s = \overline{1, 4}$ ) DE (41)

La substitution  $b = (1 + \rho)s$  ( $s$  paramètre) donne pour la courbe  $(\Gamma_1)$  les branches

$$(57) \quad (\Gamma_{1,+}) : \rho = -1 + \frac{1}{\delta(1+s^2)} [\delta + s + \sqrt{-\delta^2 - 2\delta s + (1 + 2\delta^2)s^2}]$$

$$b = (1 + \rho)s$$

et

(58)

$$(\Gamma_{1,-}) : \rho = -1 + \frac{1}{\delta(1+s^2)} [\delta + s - \sqrt{-\delta^2 - 2\delta s + (1 + 2\delta^2)s^2}]$$

$$b = (1 + \rho)s$$

Il s'ensuit le long de la branche  $(\Gamma_{1,+})$

(59)

$$1 - (\rho^2 + b^2) = \frac{2}{\delta^2(1+s^2)} \cdot \varphi_{12}(s) \quad \text{avec}$$

$$\varphi_{12}(s) = \delta^2 + \delta s - (1 + \delta^2)s^2 - s\sqrt{-\delta^2 - 2\delta s + (1 + 2\delta^2)s^2}$$

La relation  $\varphi_{12}(s) = 0$  s'écrit par rationalisation  $(1 - s^2)(\delta + 2s - \delta s^2) = 0$ . Mais, pour  $s = \frac{1}{\delta}(1 \pm \sqrt{1 + \delta^2})$  ou  $s = 1$ ,  $\varphi_{12}(s) \neq 0$  et  $\varphi_{12}(-1) = 0$ ,  $\varphi'_{12}(-1) \neq 0$ .

| s                 | $-\infty$ | -1 | $-\frac{\delta}{1 + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}$ | $\frac{\delta}{-1 + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}$ | $\infty$  |
|-------------------|-----------|----|----------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------|
| $\varphi_{12}(s)$ | $-\infty$ | -  | 0                                            | +                                            | $-\infty$ |

Tableau 20

Il en résulte le tableau 20, selon lequel la branche  $(\beta_{1,+})$  s'obtient de (57) pour les valeurs  $-1 \leq s \leq \frac{-\delta}{1 + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}$  du paramètre.

Or (57) donne

$$(60) \quad \begin{aligned} & -[\delta - (1 + 4\delta^2)s - 3\delta s^2 + (1 + 2\delta^2)s^3] + \\ & \frac{d\rho}{ds} = \frac{+(1 - 2\delta s - s^2) \cdot \sqrt{-\delta^2 - 2\delta s + (1 + 2\delta^2)s^2}}{\delta(1 + s^2)^2 \cdot \sqrt{-\delta^2 - 2\delta s + (1 + 2\delta^2)s^2}} \\ & \frac{db}{ds} = \frac{-[\delta^2 + 3\delta s - (2 + 5\delta^2)s^2 - \delta s^3] + (\delta + 2s - \delta s^2) \sqrt{-\delta^2 - 2\delta s + (1 + 2\delta^2)s^2}}{\delta(1 + s^2)^2 \cdot \sqrt{-\delta^2 - 2\delta s + (1 + 2\delta^2)s^2}} \\ & \frac{db}{d\rho} = \frac{\delta^2 + 3\delta s - (2 + 5\delta^2)s^2 - \delta s^3 - (\delta + 2s - \delta s^2) \sqrt{-\delta^2 - 2\delta s + (1 + 2\delta^2)s^2}}{\delta - (1 + 4\delta^2)s - 3\delta s^2 + (1 + 2\delta^2)s^3 - (1 - 2\delta s - s^2) \sqrt{-\delta^2 - 2\delta s + (1 + 2\delta^2)s^2}} \end{aligned}$$

Les relations  $\frac{d\rho}{ds} = 0$ ,  $\frac{db}{ds} = 0$  s'écrivent respectivement

$$(61) \quad \begin{aligned} \varphi_{13}(s) &= \frac{\delta - (1 + 4\delta^2)s - 3\delta s^2 + (1 + 2\delta^2)s^3}{(1 - 2\delta s - s^2) \sqrt{-\delta^2 - 2\delta s + (1 + 2\delta^2)s^2}} = 1 \\ \varphi_{15}(s) &= \frac{\delta^2 + 3\delta s - (2 + 5\delta^2)s^2 - \delta s^3}{(\delta + 2s - \delta s^2) \sqrt{-\delta^2 - 2\delta s + (1 + 2\delta^2)s^2}} = 1 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(62) \quad \begin{aligned} \varphi'_{13}(s) &= \frac{2\delta(1 + \delta^2)(1 + s^2)[\delta + 3\delta s^2 - 2(1 + 2\delta^2)s^3]}{(1 - 2\delta s - s^2)^2[-\delta^2 - 2\delta s + (1 + 2\delta^2)s^2] \sqrt{-\delta^2 - 2\delta s + (1 + 2\delta^2)s^2}} \\ \varphi'_{15}(s) &= \frac{2\delta(1 + \delta^2)s(1 + s^2)[3\delta^2 + 6\delta s - (2 + 5\delta^2)s^2]}{(\delta + 2s - \delta s^2)^2[-\delta^2 - 2\delta s + (1 + 2\delta^2)s^2] \sqrt{-\delta^2 - 2\delta s + (1 + 2\delta^2)s^2}} \end{aligned}$$

Il en résulte les tableaux 21 et 22, qui donnent le tableau 23.

| s                 | -1                               | $s_7$ | $-\frac{\delta}{1 + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}$ |
|-------------------|----------------------------------|-------|----------------------------------------------|
| $\varphi_{13}(s)$ | $-\frac{1 - \delta}{1 + \delta}$ | 1     | $\infty$                                     |

Tableau 21

|                    |                                             |                                             |                                                                          |                                              |
|--------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| $s$                | -1                                          | $\frac{1}{\delta}(1 - \sqrt{1 + \delta^2})$ | $\frac{\delta}{2 + 5\delta^2}[3 - \sqrt{15(1 + \delta^2)}]$              | $-\frac{\delta}{1 + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}$ |
| $\varphi'_{16}(s)$ | +                                           | 0                                           | -                                                                        |                                              |
| $\varphi_{16}(s)$  | $1 + \frac{2\delta^2}{1 + \delta} \nearrow$ | $\pm \infty \nearrow$                       | $-\left(5\sqrt{5} + 6\sqrt{\frac{3}{1 + \delta^2}}\right) < -1 \searrow$ | $-\infty$                                    |

Tableau 22

Les relations (58) donnent le long de la branche  $(\Gamma_{1,-})$

|                    |          |                               |                                              |
|--------------------|----------|-------------------------------|----------------------------------------------|
| $s$                | -1       | $s_7$                         | $-\frac{\delta}{1 + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}$ |
| $\frac{d\rho}{ds}$ | +        | 0                             | -                                            |
| $\rho$             | 0        | $\nearrow \rho(s_7) \searrow$ | $\rho_1$                                     |
| $\frac{db}{ds}$    |          | +                             |                                              |
| $b$                | -1       | $\nearrow b(s_7) \nearrow$    | $b_1$                                        |
| $\frac{db}{d\rho}$ | $\delta$ | $\infty$                      |                                              |

Tableau 23

$$1 - (\rho^2 + b^2) = \frac{2}{\delta^2(1 + s^2)} \cdot \varphi_{16}(s) \quad (63)$$

avec  $\varphi_{16}(s) = \delta^2 + \delta s - (1 + \delta^2)s^2 + s \cdot \sqrt{-\delta^2 - 2\delta s + (1 + 2\delta^2)s^2}$

La relation  $\varphi_{16}(s) = 0$  s'écrit par rationalisation

$$(1 - s^2)(\delta + 2s - \delta s^2) = 0$$

Mais, dans notre cas,  $\varphi_{16}(-1) \neq 0$ ,  $\varphi_{16}\left(\frac{1 - \sqrt{1 + \delta^2}}{\delta}\right) = \varphi_{16}\left(\frac{1 + \sqrt{1 + \delta^2}}{\delta}\right) = \varphi_{16}(1) = 0$ ,  $\varphi'_{16}\left(\frac{1 - \sqrt{1 + \delta^2}}{\delta}\right) \cdot \varphi'_{16}\left(\frac{1 + \sqrt{1 + \delta^2}}{\delta}\right) \cdot \varphi'_{16}(1) \neq 0$

Il en résulte le tableau 24, selon lequel

|                    |           |                                          |                                              |                                               |   |                                          |           |
|--------------------|-----------|------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------|---|------------------------------------------|-----------|
| $s$                | $-\infty$ | $\frac{1 - \sqrt{1 + \delta^2}}{\delta}$ | $-\frac{\delta}{1 + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}$ | $-\frac{\delta}{-1 + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}$ | 1 | $\frac{1 + \sqrt{1 + \delta^2}}{\delta}$ | $+\infty$ |
| $\varphi'_{16}(s)$ | -         | 0                                        | +                                            |                                               | - | 0                                        | +         |

Tableau 24

la branche  $(\beta_{1,-})$  s'obtient de (58) pour les valeurs  $\frac{1 - \sqrt{1 + \delta^2}}{\delta} \leq s \leq -\frac{\delta}{1 + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}$  et  $1 \leq s \leq \frac{1 + \sqrt{1 + \delta^2}}{\delta}$  du paramètre.

Les rexpessions de  $\frac{d\rho}{ds}$ ,  $\frac{db}{ds}$ ,  $\frac{db}{d\rho}$  le long de la branche  $(\beta_{1,-})$  s'obtiennent en changeant en (60) le signe de  $\sqrt{-\delta^2 - 2\delta s + (1 + 2\delta^2)s^2}$ . Par conséquent, les relations  $\frac{d\rho}{ds} = 0$ ,  $\frac{db}{ds} = 0$  s'écrivent respectivement  $\varphi_{13}(s) = -1$ ,  $\varphi_{15}(s) = -1$ , avec  $\varphi_{13}(s)$  et  $\varphi_{15}(s)$  données par (61). Les relations (62) donnent dans notre cas les tableaux (25) et (26).

|                    |                                              |                                              |                                          |                                          |
|--------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|
| $s$                | $\frac{1 - \sqrt{1 + \delta^2}}{\delta}$     | $-\frac{\delta}{1 + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}$ | 1                                        | $\frac{1 + \sqrt{1 + \delta^2}}{\delta}$ |
| $\varphi'_{13}(s)$ | +                                            |                                              | -                                        |                                          |
| $\varphi_{13}(s)$  | $1 + \frac{2}{\sqrt{1 + \delta^2}} \nearrow$ | $\infty$                                     | $\frac{1 + \delta}{1 - \delta} \searrow$ | $1 - \frac{2}{\sqrt{1 + \delta^2}} > -1$ |

Tableau 25

|                    |                                                                                              |                                                     |                                              |                                                                                                                                     |                                                     |                                          |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|------------------------------------------|
| $s$                | $\frac{1 - \sqrt{1 + \delta^2}}{\delta}$                                                     | $\frac{3 - \sqrt{15(1 + \delta^2)}}{2 + 5\delta^2}$ | $-\frac{\delta}{1 + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}$ | $\frac{\delta}{1}$                                                                                                                  | $\frac{3 + \sqrt{15(1 + \delta^2)}}{2 + 5\delta^2}$ | $\frac{1 + \sqrt{1 + \delta^2}}{\delta}$ |
| $\varphi'_{15}(s)$ | +                                                                                            | 0                                                   | -                                            | +                                                                                                                                   | 0                                                   | -                                        |
| $\varphi_{15}(s)$  | $-\infty \nearrow -\left(5\sqrt{5} + 6\sqrt{\frac{3}{1 + \delta^2}}\right) \searrow -\infty$ |                                                     |                                              | $-\left(1 + 2\frac{\delta^2}{1 - \delta}\right) \nearrow -\left(5\sqrt{5} - 6\sqrt{\frac{3}{1 + \delta^2}}\right) \searrow -\infty$ |                                                     |                                          |

Tableau 26

Au tableau 26 il est supposé, pour fixer les idées,  $\delta > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ , ce qui équivaut à  $1 < \frac{\delta}{2+5\delta^2} [3 + \sqrt{15(1+\delta^2)}]$ .

Si  $\delta \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ , alors la section  $s \geq 1$  du tableau 26 se remplace par le tableau 27. Lorsque  $\delta$  croît de 0 à 1.

| $s$               | 1                                              | $\frac{1+\sqrt{1+\delta^2}}{\delta}$ |
|-------------------|------------------------------------------------|--------------------------------------|
| $\varphi_{15}(s)$ | —                                              | —                                    |
| $\varphi_{16}(s)$ | $-\left(1 + \frac{2\delta^2}{1-\delta}\right)$ | $-\infty$                            |

Tableau 27

$\varphi_{14}(\delta) = -5\sqrt{5} + 6\sqrt{\frac{3}{1+\delta^2}}$  décroît de  $-5\sqrt{5} + 6\sqrt{3} > 1$  à  $-5\sqrt{5} + 6\sqrt{\frac{3}{2}} < -1$  mais du fait que  $\varphi_{14}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 3 - 2\sqrt{5} < -1$  il résulte que pour  $\delta > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ , au tableau 26,  $-5\sqrt{5} + 6\sqrt{\frac{3}{1+\delta^2}} < -1$ . Les tableaux 23 et 28 donnent la forme de l'arc  $(\beta_1)$  de la fig. 6. L'arc  $(\beta_2)$  est selon son équation de (41) le symétrique de l'arc  $(\beta_1)$  par rapport à l'origine des axes. La substitution  $b = (1+\rho)s$  dans l'équation (41) de  $(\Gamma_3)$  donne les branches

$$(64) \quad (\Gamma_{3,+}) : \rho = -1 + \frac{1}{1+s^2} [1 - \delta s + \sqrt{-1 + 2\delta s + (2 + \delta^2)s^2}]$$

$$b = (1 + \rho)s$$

et

| $s$                | $\frac{1-\sqrt{1+\delta^2}}{\delta}$    | $-\frac{\delta}{1+\sqrt{2(1+\delta^2)}}$ | 1        | $\frac{1+\sqrt{1+\delta^2}}{\delta}$    |
|--------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|----------|-----------------------------------------|
| $\frac{d\rho}{ds}$ | +                                       |                                          | —        | —                                       |
| $\rho$             | -1                                      | $\rho_1$                                 | 0        | -1                                      |
| $\frac{db}{ds}$    | —                                       |                                          | —        | —                                       |
| $b$                | 0                                       | $b_1$                                    | 1        | 0                                       |
| $\frac{db}{d\rho}$ | $\frac{1}{\delta}(1-\sqrt{1+\delta^2})$ |                                          | $\delta$ | $\frac{1}{\delta}(1+\sqrt{1+\delta^2})$ |

Tableau 28

13

$$(65) \quad (\Gamma_{3,-}) : \rho = -1 + \frac{1}{1+s^2} [1 - \delta s - \sqrt{-1 + 2\delta s + (2 + \delta^2)s^2}]$$

$$b = (1 + \rho)s$$

Le long de la branche  $(\Gamma_{3,+})$ , (64) donne

$$(66) \quad 1 - (\rho^2 + b^2) = \frac{2}{1+s^2} \cdot \varphi_{17}(s) \text{ avec}$$

$$\varphi_{17}(s) = 1 - \delta s - (1 + \delta^2)s^2 + \delta s \sqrt{-1 + 2\delta s + (2 + \delta^2)s^2}$$

La relation  $\varphi_{17}(s) = 0$  s'écrit par rationalisation  $(1-s^2)(1-2\delta s-s^2)=0$ . Mais, pour  $s = -\delta \pm \sqrt{1+\delta^2}$ ,  $\varphi_{17}(s) \neq 0$  et  $\varphi_{17}(-1) = \varphi_{17}(1) = 0$ ,  $\varphi'_{17}(-1) \cdot \varphi'_{17}(1) \neq 0$ . Il s'ensuit le tableau 29, selon lequel la branche  $(\beta_{3,+})$  est donnée par (64) pour les valeurs  $s \in \left[-1, -\frac{\delta + \sqrt{2(1+\delta^2)}}{2 + \delta^2}\right]$  et  $s \in \left[\frac{-\delta + \sqrt{2(1+\delta^2)}}{2 + \delta^2}, 1\right]$  du paramètre. Or, (64) donne

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\delta + (4 + \delta^2)s - 3\delta s^2 - (2 + \delta^2)s^3 - (\delta + 2s - \delta s^2) \sqrt{-1 + 2\delta s + (2 + \delta^2)s^2}}{(1+s^2)^2 \cdot \sqrt{-1 + 2\delta s + (2 + \delta^2)s^2}}$$

$$(67) \quad \frac{db}{ds} = \frac{-1 + 3\delta s + (5 + 2\delta^2)s^2 - \delta s^3 + (1 - 2\delta s - s^2) \sqrt{-1 + 2\delta s + (2 + \delta^2)s^2}}{(1+s^2)^2 \sqrt{-1 + 2\delta s + (2 + \delta^2)s^2}}$$

$$\frac{db}{d\rho} = \frac{-1 + 3\delta s + (5 + 2\delta^2)s^2 - \delta s^3 + (1 - 2\delta s - s^2) \sqrt{-1 + 2\delta s + (2 + \delta^2)s^2}}{\delta + (4 + \delta^2)s - 3\delta s^2 - (2 + \delta^2)s^3 - (\delta + 2s - \delta s^2) \sqrt{-1 + 2\delta s + (2 + \delta^2)s^2}}$$

Les relations  $\frac{d\rho}{ds} = 0$ ,  $\frac{db}{ds} = 0$  s'écrivent respectivement

$$(68) \quad \varphi_{18}(s) = \frac{\delta + (4 + \delta^2)s - 3\delta s^2 - (2 + \delta^2)s^3}{(\delta + 2s - \delta s^2) \sqrt{-1 + 2\delta s + (2 + \delta^2)s^2}} = 1$$

$$\varphi_{19}(s) = \frac{1 - 3\delta s - (5 + 2\delta^2)s^2 + \delta s^3}{(1 - 2\delta s - s^2) \sqrt{-1 + 2\delta s + (2 + \delta^2)s^2}} = 1$$

ce qui donne

$$\varphi'_{18}(s) = \frac{-2(1+\delta^2)(1+s^2)[\delta + 3\delta s^2 + 2(2+\delta^2)s^3]}{(\delta + 2s - \delta s^2)^2 \cdot [-1 + 2\delta s + (2 + \delta^2)s^2] \sqrt{-1 + 2\delta s + (2 + \delta^2)s^2}}$$

$$(69) \quad \varphi'_{19}(s) = \frac{2(1+\delta^2)(1+s^2) \cdot s \cdot [3 - 6\delta s - (5 + 2\delta^2)s^2]}{(1 - 2\delta s - s^2)^2 [-1 + 2\delta s + (2 + \delta^2)s^2] \sqrt{-1 + 2\delta s + (2 + \delta^2)s^2}}$$

|                   |           |                                 |      |                                                     |                                                     |                               |     |
|-------------------|-----------|---------------------------------|------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-------------------------------|-----|
| $s$               | $-\infty$ | $-(\delta + \sqrt{1+\delta^2})$ | $-1$ | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1+\delta^2)}}{2+\delta^2}$ | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1+\delta^2)}}{2+\delta^2}$ | $-\delta + \sqrt{1+\delta^2}$ | $1$ |
| $\varphi_{17}(s)$ |           | -                               | 0    | +                                                   |                                                     | +                             | 0   |

Tableau 29

En posant en (69)

$$P_1(s) = \delta + 3\delta s^2 + 2(2 + \delta^2)s^3$$

il résulte le tableau 30, où

$$P_1(-1) = -2[1 + (1 - \delta)^2] < 0$$

|           |           |            |       |                              |                                              |            |
|-----------|-----------|------------|-------|------------------------------|----------------------------------------------|------------|
| $s$       | $-\infty$ | $-1$       | $s_0$ | $-\frac{\delta}{2+\delta^2}$ | $0$                                          | $\infty$   |
| $P_1'(s)$ |           | +          |       | 0                            | -                                            | 0          |
| $P_1(s)$  | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$   | $\nearrow$                   | $P_1\left(-\frac{\delta}{2+\delta^2}\right)$ | $\searrow$ |

Tableau 30

D'autre part,

$$P_1\left[-\frac{\delta + \sqrt{2(1+\delta^2)}}{2+\delta^2}\right] = -\frac{1+\delta^2}{(2+\delta^2)^2} [\delta(2-\delta^2) + 4\sqrt{2(1+\delta^2)}] < 0$$

et  $\frac{1-\sqrt{1+\delta^2}}{\delta} > -\frac{\delta + \sqrt{2(1+\delta^2)}}{2+\delta^2}$ , du fait que

|           |              |                      |            |
|-----------|--------------|----------------------|------------|
| $x$       | $0$          | $\frac{\sqrt{2}}{3}$ | $1$        |
| $P_3'(x)$ | +            | 0                    | -          |
| $P_3(x)$  | $-4\sqrt{2}$ | $\nearrow$           | $\searrow$ |

Tableau 31-32

ceci équivaut à  $2\sqrt{1+\delta^2} > 2 - \sqrt{2}\delta + \delta^2$  c'est-à-dire à  $\delta P_3(\delta) < 0$ , avec  $P_3(x) = x(x - \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}$ , relation attestée par le tableau 31-32.

Il en résulte le tableau 33. La seconde relation (69) donne le tableau 34,

|                   |                             |                                                     |                                                     |            |            |
|-------------------|-----------------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|------------|------------|
| $s$               | $-1$                        | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1+\delta^2)}}{2+\delta^2}$ | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1+\delta^2)}}{2+\delta^2}$ | $s_0$      | $1$        |
| $\varphi_{18}(s)$ | +                           |                                                     |                                                     | -          |            |
| $\varphi_{19}(s)$ | $\frac{1+\delta}{1-\delta}$ | $\nearrow$                                          | $\infty$                                            | $\nearrow$ | $\searrow$ |

Tableau 33

valable au cas  $\delta < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ . Au cas où  $\delta \geq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ , la section  $s < 0$

|                   |                                  |                                                     |                                                     |                                                     |                                                     |            |
|-------------------|----------------------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|------------|
| $s$               | $-1$                             | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1+\delta^2)}}{2+\delta^2}$ | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1+\delta^2)}}{2+\delta^2}$ | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1+\delta^2)}}{2+\delta^2}$ | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1+\delta^2)}}{2+\delta^2}$ | $1$        |
| $\varphi_{18}(s)$ | +                                | 0                                                   | -                                                   | +                                                   | 0                                                   | -          |
| $\varphi_{19}(s)$ | $1 - \frac{2}{\delta(1-\delta)}$ | $\nearrow$                                          | $\searrow$                                          | $\nearrow$                                          | $\searrow$                                          | $\nearrow$ |

Tableau 34

du tableau 34 se remplace par le tableau 35.

|                    |                                    |                                                         |
|--------------------|------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $s$                | -1                                 | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}{2 + \delta^2}$ |
| $\varphi'_{19}(s)$ | -                                  |                                                         |
| $\varphi_{19}(s)$  | $1 - \frac{2}{\delta(1 - \delta)}$ | $-\infty$                                               |

Tableau 35

Les tableaux 33, 34 et 25 donnent le tableau 36. Les relations (65) donnent le long de la branche  $(\Gamma_{3,-})$

$$(70) \begin{cases} 1 - (\rho^2 + b^2) = \\ = \frac{2}{1 + s^2} \cdot \varphi_{20}(s) \text{ avec} \\ \varphi_{20}(s) = 1 - \delta s - (1 + \delta^2)s^2 - \\ - \delta s \sqrt{-1 + 2\delta s + (2 + \delta^2)s^2} \end{cases}$$

La relation  $\varphi_{20}(s) = 0$  s'écrit comme au cas de la branche  $(\Gamma_{3,+})$ ,  $(1 - s^2)(1 - 2\delta s - s^2) = 0$ . Mais, dans notre cas, pour  $s = \pm 1$ ,  $\varphi_{20}(s) \neq 0$ ,

$$\varphi_{20}(-\delta - \sqrt{1 + \delta^2}) = \varphi_{20}(-\delta + \sqrt{1 + \delta^2}) = 0 \text{ et}$$

$$\varphi'_{20}(-\delta - \sqrt{1 + \delta^2}) \cdot \varphi'_{20}(-\delta + \sqrt{1 + \delta^2}) \neq 0.$$

Il en résulte le tableau 37 selon lequel la branche  $(\beta_{3,-})$  est donnée

|                    |                     |                                                         |                                                         |          |                     |
|--------------------|---------------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|----------|---------------------|
| $s$                | -1                  | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}{2 + \delta^2}$ | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}{2 + \delta^2}$ | $s_0$    | 1                   |
| $\frac{d\rho}{ds}$ | -                   |                                                         | +                                                       | 0        | -                   |
| $\rho$             | 0                   | $\searrow$                                              | $\rho_2$                                                | $\rho_3$ | $\nearrow$          |
| $\frac{db}{ds}$    | +                   |                                                         |                                                         |          | +                   |
| $b$                | -1                  | $\nearrow$                                              | $b_2$                                                   | $b_3$    | $\nearrow$          |
| $\frac{db}{d\rho}$ | $-\frac{1}{\delta}$ |                                                         |                                                         | $\infty$ | $-\frac{1}{\delta}$ |

Tableau 36

|                   |           |                                   |                                                         |                                                         |                                 |           |
|-------------------|-----------|-----------------------------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------|-----------|
| $s$               | $-\infty$ | $-(\delta + \sqrt{1 + \delta^2})$ | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}{2 + \delta^2}$ | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}{2 + \delta^2}$ | $-\delta + \sqrt{1 + \delta^2}$ | $+\infty$ |
| $\varphi_{20}(s)$ | -         | 0                                 | +                                                       |                                                         | +                               | 0         |

Tableau 37

par (65) pour les valeurs  $s \in \left[ -(\delta + \sqrt{1 + \delta^2}), -\frac{\delta + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}{2 + \delta^2} \right]$  et  $s \in \left[ -\frac{\delta + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}{2 + \delta^2}, -\delta + \sqrt{1 + \delta^2} \right]$  du paramètre. Les expressions de  $\frac{d\rho}{ds}$ ,  $\frac{db}{ds}$ ,  $\frac{db}{d\rho}$  le long de la branche  $(\beta_{3,-})$  s'obtiennent en changeant en (67) le signe de  $\sqrt{-1 + 2\delta s + (2 + \delta^2)s^2}$ .

Par suite, les relations  $\frac{d\rho}{ds} = 0$ ,  $\frac{db}{ds} = 0$  s'écrivent respectivement  $\varphi_{18}(s) = -1$ ,  $\varphi_{19}(s) = -1$ , avec  $\varphi_{18}(s)$ ,  $\varphi_{19}(s)$  données par (68). Les relations (69) donnent dans notre cas les tableaux 38 et 39. Au tableau 39 nous avons  $-5\sqrt{5} + 6\delta \sqrt{\frac{3}{1 + \delta^2}} < -5\sqrt{5} + 6\sqrt{\frac{3}{2}} < -1$ .

Les tableaux 38 et 39 donnent le tableau 40.

|                    |                                                                |                                                         |                                                         |                                           |
|--------------------|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $s$                | $-(\delta + \sqrt{1 + \delta^2})$                              | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}{2 + \delta^2}$ | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}{2 + \delta^2}$ | $-\delta + \sqrt{1 + \delta^2}$           |
| $\varphi'_{18}(s)$ | +                                                              |                                                         |                                                         | -                                         |
| $\varphi_{18}(s)$  | $1 - \frac{2\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} > -1 \nearrow \infty$ |                                                         | +                                                       | $1 + \frac{2\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}}$ |

Tableau 38

Les tableaux 36 et 40 donnent la forme de l'arc  $(\beta_3)$  de la fig. 7. L'arc  $(\beta_4)$  est selon son équation (41) symétrique de l'arc  $(\beta_3)$  par rapport à l'origine des axes. En éliminant  $\rho^2$  entre l'équation (27) de l'arc  $(K_{\Lambda,-})$  qui borne inférieurement la région  $(\Delta_{1,r})$  de la fig. 6 et l'équation (41) de  $(\Gamma_1)$ , il vient

$$\rho = -\frac{1}{\delta(1 + l_1 b)} [\delta + 2\delta l_1 b + (-\delta - l_1 + \delta l_1^2) b^2].$$

En portant l'expression de  $\rho$  obtenue dans (27), il vient  $b^4 = 0$ . En éliminant  $\rho^2$  entre l'équation

$$(71) \quad \rho^2 + b^2 + 2l_1 b - 1 = 0$$

de l'arc  $(K_{\Lambda,+})$  qui borne supérieurement la région  $(\Delta_{1,r})$  sur la fig. 6 et l'équation (41) de  $(\Gamma_1)$ , il vient  $\rho = -\frac{1}{\delta(1 - l_1 b)} [\delta - 2\delta l_1 b + (-\delta + l_1 + \delta l_1^2) b^2]$ .

Les tableaux 38 et 39 donnent le tableau 40.

|                    |                                                                                             |                                                         |                                                           |                                                            |                                                                            |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $s$                | $-(\delta + \sqrt{1 + \delta^2}) - \frac{3\delta + \sqrt{15(1 + \delta^2)}}{5 + 2\delta^2}$ | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}{2 + \delta^2}$ | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}{2 + \delta^2}$   | $-\frac{3\delta + \sqrt{15(1 + \delta^2)}}{5 + 2\delta^2}$ | $-\delta + \sqrt{1 + \delta^2}$                                            |
| $\varphi'_{1s}(s)$ | +                                                                                           | 0                                                       | -                                                         | +                                                          | 0                                                                          |
| $\varphi_{1s}(s)$  | $-\infty$                                                                                   | $\nearrow$                                              | $-5\sqrt{5} + 6\delta \sqrt{\frac{3}{1 + \delta^2}} < -1$ | $-\infty$                                                  | $\nearrow$                                                                 |
|                    |                                                                                             |                                                         |                                                           |                                                            | $-\left(5\sqrt{5} + 6\delta \sqrt{\frac{3}{1 + \delta^2}}\right) \nearrow$ |
|                    |                                                                                             |                                                         |                                                           |                                                            | $-\infty$                                                                  |

Tableau 39

|                    |                                                                                          |                                                         |                                                         |                                 |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------|
| $s$                | $-(\delta + \sqrt{1 + \delta^2}) - \frac{\delta + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}{2 + \delta^2}$ | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}{2 + \delta^2}$ | $-\frac{\delta + \sqrt{2(1 + \delta^2)}}{2 + \delta^2}$ | $-\delta + \sqrt{1 + \delta^2}$ |
| $\frac{d\rho}{ds}$ | +                                                                                        |                                                         |                                                         | -                               |
| $\rho$             | -1                                                                                       | $\nearrow$                                              | $\rho_3$                                                | $\nearrow$                      |
| $\frac{db}{ds}$    | -                                                                                        |                                                         |                                                         | -                               |
| $b$                | 0                                                                                        | $\nearrow$                                              | $b_3$                                                   | $\nearrow$                      |
| $\frac{db}{d\rho}$ | $-(\delta + \sqrt{1 + \delta^2})$                                                        |                                                         |                                                         | $-\delta + \sqrt{1 + \delta^2}$ |

Tableau 40

+  $8l_1^2b^2$ ]. En portant la valeur de  $\rho$  obtenue dans (71), il vient  $b^2[48 - 8\delta l_1 b + (9 + \delta^2)l_1 b^2] = 0$ . Le réalisant du polynôme du second degré en  $b$  écrit dans les crochets est  $-\frac{4\delta l_1(3 - \delta^2)^2}{5 + \delta^2 + 4\sqrt{1 + \delta^2}} < 0$  (avec  $l_1$  de (27)). Il en résulte que l'arc  $(\beta_1)$  coupe la frontière de la région  $(\Delta_{1,r})$  au seul point  $A_-$  (fig. 6). En éliminant  $\rho^2$  entre l'équation (27) de  $(K_{\Lambda,-})$  et l'équation (41) de  $(\Gamma_3)$ , il vient  $\rho = -\frac{1}{1 + l_1 b} [1 + 2l_1 b + (-1 + \delta l_1 + l_1^2)b^2]$ .

En portant la valeur de  $\rho$  obtenue dans (27), il vient  $b^2[2(-1 + \sqrt{1 + \delta^2}) + 4\delta b + (4 + \delta^2)b^2] = 0$ . Le réalisant du polynôme du second degré en  $b$  qui figure dans les crochets est  $-\frac{1}{4 + 3\delta^2 + (4 + \delta^2)\sqrt{1 + \delta^2}} < 0$ . En éliminant  $\rho^2$  entre l'équation (71) de l'arc  $(K_{\Lambda,+})$  et l'équation (41) de  $(\Gamma_3)$ , il vient  $\rho = -\frac{1}{1 - l_1 b} [1 - 2l_1 b + (-1 - \delta l_1 + l_1^2)b^2]$ . En portant la valeur de  $\rho$  obtenue dans (71), il vient

$$b^2[2\delta(1 - \delta^2) - 4l_1\delta(1 - \delta^2)b + (4 - 3\delta^2 + \delta^4)l_1 b^2] = 0$$

Le réalisant du polynôme du second degré en  $b$  écrit dans les crochets est  $-\frac{8\delta^2 l_1(1 - \delta^2)(3 - \delta^2)^2}{2 - \delta^2 + \delta^4 + 2(1 - \delta^2)\sqrt{1 + \delta^2}} < 0$ . Il en résulte que l'arc  $(\beta_3)$  coupe la frontière de la région  $(\Delta_{1,r})$  au seul point  $A_-$  (fig. 7). Du fait que (41) donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} [\Gamma_1(\rho, b) + \Gamma_2(\rho, b)] &= \Gamma_3(\rho, b) + \Gamma_4(\rho, b) = \\ &= 2[\rho^2 + (1 - b)^2][\rho^2 + (1 + b)^2], \end{aligned}$$

il résulte que les arcs  $(\beta_1)$  et  $(\beta_2)$  se coupent aux seuls points  $B_-$  et  $B_+$ , et que les arcs  $(\beta_3)$  et  $(\beta_4)$  se coupent aux seuls points  $B_-$  et  $B_+$ . Si  $(\beta_1^-)$ ,  $(\beta_1^+)$  désignent respectivement les sections de l'arc  $(\beta_1)$  situées au-dessous, respectivement au-dessus de l'axe  $O\rho$ , il résulte du tableau 28 et de (27) que l'arc  $(\beta_1^-)$  est tangent au point  $A_-$  à l'arc  $(K_{\Lambda,-})$ .

Ces informations donnent les figures 6 et 7.

### § 7. Démonstration de la proposition (44)

Il n'y a rien à changer à la construction des boucles  $(B_s^0)$  ( $s = \overline{1, 4}$ ) par rapport à la construction des boucles  $(B_s)$ , ( $s = \overline{1, 4}$ ) ni à l'étude de leur position par rapport aux arcs de cercle  $(K_{\mu_1^0,-})$ ,  $(K_{\Lambda_1^0,-})$ ,  $(K_{\Lambda_1^0,+})$ ,  $(K_{\mu_1^0,+})$ ,  $(K_{\mu_3^0,-})$ ,  $(K_{\Lambda_3^0,-})$ ,  $(K_{\Lambda_3^0,+})$ ,  $(K_{\mu_3^0,+})$  par rapport à l'étude de la position des boucles  $(B_s)$ , ( $s = \overline{1, 4}$ ) par rapport aux arcs de cercle  $(K_{\mu,-})$ ,  $(K_{\Lambda,-})$ ,  $(K_{\Lambda,+})$ ,  $(K_{\mu,+})$ ,  $(K_{\mu,-})$ ,  $(K_{\Lambda,-})$ ,  $(K_{\Lambda,+})$ ,  $(K_{\mu,+})$ , (notations 5), au changement éventuel signalé dans (44) près. Les figures 2, 3, 4, 5 se conservent donc, à ce changement éventuel près. Les seuls changements à apporter à la construction des arcs  $(\beta_1)$  et  $(\beta_3)$  pour obtenir les arcs  $(\beta_1^0)$  et  $(\beta_3^0)$

sont les suivants: 1°. En (59)  $\varphi_{12}(s) \neq 0$  pour  $s = \frac{1}{\delta_0} (1 \pm \sqrt{1 + \delta_0^2})$  et  $\varphi_{12}(-1) = \varphi_{12}(1) = 0$ ,  $\varphi'_{12}(-1) : \varphi'_{12}(1) \neq 0$ . 2°. Les tableaux 20, 21 et 23 se remplacent respectivement par les tableaux 41-42, 43 et 46 et le tableau 22 par les tableaux 44 su 45 (selon que  $\delta_0 \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  ou  $\delta_0 > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ).

|                   |           |      |                                              |                                               |                                                                                   |           |     |     |           |
|-------------------|-----------|------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|-----|-----|-----------|
| $s$               | $-\infty$ | $-1$ | $-\frac{\delta_0}{1+\sqrt{2(1+\delta_0^2)}}$ | $-\frac{\delta_0}{-1+\sqrt{2(1+\delta_0^2)}}$ | $1$                                                                               | $+\infty$ |     |     |           |
| $\varphi_{12}(s)$ | $-\infty$ | $-$  | $0$                                          | $+$                                           |  | $+$       | $0$ | $-$ | $-\infty$ |

Tableau 41-42

|                   |                                     |            |                                                  |                                                   |                                     |
|-------------------|-------------------------------------|------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------|-------------------------------------|
| $s$               | $-1$                                | $s_7^0$    | $-\frac{\delta_0}{1 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}$ | $-\frac{\delta_0}{-1 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}$ | $1$                                 |
| $\varphi_{13}(s)$ | $\frac{\delta_0 - 1}{1 + \delta_0}$ | $\nearrow$ | $1$                                              | $\nearrow$                                        | $\infty$                            |
|                   |                                     |            |                                                  |                                                   | $\infty$                            |
|                   |                                     |            |                                                  |                                                   | $\searrow$                          |
|                   |                                     |            |                                                  |                                                   | $\frac{1 + \delta_0}{\delta_0 - 1}$ |

Tableau 43

|                    |                                        |                                              |                                                                  |                                                  |                                                           |
|--------------------|----------------------------------------|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| $s$                | $-1$                                   | $\frac{1 - \sqrt{1 + \delta_0^2}}{\delta_0}$ | $\delta_0 \frac{3 - \sqrt{15(1 + \delta_0^2)}}{2 + 5\delta_0^2}$ | $-\frac{\delta_0}{1 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}$ | $-\frac{\delta_0}{-1 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}$         |
| $\varphi'_{15}(s)$ | $+$                                    |                                              | $0$                                                              | $-$                                              | $+$                                                       |
| $\varphi_{15}(s)$  | $1 + \frac{2\delta_0^2}{1 + \delta_0}$ | $\nearrow \pm \infty \nearrow$               | $-\left(5\sqrt{5} + 6\sqrt{\frac{3}{1 + \delta_0^2}}\right)$     | $\searrow -\infty$                               | $-\infty \nearrow 1 - \frac{2\delta_0^2}{\delta_0 - 1} <$ |

Tableau 44

|                    |            |                                                  |                                                                                   |                                        |
|--------------------|------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| $s$                | $-1$       | $\frac{\delta_0}{-1 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}$ | $\delta_0 \cdot \frac{3 + \sqrt{15(1 + \delta_0^2)}}{2 + 5\delta_0^2}$            | 1                                      |
| $\varphi'_{15}(s)$ | $Du$       |                                                  |                                                                                   |                                        |
| $s_{15}(s)$        | tableau 44 | $-\infty$                                        | $\nearrow - \left( 5\sqrt{5} - 6\sqrt{\frac{3}{1 + \delta_0^2}} \right) \searrow$ | $1 - \frac{2\delta_0^2}{\delta_0 - 1}$ |

Tableau 45

|                    |               |               |                                                  |                                                  |                    |
|--------------------|---------------|---------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------|
| $s$                | $-1$          | $s_7^0$       | $-\frac{\delta_0}{1 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}$ | $\frac{\delta_0}{-1 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}$ |                    |
| $\frac{d\rho}{ds}$ | $+$           | $0$           | $-$                                              |                                                  | $+$                |
| $p$                | $0 \nearrow$  | $\rho(s_7^0)$ | $\searrow p_1^0$                                 |                                                  | $p_2^0 \nearrow 0$ |
| $\frac{db}{ds}$    |               | $+$           |                                                  |                                                  | $+$                |
| $b$                | $-1 \nearrow$ | $b(s_7^0)$    | $\nearrow b_1^0$                                 |                                                  | $b_2^0 \nearrow 1$ |
| $\frac{db}{d\rho}$ | $\delta_0$    | $\infty$      |                                                  |                                                  | $\delta_0$         |

Tableau 46

Au tableau 45,  $-\left(5\sqrt{5} - 6\sqrt{\frac{3}{1 + \delta_0^2}}\right) < -5\sqrt{5} + 6\sqrt{\frac{3}{2}} < -1$

3°. En (63)  $\varphi_{16}\left(\frac{1 - \sqrt{1 + \delta_0^2}}{\delta_0}\right) = \varphi_{16}\left(\frac{1 + \sqrt{1 + \delta_0^2}}{\delta_0}\right) = 0$ ,

$$\varphi'_{16}\left(\frac{1 - \sqrt{1 + \delta_0^2}}{\delta_0}\right) \cdot \varphi'_{16}\left(\frac{1 + \sqrt{1 + \delta_0^2}}{\delta_0}\right) \neq 0, \quad \varphi_{16}(-1) \cdot \varphi_{16}(1) \neq 0$$

4°. Le tableau 24 se remplace par le tableau 47.

|                   |           |                                              |                                                  |                                                                                       |                                              |           |     |
|-------------------|-----------|----------------------------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------|-----|
| $s$               | $-\infty$ | $\frac{1 - \sqrt{1 + \delta_0^2}}{\delta_0}$ | $-\frac{\delta_0}{1 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}$ | $\frac{\delta_0}{-1 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}$                                      | $\frac{1 + \sqrt{1 + \delta_0^2}}{\delta_0}$ | $+\infty$ |     |
| $\varphi_{16}(s)$ | $-$       | $0$                                          | $+$                                              |  | $+$                                          | $0$       | $-$ |

Tableau 47

et les sections  $s > 0$  des tableaux 25 et 26 respectivement par les tableaux 48 et 49.

|                    |                                                  |                                                    |
|--------------------|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| $s$                | $\frac{\delta_0}{-1 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}$ | $\frac{1}{\delta_0} (1 + \sqrt{1 + \delta_0^2})$   |
| $\varphi'_{14}(s)$ | -                                                |                                                    |
| $\varphi_{13}(s)$  | $\infty$                                         | $1 - \frac{2\delta_0}{\sqrt{1 + \delta_0^2}} > -1$ |

Tableau 48

En effet, en posant en (62)  $P_r(s) = \delta_0 + 3\delta_0 s^2 - 2(1 + 2\delta_0^2)s^3$ , et en désignant par  $s_0$  la racine positive de  $P_0(s)$ , il vient

|                    |                                                  |                                                                        |                                              |
|--------------------|--------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| $s$                | $\frac{\delta_0}{-1 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}$ | $\delta_0 \cdot \frac{3 + \sqrt{15(1 + \delta_0^2)}}{2 + 5\delta_0^2}$ | $\frac{1 + \sqrt{1 + \delta_0^2}}{\delta_0}$ |
| $\varphi'_{15}(s)$ | +                                                | 0                                                                      | -                                            |
| $\varphi_{15}(s)$  | $-\infty$                                        | $-\left(5\sqrt{5} - 6\sqrt{\frac{3}{1 + \delta_0^2}}\right) < -1$      | $-\infty$                                    |

Tableau 49

$$P_0\left(\frac{\delta_0}{-1 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}\right) = \frac{\delta_0(1 + \delta_0^2)(1 - 6\delta_0^2 - 16\delta_0^4)}{(1 + 2\delta_0^2)[-1 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}][1 + 4\delta_0^2 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}]} < 0$$

par suite  $s_0\left(<\frac{\delta_0}{-1 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}\right)$  ne figure pas au tableau 48. Le tableau 28 se remplace par le tableau 50, auquel le signe de  $\frac{d\rho}{ds}$  déduit en changeant

|                    |                                                  |                                                  |                                                  |                                                  |
|--------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| $s$                | $\frac{1}{\delta_0} (1 - \sqrt{1 + \delta_0^2})$ | $-\frac{\delta_0}{1 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}$ | $\frac{\delta_0}{-1 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}$ | $\frac{1}{\delta_0} (1 + \sqrt{1 + \delta_0^2})$ |
| $\frac{d\rho}{ds}$ | +                                                |                                                  |                                                  | -                                                |
| $\rho$             | -1                                               | $\rho_1^0$                                       | $\rho_2^0$                                       | -1                                               |
| $\frac{db}{ds}$    | -                                                |                                                  |                                                  | -                                                |
| $b$                | 0                                                | $b_1^0$                                          | $b_2^0$                                          | 0                                                |
| $\frac{db}{d\rho}$ | $\frac{1}{\delta_0} (1 - \sqrt{1 + \delta_0^2})$ |                                                  |                                                  | $\frac{1}{\delta_0} (1 + \sqrt{1 + \delta_0^2})$ |

Tableau 50

en (60) le signe de  $\sqrt{-\delta_0^2 - 2\delta_0 s + (1 + 2\delta_0^2)s^2}$  est donné par la relation  $\text{sgn}[-[\delta_0 - (1 + 4\delta_0^2)s - 3\delta_0 s^2 + (1 + 2\delta_0^2)s^3]]_0 = \text{sg}[-\delta_0 + (1 + 6\delta_0^2)s]$ , où  $s$  est supposé être une racine du polynôme  $P_4(s) = -\delta_0^2 - 2\delta_0 s + (1 + 2\delta_0^2)s^2$ . Le signe de  $\frac{db}{ds}$ , déduit de (60) par changement de signe de  $\sqrt{-\delta_0^2 - 2\delta_0 s + (1 + 2\delta_0^2)s^2}$  se déduit au tableau 50 par la relation  $-\delta_0^2 - 3\delta_0 s + (2 + 5\delta_0^2)s^2 + \delta_0 s^3 = 4(1 + \delta_0^2)s^2$ , où  $s$  est supposé être une racine du polynôme  $P_5(s) = \delta_0 + 2s - \delta_0 s^2$ . Les tableaux 46 et 50 donnent la forme de l'arc  $(\beta_1^0)$  de la fig. 8.

5°. En (66)  $\varphi_{17}(s) \neq 0$  pour  $s = -\delta_0 \pm \sqrt{1 + \delta_0^2}$  et  $s = -1$  et  $\varphi_{17}(1) = 0$ ,  $\varphi'_{17}(1) \neq 0$ .

6°. Le tableau 29 se remplace par le tableau 51. et les tableaux 33,

|                   |           |                                       |      |                                                               |                                                               |                                     |     |          |
|-------------------|-----------|---------------------------------------|------|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------|-----|----------|
| $s$               | $-\infty$ | $-(\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2})$ | $-1$ | $-\frac{\delta_0 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}{2 + \delta_0^2}$ | $-\frac{\delta_0 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}{2 + \delta_0^2}$ | $-\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2}$ | $1$ | $\infty$ |
| $\varphi_{17}(s)$ | -         |                                       |      |                                                               |                                                               | +                                   | 0   | -        |

Tableau 51

34 et 36 se réduisent à leur section  $s > 0$  (bien entendu, avec  $\delta_0$  à la place de  $\delta$ ).

7°. En (70)  $\varphi_{20}(-\delta_0 - \sqrt{1 + \delta_0^2}) = \varphi_{20}(-\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2}) = \varphi_{20}(-1) = 0$ , et  $\varphi'_{20}(-\delta_0 - \sqrt{1 + \delta_0^2}) \cdot \varphi'_{20}(-\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2}) \cdot \varphi'_{20}(-1) \neq 0$ ,  $\varphi_{20}(1) \neq 0$ . Le tableau 37 se remplace par le tableau 52.

|                   |           |                                       |      |                                                               |                                                               |                                     |          |
|-------------------|-----------|---------------------------------------|------|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------|----------|
| $s$               | $-\infty$ | $-(\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2})$ | $-1$ | $-\frac{\delta_0 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}{2 + \delta_0^2}$ | $-\frac{\delta_0 + \sqrt{2(1 + \delta_0^2)}}{2 + \delta_0^2}$ | $-\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2}$ | $\infty$ |
| $\varphi_{20}(s)$ | -         | 0                                     | + 0  | -                                                             |                                                               | +                                   | 0 -      |

Tableau 52

Les sections  $s < 0$  des tableaux 38, 39 et 40 se remplacent respectivement par les tableaux 53, 54, 55 (selon que  $\delta_0 < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  ou  $\delta_0 \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ) et 56.

|                    |                                                 |            |                                                |
|--------------------|-------------------------------------------------|------------|------------------------------------------------|
| $s$                | $-(\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2})$           | $s_0^0$    | $-1$                                           |
| $\varphi'_{18}(s)$ | +                                               |            |                                                |
| $\varphi_{18}(s)$  | $1 - \frac{2\delta_0^2}{\sqrt{1 + \delta_0^2}}$ | $\nearrow$ | $1 \nearrow \frac{\delta_0 + 1}{\delta_0 - 1}$ |

Tableau 53

Au tableau 53 nous avons  $\varphi'_{18}(s) > 0$ , ainsi qu'il résulte du tableau 30.

|                    |                                                                                                                                            |      |
|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| $s$                | $-(\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2}) - \frac{1}{5 + 2\delta_0^2} [3\delta_0 + \sqrt{15(1 + \delta_0^2)}]$                                  | $-1$ |
| $\varphi'_{19}(s)$ | + 0 -                                                                                                                                      |      |
| $\varphi_{19}(s)$  | $-\infty \nearrow -5\sqrt{5} + 6\delta_0 \sqrt{\frac{3}{1 + \delta_0^2}} < -1 \searrow -\left[1 + \frac{2}{\delta_0(\delta_0 - 1)}\right]$ |      |

Tableau 54

|                    |                                       |                                                               |
|--------------------|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| $s$                | $-(\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2})$ | $-1$                                                          |
| $\varphi'_{19}(s)$ | +                                     |                                                               |
| $\varphi_{19}(s)$  | $-\infty$                             | $\nearrow -\left[1 + \frac{2}{\delta_0(\delta_0 - 1)}\right]$ |

Tableau 55

Quand  $\delta_0$  croît de 1 à  $\infty$ ,  $\varphi(\delta_0) = -5\sqrt{5} + 6\delta_0 \sqrt{\frac{3}{1 + \delta_0^2}}$  croît de  $-5\sqrt{5} + 6\sqrt{\frac{3}{2}} < -1$  à  $-5\sqrt{5} + 6\sqrt{3} > -1$ , mais du fait que  $\varphi\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) = 3 - 2\sqrt{5} < -1$ , il résulte que pour  $\delta_0 < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  au tableau 54,  $-5\sqrt{5} + 6\delta_0 \sqrt{\frac{3}{1 + \delta_0^2}} < -1$ . Les tableaux 36, 40 (réduits à

|                    |                                       |                       |
|--------------------|---------------------------------------|-----------------------|
| $s$                | $-(\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2})$ | $-1$                  |
| $\frac{d\rho}{ds}$ | +                                     |                       |
| $\rho$             | $-1$                                  | $\nearrow 0$          |
| $\frac{db}{ds}$    | -                                     |                       |
| $b$                | $0$                                   | $\searrow -1$         |
| $\frac{db}{d\rho}$ | $-(\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2})$ | $-\frac{1}{\delta_0}$ |

Tableau 56

leurs sections  $s > 0$ ) et 56 donnent la forme de l'arc  $(\beta_3^0)$  de la fig. 9 et de l'arc  $(\beta_4^0)$  symétrique de  $(\beta_3^0)$  par rapport à l'origine des axes. Selon les notations 5 et 4, la frontière de la région  $(\Delta_{3,i}^0)$  est constituée par l'arc de cercle  $(K_{\Lambda_{3,i}^0,+})$ , dont l'équation s'obtient en remplaçant en (29)  $\delta$  par  $\delta_0$ , ce qui donne

$$(72) \quad (K_{\Lambda_{3,i}^0,+}) : \rho^2 + b^2 + 2l_3^0 b - 1 = 0, \quad (l_3^0 = \delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2}).$$

et par son symétrique  $(K_{\Lambda_{3,i}^0,-})$  par rapport à l'axe  $O\rho$ , d'équation

$$(73) \quad (K_{\Lambda_{3,i}^0,-}) : \rho^2 + b^2 - 2l_3^0 b - 1 = 0$$

En éliminant  $\rho^2$  entre l'équation (73) de  $(K_{\Lambda_{3,i}^0,-})$  et l'équation de  $(\Gamma_1^0)$  obtenue selon les notations 5 en remplaçant dans l'équation (41) de  $(\Gamma_1)$ ,  $\delta$  par  $\delta_0$ , il vient

$$\rho = -\frac{1}{\delta_0(1 + l_3^0 b)} [\delta_0 + 2\delta_0 l_3^0 b + (-1 + 2\delta_0^2) l_3^0 b^2].$$

En portant l'expression de  $\rho$  obtenue dans (73), il vient

$$b^2 [2\delta_0(\delta_0^2 - 1) + 4\delta_0 l_3^0(\delta_0^2 - 1)b + l_3^0(1 - 3\delta_0^2 + 4\delta_0^4)b^2] = 0$$

Le réalisant du polynôme de second degré en  $b$  écrit dans les crochets est

$$-\frac{8\delta_0(\delta_0^2 - 1)l_3^0(1 - 3\delta_0^2)^2}{1 - \delta_0^2 + 2\delta_0^4 + 2\delta_0(\delta_0^2 - 1)\sqrt{1 + \delta_0^2}} < 0$$

En éliminant  $\rho^2$  entre l'équation (72) de l'arc  $(K_{\Lambda_3, +})$  et l'équation de  $(\Gamma_1^0)$ , il vient

$$\rho = -\frac{1}{\delta_0(1 - l_3^0 b)} [\delta_0 - 2\delta_0 l_3^0 b + (1 + 2\delta_0^2) l_3^0 b^2].$$

En portant la valeur de  $\rho$  obtenue dans (72) il vient

$$b^2 [2\delta_0 - 4\delta_0 l_3^0 b + (1 + 4\delta_0^2) l_3^0 b^2] = 0$$

Le réalisant du polynôme du second degré en  $b$  qui figure dans les crochets est

$$\frac{-8\delta_0}{l_3^0} < 0.$$

Il en résulte que l'arc  $(\beta_1^0)$  coupe la frontière de la région  $(\Delta_{3,i}^0)$  au seul point  $A_-$ . En éliminant  $\rho^2$  entre l'équation (73) de  $(K_{\Lambda_3, -})$  et l'équation de  $(\Gamma_3^0)$  obtenue, selon les notations 5, en remplaçant dans l'équation (41) de  $(\Gamma_3)$ ,  $\delta$  par  $\delta_0$  il vient :

$$\rho = -\frac{1}{1 + l_3^0 b} (1 + 2l_3^0 b + 3\delta_0 l_3^0 b^2)$$

En portant la valeur de  $\rho$  obtenue dans (73), il vient

$$b^2 [4\delta_0 + 8\delta_0 l_3^0 b + l_3^0 (1 + 9\delta_0^2) b^2] = 0$$

Le réalisant du polynôme du second degré en  $b$  écrit dans les crochets est

$$-16\delta_0 l_3^0 \cdot \frac{(1 - 3\delta_0^2)^2}{1 + 5\delta_0^2 + 4\delta_0 \sqrt{1 + \delta_0^2}} < 0.$$

En éliminant enfin  $\rho^2$  entre l'équation (72) de l'arc  $(K_{\Lambda_3, +})$  et l'équation de  $(\Gamma_3^0)$ , il vient

$$\rho = -\frac{1}{1 - l_3^0 b} (1 - 2l_3^0 b + \delta_0 l_3^0 b^2).$$

En portant la valeur de  $\rho$  obtenue dans (72), il vient  $b^4 = 0$  Il en résulte que l'arc  $(\beta_3^0)$  coupe la frontière de la région  $(\Delta_{3,i}^0)$  au seul point  $A_-$ . Si  $(\beta_3^0, -)$ ,  $(\beta_3^0, +)$  désignent respectivement les sections de l'arc  $(\beta_3^0)$  situées au-dessous, respectivement au dessus de l'axe  $O\rho$ , il résulte du tableau 40 et de (72) que l'arc  $(\beta_3^0, +)$  est tangent au point  $A_-$  à l'arc  $(K_{\Lambda_3, +})$ . Ces informations donnent les figures 8 et 9. qui attestent la conservation des figures 6 et 7 au cas du remplacement de  $\delta$  par  $\delta_0$ . La conservation, au cas de ce remplacement, des figures 2, 3, 4, 5 a été mentionnée page (149) La proposition (44) est ainsi démontrée.

### § 9. Démonstration de la proposition (41<sub>1</sub>).

Les dénominateurs des expressions (38) de  $\bar{\alpha}_{1,r}$  et  $\bar{\alpha}_{2,r}$  s'annulent respectivement le long des courbes  $(K_1)$  et  $(K_2)$  d'équation

$$(74) \quad (K_1) : \delta\rho + b + (\delta\rho - b)(\rho^2 + b^2) = 0$$

respectivement

$$(75) \quad (K_2) : \rho - \delta b + (\rho + \delta b)(\rho^2 + b^2) = 0$$

Nous désignerons respectivement par  $(k_1)$  et  $(k_2)$  leurs branches comprises dans  $\Delta$ . En posant  $b = \rho s$  ( $s$  paramètre), (74) donne

$$\rho = \sqrt{\frac{\delta + s}{(-\delta + s)(1 + s^2)}}, \quad b = \rho s$$

$$(76) \quad \rho'(s) = -\frac{P_{1,\rho}(s)}{(-\delta + s)^2(1 + s^2)^2 \cdot \sqrt{\frac{\delta + s}{(-\delta + s)(1 + s^2)}}}$$

$$b'(s) = -\frac{P_{1,b}(s)}{(-\delta + s)^2(1 + s^2)^2 \cdot \sqrt{\frac{\delta + s}{(-\delta + s)(1 + s^2)}}}$$

avec

$$(77) \quad P_{1,\rho}(s) = \delta - \delta^2 s + \delta s^2 + s^3, \quad P_{1,b}(s) = \delta^2 + \delta s - s^2 + \delta s^3$$

Il s'ensuit  $\rho^2 + b^2 = \varphi_{21}(s) = \frac{\delta + s}{-\delta + s}$  auquel cas selon le tableau 57 la branche  $(k_1)$  s'obtient de (76) pour les valeurs  $s \leq -\delta$  du paramètre.

| $s$               | $-\infty$ | $-\delta$ | $\delta$    | $\infty$ |
|-------------------|-----------|-----------|-------------|----------|
| $\varphi_{21}(s)$ | 1         | 0         | $\mp\infty$ | 1        |

Tableau 57

Or, pour ces valeurs

$$P'_{1,\rho}(s) = (\delta + s)(-\delta + 3s) \geq 0, \quad P'_{1,b}(s) = \delta - 2s + 3\delta s^2 > 0,$$

$$P_{1,b}(-\delta) = -\delta^2(1 + \delta^2) < 0, \quad P_{1,\rho}(-\infty) = -\infty, \quad P_{1,\rho}(-\delta) = \delta(1 + \delta^2) > 0,$$

$$\frac{db}{d\rho} = \frac{P_{1,b}(s)}{P_{1,\rho}(s)} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 b}{d\rho^2} = \frac{1}{\rho'(s)} \frac{d}{ds} \frac{db}{d\rho} = (1 + \delta^2) \frac{\delta^2 - 2\delta s(1 + s^2) + s^4}{\rho'(s) \cdot P_{1,\rho}^2(s)}$$

$$\text{donc } \operatorname{sg} \frac{d^2 b}{d\rho^2} = \operatorname{sg} \rho'(s).$$

Il en résulte le tableau 58, qui donne la section  $\overline{OP_-B_-}$  (qui sera désignée par la notation „branche  $(k_1^-)$ ” de la branche  $(k_1)$ ) (fig 10), où

|                        |               |             |              |
|------------------------|---------------|-------------|--------------|
| $s$                    | $-\infty$     | $s_1$       | $-\delta$    |
| $\rho'(s)$             | $+$           | $0$         | $-$          |
| $\rho(s)$              | $0 \nearrow$  | $\rho(s_1)$ | $\searrow 0$ |
| $b'(s)$                | $+$           | $+$         | $+$          |
| $b(s)$                 | $-1 \nearrow$ | $b(s_1)$    | $\nearrow 0$ |
| $\frac{db}{d\rho}$     | $\delta$      | $\infty$    | $-\delta$    |
| $\frac{d^2b}{d\rho^2}$ | $+$           | $/$         | $-$          |

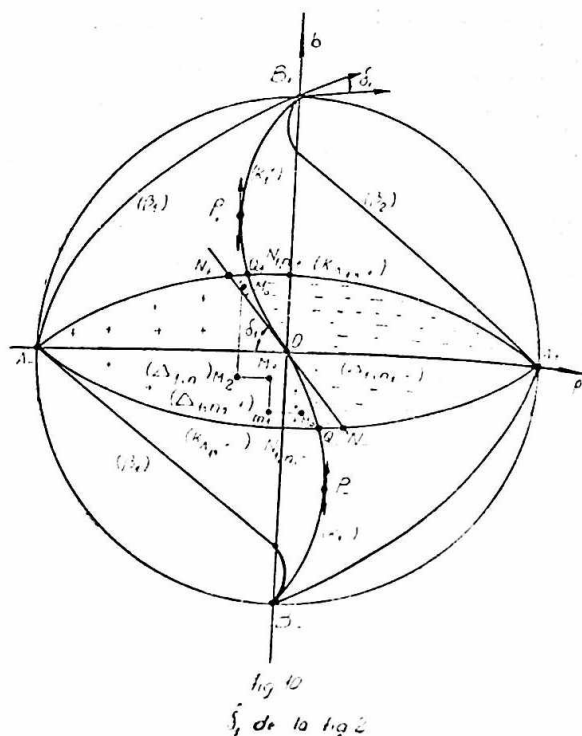
Tableau 58

le point  $P_-$  est fourni par la valeur  $s_1$  (du tableau 58) du paramètre et l'angle  $\delta_1$  par la fig. 6. La branche  $(k_2)$  est constituée par la branche  $(k_1^-)$  et par sa symétrique (designée par la notation „branche  $(k^+)$ ”) par rapport — l'origine des axes. De plus, le point  $Q_-$  où la branche  $(k_1^-)$  coupe l'arc de cercle  $K_{A_n, -}$  est situé sur l'arc  $\widehat{OP_-}$  de cette branche. En effet, en portant les expressions (76) de  $\rho$  et  $b$  dans l'équation (27) de  $(K_{A_n, -})$  il vient  $\frac{\delta}{\delta - s} + l_1 s \sqrt{\frac{\delta + s}{(-\delta + s)(1 + s^2)}} = 0$ , ce qui, pour  $s \leq -\delta$  équivaut à

vient  $\frac{\delta}{\delta-s} + l_1 s \sqrt{\frac{\delta+s}{(-\delta+s)(1+s^2)}} = 0$ , ce qui, pour  $s \leq -\delta$  équivaut à

$$\frac{\delta^2}{(\delta-s)^2} = \frac{l_1^2 s^2 (\delta+s)}{(-\delta+s)(1+s^2)},$$

C'est-à-dire à  $l_1^2 s^4 - (1 + l_1^2) \delta^2 s^2 - \delta^2 = 0$ . Le point  $Q_-$  est donc fourni par (76) pour  $s = \sigma_1 = -\sqrt{(-1 + \sqrt{1 + \delta^2})(\sqrt{1 + \delta^2} + \sqrt{2 + \delta^2})}$  (avec la valeur (27) de  $l_1$ ). Or, (77) donne  $P_{1,\rho}(\sigma_1) = (-1 + \sqrt{1 + \delta^2}) \times \sqrt{\sqrt{1 + \delta^2} + \sqrt{2 + \delta^2}} \cdot (\delta \sqrt{\sqrt{1 + \delta^2} + \sqrt{2 + \delta^2}} - (-1 + \sqrt{1 + \delta^2}) \times \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \delta^2}}) > 0$  donc  $s_1 < \sigma_1$ , auquel cas (76) et le tableau 58 placent le point  $Q_-$  sur l'arc  $\widehat{OP_-}$  de  $(k_-)$ . Dans la région  $(\Delta_{1,r,+})$  de  $(\Delta_{1,r})$  (marquée sur la fig. 10 par les signes +),  $\bar{\alpha}_{1,r} > 0$  en (38) et dans la région  $(\Delta_{1,r,-})$  (marquée par les signes -), en (38)  $\bar{\alpha}_{1,r} < 0$ . Nous désignerons par  $M_+$



un point de  $(\Delta_{1,r,+})$  de coordonnées  $(\rho_+, b_+)$ , assez proche de l'origine pour avoir  $\bar{\alpha}_{1,r}(\rho_+, b_+) > 1$ . Pour fixer les idées, nous supposons  $\rho_+ \leq 0$ ,  $b_+ < 0$  (selon la définition de  $(\Delta_{1,r})$  de la notation (2),  $b_+ \neq 0$ ). Si  $M_0$  est un point quelconque de  $(\Delta_{1,r,+})$ , de coordonnées  $(\rho_0, b_0)$ , il est facile d'indiquer un point  $M_+$  et une ligne brisée  $(L)$  qui relie les points  $M_+$  et  $M_0$ , est située dans  $(\Delta_{1,r,+})$  et ne coupe pas la branche  $(k_1)$ . En effet, si le point  $M_0$  est dans la quadrilatère curviligne  $OA_-N_+N_{1,r,-}O$  (la droite  $N_-N_+$  étant la tangente en  $O$  à  $(k_1)$ ), les points  $M_+$  et  $M_0$  — et par conséquent le segment  $\overline{M_+M_0}$  sont situés au-dessous du (ou sur le) segment  $\overline{N_-N_+}$  et à gauche du (ou sur le) segment  $\overline{N_{1,r,-}N_{1,r,+}}$  tandis que  $(k_1^+)$  est audessus du segment  $\overline{N_-N_+}$  et  $(k_1^-)$  est à droite du segment  $\overline{N_{1,r,-}N_{1,r,+}}$ . La ligne  $(L)$  est en ce cas le segment  $\overline{M_+M_0}$ . Si le point  $M_0$  est dans le triangle curviligne  $ON_{1,r,-}Q_-O$ , la ligne  $(L)$  est constituée par  $\overline{M_+M_1}$  et  $\overline{M_1M_0}$  où  $M_1$  est le point de coordonnées  $(\rho_+, b_0)$ , à la condition de choisir le point  $M_+$  assez près de l'origine pour que le segment  $\overline{M_0M_1}$  reste compris dans  $(\Delta_{1,r,+})$  et que  $b_+ > b_0$ . En effet, le segment  $\overline{M_+M_1}$  ne coupe pas la branche  $(k_1)$ , le point  $M_1$  étant dans le triangle curviligne  $OA_-N_{1,r,-}O$ , compris dans le quadrilatère curviligne  $OA_-N_+N_{1,r,-}O$  (comme il a été prouvé ci-dessus) et le segment  $\overline{M_1M_0}$  ne coupe pas  $(k_1^-)$ , les points  $M_+$  et  $M_0$  étant situés à gauche de  $(k_1^-)$ , ni  $(k_1^+)$  ces points étant situés sous le diamètre  $\overline{A_-A_+}$ . Enfin si le point  $M_0$  est dans le triangle curviligne  $OQ_+N_+O$ , alors la ligne  $(L)$  est constituée des segments  $\overline{M_+M_2}$  et  $\overline{M_2M_0}$ , le point  $M_2$  ayant les coordonnées  $(\rho_0, b_+)$ , toujours à la condition de prendre le point  $M_+$  assez près de l'origine pour que le point  $M_2$  soit situé dans  $(\Delta_{1,r,+})$  et que  $\rho_+ > \rho_0$ . En effet, le segment  $\overline{M_0M_2}$  ne coupe pas  $(k_1^+)$ , parce que si  $\rho_0 <$  abscisse de  $Q_+$ , alors  $M_0$  et  $M_2$  sont à gauche de  $(k_1^+)$  et si  $\rho_0 \geq$  abscisse de  $Q_+$  alors  $M_0$  et  $M_2$  sont au-dessous de  $(k_1^+)$  (ceci du fait que  $Q_+$  est situé sur l'arc  $\widehat{OP_+}$  de  $(k_1^+)$ ;  $M_0$  et  $M_2$  sont à gauche du segment  $\overline{N_{1,r,-}N_{1,r,+}}$ , tandis que  $(k_1^-)$  est à droite de ce segment, donc  $\overline{M_0M_2}$  ne coupe pas  $(k_1^-)$ . Quant au segment  $\overline{M_0M_+}$ , il ne coupe pas  $(k_1)$ , parce que  $M_+$  et  $M_2$  sont situés à gauche du segment  $\overline{N_{1,r,-}N_{1,r,+}}$ , ni  $(k_1^+)$  parce que  $M_+$  et  $M_2$  sont situés au-dessous du diamètre  $\overline{A_-A_+}$ . Supposons donc que pour un point  $M_0$  de  $(\Delta_{1,r,+})$ , de coordonnées  $(\rho_0, b_0)$  nous ayons  $\bar{\alpha}_{1,r}(\rho_0, b_0) < 1$  en (38). Nous supposons d'abord que la ligne  $(L)$  se réduit au segment  $\overline{M_+M_0}$  et que celui-ci n'est pas parallèle à l'axe  $Ob$ . En désignant par  $b = p\rho + q$  l'équation de la droite  $M_+M_0$  et par  $\varphi_{22}(\rho)$  la fonction rationnelle  $\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, p\rho + q)$  et si, pour fixer les idées,  $\rho_0 < \rho_+$ , alors  $\varphi_{22}(\rho)$  est une fonction continue dans l'intervalle  $[\rho_0, \rho_+]$  de la variable  $\rho$ , parce que lorsque  $\rho$  parcourt cet intervalle, le point de coordonnées  $(\rho, p\rho + q)$  parcourt le segment  $\overline{M_0M_+}$ , qui ne coupe pas la branche  $(k_1)$  et par conséquent le polynôme en  $\rho$  au dénominateur de l'expression (38) de  $\bar{\alpha}_{1,r}$  ne s'annule pas dans cet intervalle. Or,  $\varphi_{22}(\rho_0) = \bar{\alpha}_{1,r}(\rho_0, p\rho_0 + q)$

$+q_0) = \bar{\alpha}_{1,r}(\rho_0, b_0) < 1$  et  $\varphi_{22}(\rho_+) = \bar{\alpha}_{1,r}(\rho_+, b_+) > 1$ . Par suite, il existe une valeur  $\bar{\rho}$  de  $\rho$ , avec  $\rho_0 < \bar{\rho} < \rho_+$ , pour laquelle  $\varphi_{22}(\bar{\rho}) = \bar{\alpha}_{1,r}(\bar{\rho}, \bar{b}) = 1$ , le point  $(\bar{\rho}, \bar{b})$  étant situé sur le segment  $\overline{M_0 M_+}$ . Or, ce segment étant compris dans  $(\Delta_{1,r})$ , il s'ensuit que la branche  $(\beta_1)$ , définie par (41), a des points dans  $(\Delta_{1,r})$ , ce que est infirmé par la fig. 6. La relation  $\bar{\alpha}_{1,r}(\rho_0, b_0) < 1$  est donc, dans l'hypothèse faite, exclue. Si le segment  $\overline{M_+ M_0}$  est parallèle à l'axe  $Ob$ , donc  $\rho_0 = \rho_+ = r$ , la relation  $\bar{\alpha}_{1,r}(\rho_0, b_0) < 1$  s'exclut en considérant la fonction  $\varphi_{23}(b) = \bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)$  qui est continue en la variable  $b$  pour  $b \in [b_0, b_+]$  (si, pour fixer les idées,  $b_0 < b_+$ ). Cette relation est donc exclue au cas où la ligne  $(L)$  se réduit au segment  $\overline{M_+ M_0}$ . D'autre part  $\bar{\alpha}_{1,r}(\rho_0, b_0) \neq 1$ , la branche  $(\beta_1)$  de (41) n'ayant aucun point en  $(\Delta_{1,r})$ .

Par conséquent  $\bar{\alpha}_{1,r}(\rho_0, b_0) > 1$ .

Nous retiendrons de la démonstration de ce résultat la proposition suivante, obtenue en remplaçant les points  $M_+$  et  $M_0$  respectivement par les points  $M_3$  et  $M_4$  de coordonnées respectives  $(\rho_3, b_3)$  et  $(\rho_4, b_4)$ :

$$(78) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Si } \bar{\alpha}_{1,r}(\rho_3, b_3) > 1 \text{ et si le segment } \overline{M_3 M_4} \text{ est situé} \\ \text{dans } (\Delta_{1,r,+}) \text{ et ne coupe pas la branche } (k_1), \text{ alors} \\ \bar{\alpha}_{1,r}(\rho_4, b_4) > 1. \end{array} \right.$$

Au cas où la ligne  $(L)$  est constituée des segments  $\overline{M_+ M_1}$  et  $\overline{M_1 M_0}$  respectivement  $\overline{M_+ M_2}$  et  $\overline{M_2 M_0}$ , la relation  $\bar{\alpha}_{1,r}(\rho_0, b_0) < 1$ , s'exclut en appliquant la proposition (78) à chacun des segments qui la constituent. Par conséquent

$$(79) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Pour tout point } M_0 \text{ de coordonnées } (\rho_0, b_0) \text{ de } (\Delta_{1,r,+}) \\ \text{nous avons } \bar{\alpha}_{1,r}(\rho_0, b_0) > 1. \end{array} \right.$$

Si le point  $M_0$  est dans  $(\Delta_{1,r,-})$ , alors en tenant compte que les régions  $(\Delta_{1,r,-})$  et  $(\Delta_{1,r,+})$  sont symétriques par rapport à l'origine, (38) et (79) donnent  $\bar{\alpha}_{1,r}(\rho_0, b_0) = -\bar{\alpha}_{1,r}(-\rho_0, -b_0) < -1$ .

En posant  $b = \rho s$  (75) donne

(80)

$$\left| \begin{array}{l} \rho = \sqrt{\frac{-1 + \delta s}{(1 + \delta s)(1 + s^2)}}, \quad b = \rho s \\ \rho'(s) = \frac{P_{2,\rho}(s)}{(1 + \delta s)^2(1 + s^2)^2 \sqrt{\frac{-1 + \delta s}{(1 + \delta s)(1 + s^2)}}}, \quad b'(s) = \frac{P_{2,b}(s)}{(1 + \delta s)^2(1 + s^2)^2 \sqrt{\frac{-1 + \delta s}{(1 + \delta s)(1 + s^2)}}} \end{array} \right.$$

avec

$$(81) \quad P_{2,\rho}(s) = \delta + s + \delta s^2 - \delta^2 s^3, \quad P_{2,b}(s) = -1 + \delta s + \delta^2 s^2 + \delta s^3$$

31

|                   |           |                     |                    |                           |
|-------------------|-----------|---------------------|--------------------|---------------------------|
| $s$               | $-\infty$ | $-\frac{1}{\delta}$ | $\frac{1}{\delta}$ | $+\infty$                 |
| $\varphi_{24}(s)$ | 1         | $\nearrow$          | $\pm \infty$       | $\nearrow$ 0 $\nearrow$ 1 |

Tableau 59

Il s'ensuit  $\rho^2 + b^2 = \varphi_{24}(s) = \frac{-1 + \delta s}{1 + \delta s}$ , auquel cas, selon le tableau 59, la branche  $(k_2^+)$  s'obtient pour les valeurs  $s \geq \frac{1}{\delta}$  du paramètre. Or, pour ces valeurs, en (81)

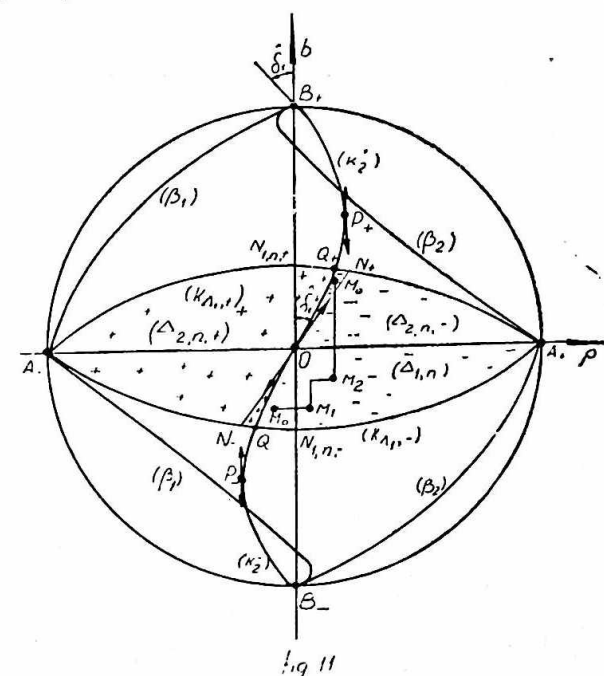
$$P'_{2,\rho}(s) = (1 - \delta s)(1 + 3\delta s) \leq 0 \quad \text{et} \quad P'_{2,b}(s) = \delta + 2\delta^2 s + 3\delta s^2 > 0,$$

$$P_{2,\rho}\left(\frac{1}{\delta}\right) = \frac{1 + \delta^2}{\delta} > 0, \quad P_{2,b}(\infty) = -\infty, \quad P_{2,b}\left(\frac{1}{\delta}\right) = \frac{1 + \delta^2}{\delta} > 0,$$

$$\frac{db}{d\rho} = \frac{P_{2,b}(s)}{P_{2,\rho}(s)}, \quad \frac{d^2 b}{d\rho^2} = \frac{1}{\rho'(s)} \frac{d}{ds} \cdot \frac{db}{d\rho} = \frac{(1 + \delta^2)[1 + 2\delta s(1 + s^2) + \delta^2 s^4]}{\rho'(s) P_{2,\rho}^2(s)}$$

|                          |                    |                                   |                     |
|--------------------------|--------------------|-----------------------------------|---------------------|
| $s$                      | $\frac{1}{\delta}$ | $s_2$                             | $\infty$            |
| $\rho'(s)$               | +                  | 0                                 | -                   |
| $\rho(s)$                | 0                  | $\nearrow$ $\rho(s_2)$ $\searrow$ | 0                   |
| $b'(s)$                  |                    | +                                 |                     |
| $b(s)$                   | 0                  | $\nearrow$ $b(s_2)$ $\nearrow$    | 1                   |
| $\frac{db}{d\rho}$       | $\frac{1}{\delta}$ | $\infty$                          | $-\frac{1}{\delta}$ |
| $\frac{d^2 b}{d^2 \rho}$ | +                  | /                                 | -                   |

Tableau 60



Il s'ensuit le tableau 60, qui donne la branche  $\overline{OP_+ B_+}$  (designée par la notation „branche  $(k_2^+)$ ” de la branche  $(k_2)$ ) (fig. 11). Sur la fig. 11, le point  $P_+$  est fourni par la valeur  $s_2$  (du tableau 60) du paramètre et l'angle  $\delta_3$  par la fig. 7. La branche  $(k_2)$  est constituée par la branche  $(k_2^+)$  et par sa symétrique  $\overline{OP_- B_-}$  (designée par le terme „branche  $(k_2^-)$ ”) par rapport à l'origine. Dans la région  $(\Delta_{2,r,+})$  de  $(\Delta_{1,r})$  (marquée sur la fig. 11 par des signes +), en (38)  $\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b) > 0$  et dans la région  $(\Delta_{2,r,-})$  (marquée par des signes -), en (38)  $\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b) < 0$ . De plus, le point  $Q_+$

où la branche  $(k_2^+)$  coupe l'arc de cercle  $(K_{\Lambda,+})$  est situé sur l'arc  $\widehat{OP}_+$  de cette branche. En effet, en portant les expressions (80) de  $\rho$  et de  $b$  dans l'équation (71) de  $(K_{\Lambda,+})$ , il vient  $\frac{1}{1+\delta s} = l_1 s \sqrt{\frac{-1+\delta s}{(1+\delta s)(1+s^2)}}$  ce qui, pour  $s \geq \frac{1}{\delta}$  équivaut à  $\frac{1}{(1+\delta s)^2} = l_1^2 s^2 \frac{-1+\delta s}{(1+\delta s)(1+s^2)}$ , c'est-à-dire à  $\delta^2 l_1^2 s^4 - (1+l_1^2)s^2 - 1 = 0$ . Le point  $Q_+$  est donc donné par (80) pour

$$s = \sigma_2 = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\delta^2} + \sqrt{1+\delta^2+\delta^4}}{1+\sqrt{1+\delta^2}}}$$

(avec la valeur (27) de  $l_1$ ). Or, (81) donne

$$(82) \quad P_{2,\rho}(\sigma_2) = \frac{1}{\delta(1+\sqrt{1+\delta^2})} \left[ \delta^2 + (1+\delta^2)\sqrt{1+\delta^2} + \sqrt{1+\delta^2+\delta^4} - (-1+\sqrt{1+\delta^2+\delta^4}) \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1+\delta^2} + \sqrt{1+\delta^2+\delta^4}}{1+\sqrt{1+\delta^2}}} \right] > 0.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \delta^2 + (1+\delta^2)\sqrt{1+\delta^2} + \sqrt{1+\delta^2+\delta^4} &> \delta + \delta^3 = \\ &= \frac{1}{\delta} (-1 + \sqrt{1+\delta^2+\delta^4})(1 + \sqrt{1+\delta^2+\delta^4}) \end{aligned}$$

du fait que  $(1+\delta^2)\sqrt{1+\delta^2} > \delta^3$  et  $\sqrt{1+\delta^2+\delta^4} > \delta - \delta^2$

Il en résulte en (82)

$$\begin{aligned} \delta(1+\sqrt{1+\delta^2})P_{2,\rho}(\sigma_2) &> (-1+\sqrt{1+\delta^2+\delta^4}) \times \\ &\times \left[ \frac{1}{\delta} (1+\sqrt{1+\delta^2+\delta^4}) - \sqrt{\frac{\sqrt{1+\delta^2} + \sqrt{1+\delta^2+\delta^4}}{1+\sqrt{1+\delta^2}}} \right] = \\ &= \frac{(-1+\sqrt{1+\delta^2+\delta^4})[2+(2+\delta^2)\sqrt{1+\delta^2}+2(1+\sqrt{1+\delta^2})\sqrt{1+\delta^2+\delta^4}+\delta^2(1+\delta^2-\sqrt{1+\delta^2+\delta^4})]}{\left[ \frac{1}{\delta} (1+\sqrt{1+\delta^2+\delta^4}) + \sqrt{\frac{\sqrt{1+\delta^2} + \sqrt{1+\delta^2+\delta^4}}{1+\sqrt{1+\delta^2}}} \right] \delta^2(1+\sqrt{1+\delta^2})} > 0 \end{aligned}$$

Par conséquent (80) donne au tableau  $60\sigma_2 < s_2$ , par suite le point  $Q_+$  est situé sur l'arc  $\widehat{OP}_+$  de la fig. 11. La démonstration de l'inégalité  $|\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)| > 1$  pour tout point  $M$  de coordonnées  $(\rho, b)$  situé dans  $(\Delta_{1,r})$  se fait donc en remplaçant, dans celle de l'inégalité  $|\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)| > 1$  le point  $N_+$  par un point  $M_-$  de coordonnées  $(\rho_-, b_-)$  avec  $\rho_- \geq 0, b_- < 0$  et assez proche de l'origine pour avoir  $|\bar{\alpha}_{2,r}(\rho_-, b_-)| > 1$ , la position à droite du segment  $\overline{N_{1,r}-N_{1,r,+}}$  de la branche  $(k_1^-)$  par la position à gauche de même segment de la branche  $(k_2^-)$ , le quadrilatère curviligne  $OA_-N_+N_{1,r}-O$

par le quadrilatère curviligne  $OA_+N_{1,r}-N_+O$  la position à droite du segment  $\overline{N_{1,r}-N_{1,r,+}}$  de la branche  $(k_1^-)$  par la position à gauche du même segment de la branche  $(k_2^-)$  et la position à gauche des branches  $(k_1^-)$  et  $(k_1^+)$  et du segment  $\overline{N_{1,r}-N_{1,r,+}}$  des points  $M_+, M_1$  et  $M_2$  par la position à droite des branches  $(k_2^-)$  et  $(k_2^+)$  et du segment  $\overline{N_{1,r}-N_{1,r,+}}$  des points  $M_-, M_1$  et  $M_2$ .

### § 9. Démonstration de la proposition (44<sub>1</sub>)

(82<sub>1</sub>)  $\left| \begin{array}{l} \text{Les courbes } (K_1) \text{ et } (K_2) \text{ données par (74) et (75) se remplacent} \\ \text{par les courbes } (K_1^0) \text{ et } (K_2^0), \text{ obtenues en y remplaçant } \delta \text{ par } \delta_0. \end{array} \right.$

Ces courbes ont la forme des courbes  $(K_1)$  et  $(K_2)$ , le fait que  $\delta < 1$  n'intervient pas dans la construction de ces dernières. Le point  $Q_-^0$  où la branche  $(K_1^0,-)$  coupe l'arc de cercle  $(K_{\Lambda,-})$  de la fig. 8 est situé sur l'arc  $\widehat{P_0O}$  de cette branche.  $P_0$  est le point obtenu en remplaçant dans les coordonnées du point  $\bar{P}_-$  de la fig. 10,  $\delta$  par  $\delta_0$ . En effet, en portant les expressions (76) (où  $\delta$  est remplacé par  $\delta_0$ ) de  $\rho$  et de  $b$  dans l'équation

$$\rho^2 + b^2 - 2l_3^0 b - 1 = 0,$$

(83)

$$(l_3^0 = \delta_0 + \sqrt{1+\delta_0^2}, \quad \Lambda_3^0 = -l_3^0 + \sqrt{1+(l_3^0)^2})$$

de  $(K_{\Lambda,-})$  déduite de (29) et des notations 5, il vient

$$\frac{\delta_0}{\delta_0 - s} + l_3^0 s \sqrt{\frac{\delta_0 + s}{(-\delta_0 + s)(1+s^2)}} = 0$$

ce qui pour  $s \leq -\delta_0$  équivaut à  $(l_3^0)^2 s^4 - (1+(l_3^0)^2)\delta_0^2 s^2 - \delta_0^2 = 0$ . Le point  $Q_-^0$  est donc donné par (76) (où  $\delta$  est remplacé par  $\delta_0$ ) pour

$$s = \sigma_1^0 = - \sqrt{\delta_0 \frac{\delta_0 \sqrt{1+\delta_0^2} + \sqrt{1+\delta_0^2+\delta_0^4}}{\delta_0 + \sqrt{1+\delta_0^2}}}$$

(avec la valeur (83) de  $l_3^0$ ). Or, (77) donne

$$\begin{aligned} P_{1,\rho}(\sigma_1^0) &= \frac{\delta_0}{\delta_0 + \sqrt{1+\delta_0^2}} \left[ \delta_0 + (1+\delta_0^2)\sqrt{1+\delta_0^2} + \delta_0 \sqrt{1+\delta_0^2+\delta_0^4} - \right. \\ &\quad \left. - (-\delta_0^2 + \sqrt{1+\delta_0^2+\delta_0^4}) \sqrt{\delta_0 \frac{\delta_0 \sqrt{1+\delta_0^2} + \sqrt{1+\delta_0^2+\delta_0^4}}{\delta_0 + \sqrt{1+\delta_0^2}}} \right]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \delta_0 + (1+\delta_0^2)\sqrt{1+\delta_0^2} + \delta_0 \sqrt{1+\delta_0^2+\delta_0^4} &> \\ &> (1+\delta_0^2) = (-\delta_0^2 + \sqrt{1+\delta_0^2+\delta_0^4})(\delta_0^2 + \sqrt{1+\delta_0^2+\delta_0^4}), \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}
 P_{1,p}(\sigma_1^0) &> \frac{\delta_0(-\delta_0^2 + \sqrt{1 + \delta_0^2 + \delta_0^4})}{\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2}} \left( \delta_0^2 + \sqrt{1 + \delta_0^2 + \delta_0^4} - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{\delta_0 \frac{\delta_0 \sqrt{1 + \delta_0^2 + \delta_0^4} + \sqrt{1 + \delta_0^2 + \delta_0^4}}{\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2}}} \right) = \\
 &= \frac{\delta_0(-\delta_0^2 + \sqrt{1 + \delta_0^2 + \delta_0^4}) [\delta_0(1 + \delta_0^2 + 2\delta_0^4) + (1 + 2\delta_0^4) \sqrt{1 + \delta_0^2} + \\
 &\quad + \delta_0(-1 + 2\delta_0 \sqrt{1 + \delta_0^2 + 2\delta_0^4}) \sqrt{1 + \delta_0^2 + \delta_0^4}]}{(\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2})^2 \left( (\delta_0^2 + \sqrt{1 + \delta_0^2 + \delta_0^4} + \sqrt{\delta_0 \frac{\delta_0 \sqrt{1 + \delta_0^2 + \delta_0^4} + \sqrt{1 + \delta_0^2 + \delta_0^4}}{\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2}}) \right)}
 \end{aligned}$$

expression évidemment positive pour  $\delta_0 > 1$ . En ce cas (76) et le tableau 58 placent le point  $Q_-^0$  sur l'arc  $\widehat{OP_-^0}$  de la branche  $(k_1^{0,-})$ . Le point  $Q_+^0$  où la branche  $(k_1^{0,+})$  (située au-dessus du diamètre  $\overline{AA_+}$ ) de  $(k_2^0)$  coupe l'arc de cercle  $(k_{\Lambda_3,+}^0)$  de la fig. 8 est situé sur l'arc  $\widehat{OP_+^0}$  de cette branche.  $P_+^0$  est le point obtenu en remplaçant dans les coordonnées du point  $P_+$  de la fig. 11,  $\delta$  par  $\delta_0$ . En effet, en portant dans l'équation de  $(K_{\Lambda_3,+}^0)$

$$\begin{aligned}
 (84) \quad &\rho^2 + b^2 + 2l_3^0 b - 1 = 0, \\
 &(l_3^0 = \delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2}, \Lambda_3^0 = -l_3^0 + \sqrt{1 + (l_3^0)^2})
 \end{aligned}$$

déduite de (29) et des notations 5, les expressions (80) de  $\rho$  et  $b$  (où  $\delta$  est remplacé par  $\delta_0$ ), il vient  $\frac{1}{1 + \delta_0 s} = l_3^0 s \sqrt{\frac{-1 + \delta_0 s}{(1 + \delta_0 s)(1 + s^2)}}$ , ce qui pour  $s \geq \frac{1}{\delta_0}$  équivaut à  $\delta_0^2 (l_3^0)^2 s^4 - (1 + (l_3^0)^2) s^2 - 1 = 0$ . Le point  $Q_+^0$  est donc donné par (80) avec

$$s = \sigma_2^0 = \frac{1}{\delta_0} \sqrt{(-\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2})(\sqrt{1 + \delta_0^2} + \sqrt{1 + 2\delta_0^2})}$$

(avec la valeur (84) de  $l_3^0$ ). Or, (81) donne

$$\begin{aligned}
 P_{2,p}(\sigma_2^0) &= \frac{1}{\delta_0} (-\delta_0 + \sqrt{1 + 2\delta_0^2}) \sqrt{\sqrt{1 + \delta_0^2} + \sqrt{1 + 2\delta_0^2}} \times \\
 &\times [\sqrt{\sqrt{1 + \delta_0^2} + \sqrt{1 + 2\delta_0^2}} - (-\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2}) \sqrt{-\delta_0 + \sqrt{1 + \delta_0^2}}] > 0
 \end{aligned}$$

auquel cas (80) et le tableau 60 placent le point  $Q_+^0$  sur l'arc  $\widehat{OP_+^0}$  de la branche  $(k_2^{0,+})$ . La démonstration de la proposition (44<sub>1</sub>) se fait donc en remplaçant dans la démonstration de la proposition (41<sub>1</sub>)  $\delta$  par  $\delta_0$  et le domaine  $(\Delta_{1,r})$  par le domaine  $(\Delta_{3,i})$ .

Reçu le, 20. III. 1977.