

SUR LA FONCTIONNELLE $\frac{f(z_1)}{f'(z_2)}$ AU CAS DES FONCTIONS TYPIQUEMENT RÉELLES (III)

par
DUMITRU RIPEANU

&10. NOTATIONS 6.

1°. (S_-) désigne la boucle $\widehat{A_-C_-OD_-A_-}$ de la strophoïde droite (S) d'équation

$$(85) \quad \rho + (2 + \rho)(\rho^2 + b^2) = 0 \quad (\text{fig. 12})$$

M_- — désigne le point d'intersection de (S_-) avec l'arc de cercle $(K_{N(e), +})$ défini aux notations 1 (points 1° et 2°) ([4]). N_- désigne le symétrique de M_- par rapport à l'axe Op .

R_- et S_- désignent respectivement des points situés sur les portions $\widehat{A_-M_-}$ et $\widehat{A_-N_-}$ des arcs de cercle $(K_{N(e), +})$ et $(K_{N(e), -})$.

(T_-) désigne la région obtenue en retirant au triangle curviligne (fermé)

$\widehat{A_-S_-N_-OM_-R_-A_-}$ le segment (fermé) $\widehat{A_-O}$ et la portion $\widehat{N_-OM_-}$ (fermée et appartenant à (S_-)) de sa frontière.

(T_+) désigne la région symétrique de (T_-) par rapport à l'axe Ob .

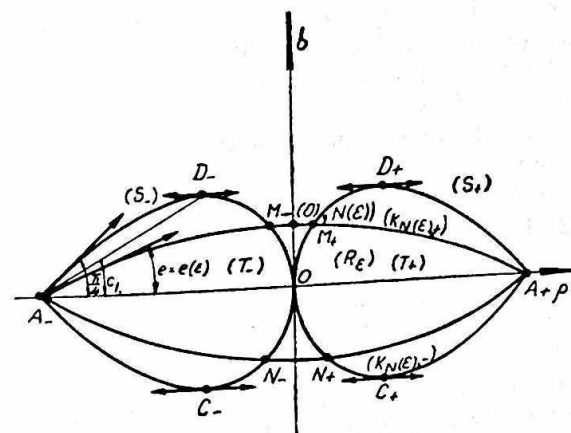


Fig. 12.

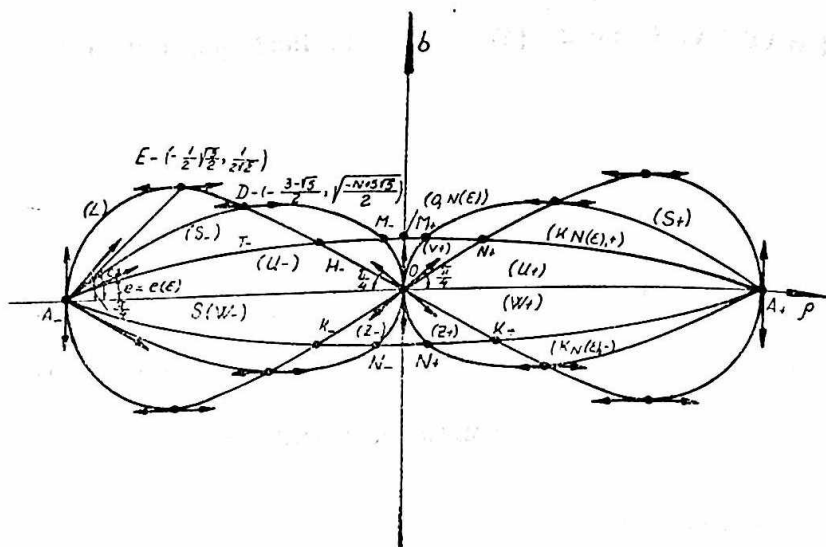


Fig. 13.

2°. H_- désigne le point d'intersection situé dans le second quadrant des axes $O\rho b$, de la lemniscate de Bernoulli (L) d'équation

$$(86) \quad \rho^2 - b^2 = (\rho^2 + b^2)^2$$

avec l'arc de cercle $(K_{N(\varepsilon),+})$ défini aux notations 1 (points 1° et 2°) ([4]) (fig. 13). K_- désigne le symétrique de H_- par rapport à l'axe $O\rho$.

T_- désigne un point situé sur la portion $\overline{A_-H_-}$ de l'arc de cercle $(K_{N(\epsilon)}, +)$. S désigne un point du segment $\overline{A_-O_-}$. (U_-) désigne la réunion de l'intérieur du triangle curviligne $OH_-T_-A_-SO$ et de l'arc (ouvert aux extrémités) $\overline{A_-H_-}$ de l'arc de cercle $(K_{N(\epsilon)}, +)$. (V_-) désigne la réunion de l'intérieur du triangle curviligne OM_-H_-O et de l'arc (ouvert) $\overline{H_-M_-}$ de l'arc de cercle $(K_{N(\epsilon)}, +)$. (W_-) désigne la région symétrique de la région (U_-) par rapport à l'axe $O\rho$. (Z_-) désigne la région symétrique de la région (V_-) par rapport à l'axe $O\rho$. Enfin, (U_+) , (V_+) , (W_+) et (Z_+) désignent respectivement les régions symétriques de (U_-) , (V_-) , (W_-) et (Z_-) par rapport à l'axe $O\delta$.

A l'aide de ces notations, nous présentons les théorèmes suivants, qui fournissent quelques renseignements sur l'arc $(G_{r/\varepsilon}, z_1, z_1)$ défini aux notations 1 (point 6°) ([4])).

THÉOREME 2. 1°. Si le noeud z_1 est complexe, l'arc (G_{1z_1}, z_1, z_1) défini aux notations 1 (point 6°) est un arc de cubique circulaire. Son équation cartésienne est donnée par la relation (93) et un système d'équations paramétriques de cet arc par les formules (88).

2°. Si le noeud z_1 est réel, l'arc $(G_{|E, z_1, z_1})$ est un arc d'hyperbole pour toutes les positions des noeuds z_1 (sur le diamètre $\overline{A-A_+}$) et de z_2 (dans (R_+)), aux exceptions suivantes près : a). le noeud z_2 est situé dans la région (T_-) , définie aux notations 6 (point 1°) et le noeud z_1 est donné par la

formule (103). b). Le noeud z_2 est situé dans la région (T_+) et le noeud z_1 est donné par la formule (105). Dans ces cas, l'arc $(G_{1/2, z_1, z_2})$ est un segment de droite. L'équation cartésienne de l'arc d'hyperbole $(G_{1/2, z_1, z_2})$ est donnée par la relation (95) et un système d'équations paramétriques de cet arc par les formules (94).

3°. Aux cas où le noeud z_1 est réel et l'arc $(G_{r,1}, z_1, z_1)$ est un segment de droite, dont les extrémités seront désignées par $M_{r,1}$ et $M_{r,2}$ les coordonnées $(X_{r,1}, Y_{r,1})$ de $M_{r,1}$ et $(X_{r,2}, Y_{r,2})$ de $M_{r,2}$ sont données par les formules (113). Son équation cartésienne est donnée par la formule (100) et un système de ses équations paramétriques par les formules (110).

Démonstration 1°. En posant

(87) $z_1 = r_0 + p_0 i$ (r_0, p_0 nombres réels) les notations 1 (points 5° et 6°) ([4]) donnent pour les équations paramétriques de l'arc $(G_{7/k}, z_1, z_2)$

$$(88) \quad (G_{r/\varepsilon, z_1, z_2}) : \begin{cases} X = X(s) = G_r(\varepsilon, z_1, z_2, s) = \frac{r_0^2 + p_0^2}{K} \cdot \frac{A_0(s)A(s) + B_0(s)B(s)}{A_0^2(s) + B_0^2(s)} \\ Y = Y(s) = G_r(\varepsilon, z_1, z_2, s) = \frac{r_0^2 + p_0^2}{K} \cdot \frac{B_0(s)A(s) - A_0(s)B(s)}{A_0^2(s) + B_0^2(s)} \end{cases} \quad (s \in [-1, 1])$$

avec

$$A_0(s) = r_0(1 + r_0^2 + p_0^2) + p_0\varepsilon(1 - r_0^2 - p_0^2) + 2(r_0^2 + p_0^2)s$$

$$B_0(s) = p_0(1 - r_0^2 - p_0^2) - r_0\varepsilon(1 + r_0^2 + p_0^2) - 2\varepsilon(r_0^2 + p_0^2)s$$

et K , $A(s)$, $B(s)$ données respectivement par (8) et (10) ([4]).

Si nous posons pour la commodité

$$(89) \quad L = \frac{r_0^2 + p_0^2}{K}$$

(88) donne $A_0(s)X + B_0(s)Y = L A(s)$ et $B_0(s)X - A_0(s)Y = LB(s)$.
En remplaçant dans ces relations L , $A_0(s)$, $B_0(s)$, $A(s)$, $B(s)$ respectivement par leurs expressions (89), (88) et (10) ([4]) elles s'écrivent respectivement :

$$(90) \quad a_0 s^2 + b_0 s + c_0 = 0, \quad a' s^2 + b' s + c' = 0$$

avec

$$(91) \quad \begin{cases} P_{0,A} = 1 + \rho^2 - b^2 - (\rho^4 + 10 \rho^2 b^2 + b^4) - (\rho^2 - b^2) \cdot (\rho^2 + b^2)^2 \\ P_{1,A} = 1 - 4b^2 - (\rho^2 + b^2)^2, \quad P_{2,A} = \rho^2 - b^2 - (\rho^2 + b^2)^2 \\ P_{0,B} = 3 + 2(\rho^2 - b^2) - (\rho^2 + b^2)^2, \quad P_{1,B} = 1 + 4\rho^2 - (\rho^2 + b^2)^2 \end{cases}$$

$$(92) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0 = r_0^2 + p_0^2 \\ a_0 = 4\sigma_0 P_{2,A}, \quad b_0 = 2\sigma_0(2\rho P_{1,A} - KX + K\epsilon Y) \\ \dot{c}_0 = \sigma_0 P_{0,A} - K[r_0(1 + \sigma_0) + p_0\epsilon(1 - \sigma_0)]X - \\ \quad - K[p_0(1 - \sigma_0) - r_0\epsilon(1 + \sigma_0)]Y \\ a' = 8\rho b\sigma_0, \quad b' = 2\sigma_0(2bP_{1,B} - K\epsilon X - KY), \\ c' = 2\rho b\sigma_0 P_{0,B} + K[p_0(1 - \sigma_0) - r_0\epsilon(1 + \sigma_0)]X - \\ \quad - K[r_0(1 + \sigma_0) + p_0\epsilon(1 - \sigma_0)]Y. \end{array} \right.$$

L'élimination de s entre les équations (90) donne la relation classique

$$E = (a_0 c' - c_0 a')^2 - (a_0 b' - b_0 a')(b_0 c' - c_0 b') = 0$$

qui s'écrit avec les expressions (92) de $a_0, b_0, c_0, a', b', c'$:

$$(93) \quad \begin{cases} E = 16 K^2 \sigma_0^2 \left[-4b^4(1 - \rho^2 - b^2)^4 \sigma_0^2 + 4b^2(1 - \rho^2 - b^2)^2 \cdot \right. \\ \quad \cdot \sigma_0 [(E_0 + E_1 \varepsilon)X + (E_1 - E_0 \varepsilon)Y] - L_0(1 + \varepsilon^2)(X^2 + \\ \quad + Y^2) + [(E_1 - E_0 \varepsilon)X - (E_0 + E_1 \varepsilon)Y]^2 + K(1 + \varepsilon^2) p_0 \sigma_0 (1 - \\ \quad - \sigma_0) [(2\rho b - P_{2,A} \varepsilon)X - (P_{2,A} + 2\rho b \varepsilon)Y] (X^2 + Y^2) \Big]_{\mathbb{Q}} = 0 \\ \text{avec} \\ E_0 = -P_{2,A} r_0 + 2\rho b p_0 + (\rho P_{1,A} - P_{2,A} r_0 - 2\rho b p_0) \sigma_0. \\ E_1 = -2\rho b r_0 - P_{2,A} p_0 + (b P_{1,B} - 2\rho b r_0 + P_{2,A} p_0) \sigma_0 \\ L_0 = K b (1 - \rho^2 - b^2) \sigma_0 \left[4(\rho^2 + b^2) p_0 + [b(1 - \rho^2 - b^2) - 4(\rho^2 + \right. \\ \quad \left. + b^2) p_0] \sigma_0 \right]_{\mathbb{Q}} \\ \text{et } P_{1,A}, P_{2,A}, P_{1,B} \text{ donnés par (91),} \end{cases}$$

ce qui démontre le premier point du théorème.

2°. Si le noeud z_1 est réel (en (87) $p_0 = 0$), alors les équations paramétriques (88) de $(G_{r/\varepsilon, z_1, z_2})$ deviennent

$$(94) \quad \begin{cases} X = X(s) = \frac{r_0}{K(1 + \varepsilon^2)} \cdot \frac{A(s) - \varepsilon B(s)}{1 + r_0^2 + 2r_0 s} \\ Y = Y(s) = -\frac{r_0}{K(1 + \varepsilon^2)} \cdot \frac{\varepsilon A(s) + B(s)}{1 + r_0^2 + 2r_0 s} \\ (s \in [-1, +1]) \end{cases}$$

avec $K, A(s), B(s)$ données respectivement par (8) et (10) ([4]). et l'équation cartésienne (93) de $(G_{r/\varepsilon, z_1, z_2})$ s'écrit

$$(95) \quad \begin{aligned} E = 16K^2 \cdot r_0^8 \left[-4b^4(1 - \rho^2 - b^2)^4 + 4b^2(1 - \rho^2 - b^2)^2 \cdot \right. \\ \cdot \left[\left[-P_{2,A} \frac{1+r_0^2}{r_0} + \rho P_{1,A} + \varepsilon \left(-2\rho b \cdot \frac{1+r_0^2}{r_0} + b P_{1,B} \right) \right] X + \right. \\ \left. + \left[-2\rho b \frac{1+r_0^2}{r_0} + b P_{1,B} - \varepsilon \left(-P_{2,A} \frac{1+r_0^2}{r_0} + \rho P_{1,A} \right) \right] Y \right]_{\mathbb{Q}} - \\ - K b^2 (1 - \rho^2 - b^2)^2 (1 + \varepsilon^2) (X^2 + Y^2) + \left[\left[-2\rho b \frac{1+r_0^2}{r_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + b P_{1,B} - \varepsilon \left(-P_{2,A} \frac{1+r_0^2}{r_0} + \rho P_{1,A} \right) \right] X - \left[-P_{2,A} \frac{1+r_0^2}{r_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + \rho P_{1,A} + \varepsilon \left(-2\rho b \frac{1+r_0^2}{r_0} + b P_{1,B} \right) \right] Y \right]_{\mathbb{Q}}^2 = 0 \end{aligned}$$

Il est évident que les équations paramétriques (94) représentent un arc d'hyperbole. Il est d'ailleurs tout aussi facile de le confirmer sur l'équation cartésienne (95) de cet arc. En effet, en écrivant l'équation (95) sous la forme

$$E = 16K^2 r_0^6 (A_0 X^2 + 2B_0 XY + C_0 Y^2 + 2D_0 X + 2E_0 Y + F_0) = 0^*$$

* E_0 désigne évidemment en (93) et (96) des expressions différentes.

nous avons

$$(66) \quad \begin{cases} A_0 = \left[-2\rho b(1 + r_0^2) + b P_{1,B} r_0 - \varepsilon [-P_{2,A}(1 + r_0^2) + \rho P_{1,A} r_0] \right]_{\mathbb{Q}}^2 - \\ \quad - K b^2 (1 - \rho^2 - b^2)^2 r_0^2 (1 + \varepsilon^2). \\ B_0 = -\left[-2\rho b(1 + r_0^2) + b P_{1,B} r_0 - \varepsilon [-P_{2,A}(1 + r_0^2) + \rho P_{1,A} r_0] \right]_{\mathbb{Q}} \cdot \\ \quad \cdot \left[-P_{2,A}(1 + r_0^2) + \rho P_{1,A} r_0 + \varepsilon [-2\rho b(1 + r_0^2) + b P_{1,B} r_0] \right]_{\mathbb{Q}} \\ C_0 = \left[-P_{2,A}(1 + r_0^2) + \rho P_{1,A} r_0 + \varepsilon [-2\rho b(1 + r_0^2) + b P_{1,B} r_0] \right]_{\mathbb{Q}}^2 - \\ \quad - K b^2 (1 - \rho^2 - b^2)^2 r_0^2 (1 + \varepsilon^2) \\ D_0 = 2b^2(1 - \rho^2 - b^2)^2 r_0 \left[-P_{2,A}(1 + r_0^2) + \rho P_{1,A} r_0 + \right. \\ \quad \left. + \varepsilon [-2\rho b(1 + r_0^2) + b P_{1,B} r_0] \right]_{\mathbb{Q}} \\ E_0 = 2b^2(1 - \rho^2 - b^2)^2 r_0 \left[-2\rho b(1 + r_0^2) + b P_{1,B} r_0 - \right. \\ \quad \left. - \varepsilon [-P_{2,A}(1 + r_0^2) + \rho P_{1,A} r_0] \right]_{\mathbb{Q}} \\ F_0 = -4b^4(1 - \rho^2 - b^2)^4 r_0^2 \end{cases}$$

Avec les expressions (91) de $P_{1,A}, P_{2,A}$ et de $P_{1,B}$ et (96) de $A_0, B_0, \dots, F_0$, nous avons donc

$$(97) \quad \begin{aligned} B_0^2 - A_0 C_0 &= [K b (1 - \rho^2 - b^2) r_0 (1 + \varepsilon^2) P_0(r_0)]^2 \\ P_0(r_0) &= \rho^2 + b^2 - \rho(1 + \rho^2 + b^2) r_0 + (\rho^2 + b^2) r_0^2 \end{aligned}$$

$$(98) \quad \begin{vmatrix} A_0 & B_0 & D_0 \\ B_0 & C_0 & E_0 \\ D_0 & E_0 & F_0 \end{vmatrix} = -[2K b^2 (1 - \rho^2 - b^2)^2 (1 + \varepsilon^2) r_0 P_0^2(r_0)]^2$$

avec $P_0(r_0)$ de (97)

$$(99) \quad \text{Si en (97) } P_0(r_0) = 0, \text{ alors } \frac{1 + r_0^2}{r_0} = \rho \frac{1 + \rho^2 + b^2}{\rho^2 + b^2}$$

En tenant compte de l'expression (99) de $\frac{1 + r_0^2}{r_0}$, des expressions (91) de $P_{1,A}, P_{2,A}, P_{1,B}$ et de l'expression (8) ([4]) de K nous concluons que

$$(100) \quad \begin{cases} \text{Si en (97) } P_0(r_0) = 0, \text{ alors l'équation (95) de } (G_{r/\varepsilon, z_1, z_2}) \\ \text{s'écrit} \\ E = -\left[\frac{4K b (1 - \rho^2 - b^2) r_0^4}{\rho^2 + b^2} [(-2\rho b + \varepsilon P_{2,A})X + (P_{2,A} + 2\varepsilon \rho b)Y + \right. \\ \quad \left. + 2b(\rho^2 + b^2)(1 - \rho^2 - b^2)] \right]_{\mathbb{Q}}^2 = 0 \text{ c'est-à-dire} \\ (-2\rho b + \varepsilon P_{2,A})X + (P_{2,A} + 2\varepsilon \rho b)Y + 2b(\rho^2 + b^2)(1 - \rho^2 - b^2) = 0 \\ \text{avec } P_{2,A} \text{ donnée par (91).} \end{cases}$$

L'arc $(G_{r/\varepsilon, z_1, z_2})$ est donc en ce cas un segment de droite.

D'ailleurs, (97) donne

$$(101) \quad P'_0(r_0) = -\rho(1 + \rho^2 + b^2) + 2(\rho^2 + b^2)r_0 = 0$$

$$\text{Pour } r_0 = r_{1,0} = q \frac{1 + \rho^2 + b^2}{2(\rho^2 + b^2)}.$$

r_0	$r_{0,1}$	-1	$r_{0,2}$	1
$P'_0(r_0)$	0	+		
$P_0(r_0)$	$P_0(-1) \nearrow 0 \nearrow P_0(1)$			

Tableau 61

Le polynome $P_0(r_0)$ admet donc dans l'intervalle $(-1, +1)$ la (seule) racine

$$(103) \quad z_1 = r_0 = r_{0,2} = \frac{\rho(1 + \rho^2 + b^2) + \sqrt{\rho^2 - 2(\rho^2 + b^2)(\rho^2 + 2b^2) + \rho^2(\rho^2 + b^2)^2}}{2(\rho^2 + b^2)}$$

En effet, l'autre racine de $P_0(r_0)$ est plus petite que -1 , c'est-à-dire

$$\frac{\rho(1 + \rho^2 + b^2) - \sqrt{\rho^2 - 2(\rho^2 + b^2)(\rho^2 + 2b^2) + \rho^2(\rho^2 + b^2)^2}}{2(\rho^2 + b^2)} < -1$$

ce qui est évident à l'aide de (102).

r_0	-1	$r_{0,1}$	1
$P'_0(r_0)$		-	0
$P_0(r_0)$	$P_0(-1) \searrow P_0(r_{0,1}) \nearrow P_0(1)$		

Tableau 62

Si $r_{0,1} = -1$, alors
 $-\rho(1 + \rho^2 + b^2) = 2(\rho^2 + b^2)$

donc en (97)

$P_0(r_0) = (\rho^2 + b^2)(1 + r_0)^2 > 0$
 pour tout $r_0 \in (-1, 1)$.

Si $-1 < r_{0,1} < 1$, alors (97) et (101) donnent au tableau 62

$$P_0(r_{0,1}) = (\rho^2 + b^2)(1 - r_{0,1}^2) > 0$$

par suite $P_0(r_0) > 0$ pour tout r_0 . Si $r_{0,1} = 1$, alors $\rho(1 + \rho^2 + b^2) = 2(\rho^2 + b^2)$, donc en (97) $P_0(r_0) = (\rho^2 + b^2)(1 - r_0)^2 > 0$ pour tout $r_0 \in (-1, 1)$. Enfin, si $r_{0,1} > 1$, alors au tableau 63 (97) donne

r_0	-1	$r_{0,3}$	1	$r_{0,1}$
$P'_0(r_0)$		-		
$P_0(r_0)$	$P_0(-1) \searrow 0 \searrow P_0(1)$			

Tableau 63

$$(104) \quad \begin{cases} P_0(-1) = 2(\rho^2 + b^2) + \rho(1 + \rho^2 + b^2) > 0 \\ P_0(1) = 2(\rho^2 + b^2) - \rho(1 + \rho^2 + b^2) < 0 \end{cases}$$

Le polynome $P_0(r_0)$ admet donc dans l'intervalle $(-1, 1)$ la (seule) racine

$$(105) \quad z_1 = r_0 = r_{0,3} = \frac{\rho(1 + \rho^2 + b^2) - \sqrt{\rho^2 - 2(\rho^2 + b^2)(\rho^2 + 2b^2) + \rho^2(\rho^2 + b^2)^2}}{2(\rho^2 + b^2)}$$

Si donc $r_{0,1} < -1$, alors au tableau 61, (97) donne

$$(102) \quad \begin{cases} P_0(-1) = 2(\rho^2 + b^2) + \rho(1 + \rho^2 + b^2) < 0 \\ \text{et } P_0(1) = 2(\rho^2 + b^2) - \rho(1 + \rho^2 + b^2) > 0 \end{cases}$$

En effet, l'autre racine de $P_0(r_0)$ est plus grande que 1, c'est-à-dire

$$\frac{\rho(1 + \rho^2 + b^2) + \sqrt{\rho^2 - 2(\rho^2 + b^2)(\rho^2 + 2b^2) + \rho^2(\rho^2 + b^2)^2}}{2(\rho^2 + b^2)} > 1$$

ce qui est évident à l'aide de (104).

(106) Par conséquent le polynome $P_0(r_0)$ de (97) s'annule dans l'intervalle $(-1, 1)$ aux seuls cas où en (101) $r_{0,1} < -1$ ou $r_{0,1} > 1$.
 Si $r_{0,1} < -1$, $P_0(r_0)$ a dans l'intervalle $(-1, 1)$ la (seule) racine $r_{0,2}$, donnée par (103) et si $r_{0,1} > 1$, $P_0(r_0)$ a dans le même intervalle la (seule) racine $r = r_{0,3}$ donnée par (105).

Or, la relation $r_{0,1} = -1$ s'écrit à l'aide de (101)

$$(107) \quad \rho + (2 + \rho)(\rho^2 + b^2) = 0$$

C'est l'équation d'une strophoïde droite, désignée aux notations 6 (point 1°) par (S). Si nous prenons de (107) $b = (1 + \rho) \sqrt{-\frac{\rho}{2 + \rho}}$, alors

ρ	-2	-1	$-\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$	0
$\frac{db}{d\rho}$		+	1	+
$\frac{d^2b}{d\rho^2}$			+	0
b	$-\infty \nearrow 0 \nearrow \sqrt{\frac{1}{2}(-11 + 5\sqrt{5})} \searrow 0$			
$\frac{d^2b}{d\rho^2}$				-

Tableau 64

$$\frac{db}{d\rho} = -\frac{1 + 3\rho + \rho^2}{(2 + \rho)^2} \sqrt{-\frac{\rho}{2 + \rho}}$$

$$\frac{d^2b}{d\rho^2} = \frac{1 - \rho}{\rho(2 + \rho)^3} \sqrt{-\frac{\rho}{2 + \rho}}$$

ce qui donne le tableau 64 et la forme de (S_-) (fig. 12). La relation $r_{0,1} = 1$ s'écrit à l'aide de (101) $\rho - (2 - \rho)(\rho^2 + b^2) = 0$ et représente par conséquent

dans Δ la boucle (S_+) symétrique de (S_-) par rapport à l'axe Ob . La position mutuelle de (S_-) et (S_+) par rapport à la région (R_*) (fig. 12) est donnée par le simple fait que sur la figure en question

$$(108) \quad \operatorname{tg} c_1 = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(-11 + 5\sqrt{5})}}{1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{-2 + \sqrt{5}}$$

c_1 étant l'angle fait par le segment $\overline{A-D}$ avec l'axe $O\rho$. D'autre part, l'équation de l'arc de cercle $(K_{m,+})$ de la fig. 1 est

$$(108_1) \quad \rho^2 + b^2 + \frac{1 - m^2}{m} b - 1 = 0$$

Par suite, sur la figure en question, $\operatorname{tg} a(m) = \frac{2m}{1-m^2}$, $a(m)$ étant l'angle fait par la tangente en A_- à $(K_{m,+})$ avec l'axe $O\rho$ ($0 < a(m) < \frac{\pi}{2}$). Si donc sur la fig. 12 $e = e(\varepsilon)$ désigne l'angle fait par la tangente en A_- à l'arc de cercle $(K_{N(\varepsilon),+})$ avec l'axe $O\rho$, nous avons $\operatorname{tg} e(\varepsilon) = \frac{2N(\varepsilon)}{1-N^2(\varepsilon)}$ auquel cas le lemme 7 ([4]) et le fait que la valeur de l'expression $\frac{2m}{1-m^2}$ croît de 0 à ∞ alors que m croît de 0 à 1 donnent

$$(109) \operatorname{tg} e(\varepsilon) \leq \frac{2N(1)}{1-N^2(1)} = -(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2(2 + \sqrt{2})} < \sqrt{-2 + \sqrt{5}}$$

du fait que la dernière inégalité s'écrit $\sqrt{2(2 + \sqrt{2})} < 1 + \sqrt{2} + \sqrt{-2 + \sqrt{5}}$ donc par élévation des termes au carré et multiplication par $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$: $\sqrt{-1 + \sqrt{5}} < 2 + \sqrt{2}$ ce qui est évident. Par suite (108) et (109) donnent sur la fig. 12 $e(\varepsilon) < c_1$, donc l'arc $\widehat{A_-D_-}$ de (S_-) est situé au-dessus de l'arc de cercle $(K_{N(\varepsilon),+})$. Sur la figure en question nous avons en (101) $r_{0,1} < -1$ si le point (ρ, b) (appartenant à (R_e)) est dans la région (T_-) définie aux notations 6 (point 1°) et $r_{0,1} > 1$ si ce point est dans la région (T_+) . Enfin si ce point est à l'intérieur de l'un des triangles curvilignes OM_+M_- ou ON_-N_+ ou sur leurs frontières (à l'exception, évidemment, de l'origine O), nous avons en (101) $-1 \leq r_{0,1} \leq 1$ ce qui, avec (97), (106) et (100) démontre le point 2° du théorème.

3°. Si en (97) $P_0(r_0) = 0$, alors $1 + r_0^2 = r_0 \rho \frac{1 + \rho^2 + b^2}{\rho^2 + b^2}$. En portant l'expression obtenue de $1 + r_0^2$ dans (94), nous avons pour équations paramétriques du segment de droite $(G_{r/\varepsilon, z_1, z_2})$

$$(110) \begin{cases} X = X(s) = \frac{\rho^2 + b^2}{K(1 + \varepsilon^2)} \cdot \frac{A(s) - \varepsilon B(s)}{\rho(1 + \rho^2 + b^2) + 2(\rho^2 + b^2)s} \\ Y = Y(s) = -\frac{\rho^2 + b^2}{K(1 + \varepsilon^2)} \cdot \frac{\varepsilon A(s) + B(s)}{\rho(1 + \rho^2 + b^2) + 2(\rho^2 + b^2)s} \end{cases} \quad (s \in [-1, 1])$$

ce qui donne, avec les valeurs (10) ([4]) de $A(s)$ et $B(s)$

$$(111) \begin{cases} X'(s) = \frac{P_{2,A} + 2\rho b\varepsilon}{2\rho b - \varepsilon P_{2,A}} \cdot Y'(s) \\ Y'(s) = 2 \frac{\rho^2 + b^2}{K(1 + \varepsilon^2)} (2\rho b - \varepsilon P_{2,A}) \frac{1 + 2(\rho^2 - b^2)s + (\rho^2 + b^2)s^2 + 4\rho(1 + \rho^2 + b^2)s + 4(\rho^2 + b^2)s^2}{[\rho(1 + \rho^2 + b^2) + 2(\rho^2 + b^2)s]^2} \end{cases}$$

avec $P_{2,A}$ donné par (91)

Le réalisant du polynôme du second degré en s qui figure au numérateur de l'expression (111) de $Y'(s)$ est $-16(1 - \rho^2 - b^2)^2 < 0$ par suite

$$(112) \begin{cases} \operatorname{sg} X'(s) = \operatorname{sg}(P_{2,A} + 2\rho b\varepsilon) \\ \operatorname{sg} Y'(s) = \operatorname{sg}(2\rho b - \varepsilon P_{2,A}) \\ \text{pour tout } s \in [-1, 1] \end{cases}$$

D'ailleurs la première relation (111) résulte de (100), il était inutile de la déduire à l'aide des expressions (10) ([4]), comme ci-dessus. Les expressions (110) étant donc des fonctions monotones de s , il s'ensuit que lorsque s parcourt l'intervalle $[-1, 1]$, le point M de coordonnées $X(s)$, $Y(s)$ données par (110) parcourt un segment de droite dont les extrémités ont les coordonnées suivantes données par (110):

$$(113) \begin{cases} X_{r,1} = \frac{\rho^2 + b^2}{K(1 + \varepsilon^2)} \cdot \frac{1 - 4(\rho + \varepsilon b) + 5\rho^2 + 14\varepsilon\rho b - 5b^2 + 16\rho b(-\varepsilon\rho + b) - 5\rho^4 + 4\varepsilon\rho^3b - 18\rho^2b^2 - 4\varepsilon\rho b^3 - 5b^4 + 4(\rho + \varepsilon b)(\rho^2 + b^2)^2 - (\rho^2 + b^2)^3 + 2\varepsilon\rho b - b^2)(\rho^2 + b^2)^2}{\rho - 2(\rho^2 + b^2) + \rho(\rho^2 + b^2)} \\ Y_{r,1} = -\frac{\rho^2 + b^2}{K(1 + \varepsilon^2)} \cdot \frac{\varepsilon + 4(-\varepsilon\rho + b) + 5\varepsilon\rho^2 - 14\rho b - 5\varepsilon b^2 + 16\rho b(\rho + \varepsilon b) - (5\varepsilon\rho^4 + 4\rho^3b + 18\varepsilon\rho^2b^2 - 4\rho b^3 + 5\varepsilon b^4) + 4(\varepsilon\rho + b)(\rho^2 + b^2)^2 + b^2)(\rho^2 + b^2)^2}{\rho - 2(\rho^2 + b^2) + \rho(\rho^2 + b^2)} \\ X_{r,2} = \frac{\rho^2 + b^2}{K(1 + \varepsilon^2)} \cdot \frac{1 + 4(\rho + \varepsilon b) + 5\rho^2 + 14\varepsilon\rho b - 5b^2 + 16\rho b(\varepsilon\rho - b) - 5\rho^4 + 4\varepsilon\rho^3b - 18\rho^2b^2 - 4\varepsilon\rho b^3 - 5b^4 - 4(\rho + \varepsilon b)(\rho^2 + b^2)^2 - (\rho^2 + b^2)^3 + 2\varepsilon\rho b - b^2)(\rho^2 + b^2)^2}{\rho + 2(\rho^2 + b^2) + \rho(\rho^2 + b^2)} \\ Y_{r,2} = -\frac{\rho^2 + b^2}{K(1 + \varepsilon^2)} \cdot \frac{\varepsilon + 4(\varepsilon\rho - b) + 5\varepsilon\rho^2 - 14\rho b - 5\varepsilon b^2 - 16\rho b(\rho + \varepsilon b) - (5\varepsilon\rho^4 + 4\rho^3b + 18\varepsilon\rho^2b^2 - 4\rho b^3 + 5\varepsilon b^4) + 4(-\varepsilon\rho + b)(\rho^2 + b^2)^2 + (-\varepsilon\rho^2 + 2\rho b + \varepsilon b^2)(\rho^2 + b^2)^2}{\rho + 2(\rho^2 + b^2) + \rho(\rho^2 + b^2)} \end{cases}$$

ce qui démontre le dernier point du théorème.

THÉORÈME 3. Au cas où le noeud z_1 est réel et l'arc $(G_{r/\varepsilon, z_1, z_2})^*$ est un segment de droite, dont les extrémités seront désignées par $M_{r,1}$ et $M_{r,2}$, ce segment est parallèle à l'un des axes OX ou OY aux seuls cas suivants:

a) Le noeud z_2 est situé dans l'une des régions (U_+) ou (Z_+) définies aux notations 6 (point 2°), le noeud z_1 est donné par la formule (105) et $\varepsilon = \frac{2\rho b}{P_{2,A}}$, avec $P_{2,A}$ donné par (91).

b) Le noeud z_2 est situé dans l'une des régions (V_-) ou (W_-) , z_1 est donné par (103) et $\varepsilon = \frac{2\rho b}{P_{2,A}}$.

c) Le noeud z_2 est situé dans l'une des régions (V_+) ou (W_+) , z_1 est donné par (105) et $\varepsilon = -\frac{P_{2,A}}{2\rho b}$.

d) Le noeud z_2 est situé dans l'une des régions (U_-) ou (Z_-) , z_1 est donné par (103) et $\varepsilon = -\frac{P_{2,A}}{2\rho b}$.

* cf. notation 1 ([4]) point 6°.

Aux cas a) et b), le segment $\overline{M_{r,1} M_{r,2}}$ est parallèle à l'axe OX et les coordonnées de ses extrémités sont données par les formules (116). Aux cas c) et d) ce segment est parallèle à l'axe OY et les coordonnées de ses extrémités sont données par les formules (117) (les coordonnées de $M_{r,1}$ sont $(X_{r,1}, Y_{r,1})$ et celles de $M_{r,2}$ $(X_{r,2}, Y_{r,2})$).

Démonstration. Il résulte de (111) que $Y(s)$ est constant si (et seulement si) $\varepsilon = \frac{2pb}{P_{2,A}}$. La relation $P_{2,A} = 0$ s'écrit à l'aide de (91) sous la forme (86). La position de la lemniscate (L) par rapport à la région (R_+) (fig. 13) est donnée par le simple fait qu'en posant en (86) $\rho = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$ (r, θ coordonnées polaires) il vient $\rho = \cos \theta \cdot \sqrt{\cos 2\theta}$,

$$b = \sin \theta \sqrt{\cos 2\theta}; \quad \frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}, \quad \frac{db}{d\theta} = \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$\frac{db}{d\rho} = -\cotg 3\theta, \quad \frac{d^2b}{d\rho^2} = \frac{3}{\frac{d\rho}{d\theta} \sin^3 3\theta}.$$

ce qui donne le tableau 65. Ce tableau (et les relations

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$d\rho/d\theta$	0	—	—
ρ	1	$\searrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$	$\searrow 0$
$db/d\theta$	+	0	—
b	0	$\nearrow \frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\searrow 0$
$db/d\rho$	∞	0	1
$a^2b/d\rho^2$	—	—	—

Tableau 65

$$\begin{aligned} \rho(\pi - \theta) &= -\rho(\theta), \quad b(\pi - \theta) = b(\theta) \\ \rho(\pi + \theta) &= -\rho(\theta), \quad b(\pi + \theta) = \\ &= -b(\theta) \\ \rho(2\pi - \theta) &= \rho(\theta), \quad b(2\pi - \theta) = \\ &= -b(\theta) \end{aligned}$$

donne la forme de (L) (fig. 13). Sur la figure en question

$$\operatorname{tg} c_2 = \frac{1}{5} (2\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

c_2 étant l'angle fait par le segment $\overline{A-E_-}$ avec l'axe $O\rho$.

Sur la même figure, (109) donne

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} e(\varepsilon) &\leq -(1 + \sqrt{2}) + \\ &+ \sqrt{2(2 + \sqrt{2})} < \frac{1}{2} < \frac{1}{5} \left((2\sqrt{2} + \right. \\ &\left. + \sqrt{3}) = \operatorname{tg} c_2 \right. \end{aligned}$$

Par suite, $e(\varepsilon) < c_2$ et l'arc $\overline{A-E_-}$ de (L) est situé au dessus de l'arc de cercle $(K_{N(e),+})$. La position mutuelle de la strophoïde (S) et de la lemniscate (L) (fig. 13) est donnée par le simple fait que en portant dans la relation (86) la valeur $-\rho \frac{(1+\rho)^2}{2+\rho}$ donnée pour b^2 par (85), il vient $\rho(1+$

$+\rho) \cdot (1 + 3\rho + \rho^2) = 0$ auquel cas le tableau 64 donne dans le second quadrant des axes $O\rho b$ de la fig. 13 les points A_- , D_- et l'origine O comme les (seuls) points d'intersection de ces courbes.

Si le noeud z_2 est à l'intérieur de l'une des boucles de la lemniscate (L) , alors $P_{2,A} > 0$ et s'il est à l'extérieur de ces boucles, alors en (91) $P_{2,A} < 0$. Il s'ensuit que $\varepsilon = \frac{2pb}{P_{2,A}}$ est positif si (et seulement si) le noeud z_2 est situé dans l'une des régions (U_-) ou (Z_+) de (T_+) ou (V_-) ou (W_-) de (T_-) . $X(s)$ de (110) est constant si (et seulement si) $\varepsilon = -\frac{P_{2,A}}{2pb}$ (cf. (111)), ce qui donne une valeur positive pour ε si (et seulement si) le noeud z_2 est situé dans l'une des régions (V_+) ou (W_+) de (T_+) ou (U_-) ou (Z_-) de (T_-) . Les valeurs respectives de r_0 sont données par le théorème précédent.

En faisant en (110) $\varepsilon = \frac{2pb}{P_{2,A}}$, nous avons avec les valeurs (91) de $P_{2,A}$ et (10) ([4]) de $A(s)$ et $B(s)$

$$(114) \quad \begin{cases} X(s) = P_{2,A} \frac{\rho^2 - b^2 + 2(\rho^2 + b^2)s + (\rho^2 - b^2)(\rho^2 + b^2)s^2 + 4\rho(\rho^2 + b^2)(1 + \rho^2 + b^2)s + 4(\rho^2 + b^2)s^2}{K(\rho^2 + b^2)[\rho(1 + \rho^2 + b^2) + 2(\rho^2 + b^2)s]} \\ Y = -\frac{2b(1 - \rho^2 - b^2)[\rho^2 - b^2 - (\rho^2 + b^2)s]}{K(\rho^2 + b^2)} \end{cases}$$

En faisant en (110) $\varepsilon = -\frac{P_{2,A}}{2pb}$, nous avons

$$(115) \quad \begin{cases} X = \frac{4\rho b^2(1 - \rho^2 - b^2)}{K(\rho^2 + b^2)} \\ Y(s) = 2\rho b \cdot \frac{\rho^2 - b^2 + 2(\rho^2 + b^2)s + (\rho^2 - b^2)(\rho^2 + b^2)s^2 + 4\rho(\rho^2 + b^2)(1 + \rho^2 + b^2)s + 4(\rho^2 + b^2)s^2}{K(\rho^2 + b^2)[\rho(1 + \rho^2 + b^2) + 2(\rho^2 + b^2)s]} \end{cases}$$

En faisant en (114) $s = -1$, puis $s = 1$, nous avons pour les coordonnées des points $M_{r,1}$ et $M_{r,2}$, à l'aide de la valeur (8) ([4]) de K , si $\overline{M_{r,1} M_{r,2}}$ est parallèle à l'axe OX :

$$(116) \quad \begin{cases} X_{r,1} = X(-1) = R_1(\rho, b) = \frac{[\rho^2 - b^2 - (\rho^2 + b^2)s][\rho^2 - b^2 - 4\rho(\rho^2 + b^2) + 6(\rho^2 + b^2)s - 4\rho(\rho^2 + b^2)s^2 + (\rho^2 - b^2)(\rho^2 + b^2)s^2]}{(\rho^2 + b^2)[\rho - 2(\rho^2 + b^2) + \rho(\rho^2 + b^2)][1 - 2(\rho^2 - b^2) + (\rho^2 + b^2)s]} \\ Y_{r,1} = Y_{r,2} = R_2(\rho, b) = \frac{-2b(1 - \rho^2 - b^2)[\rho^2 - b^2 - (\rho^2 + b^2)s]}{(\rho^2 + b^2)[1 - 2(\rho^2 - b^2) + (\rho^2 + b^2)s]} \\ X_{r,2} = X(1) = R_3(\rho, b) = \frac{[\rho^2 - b^2 - (\rho^2 + b^2)s][\rho^2 - b^2 + 4\rho(\rho^2 + b^2) + 6(\rho^2 + b^2)s + 4\rho(\rho^2 + b^2)s^2 + (\rho^2 - b^2)(\rho^2 + b^2)s^2]}{(\rho^2 + b^2)[\rho + 2(\rho^2 + b^2) + \rho(\rho^2 + b^2)][1 - 2(\rho^2 - b^2) + (\rho^2 + b^2)s]} \end{cases}$$

En faisant en (115) $s = -1$, puis $s = 1$, nous avons pour les coordonnées de $M_{r,1}$ et $M_{r,2}$:

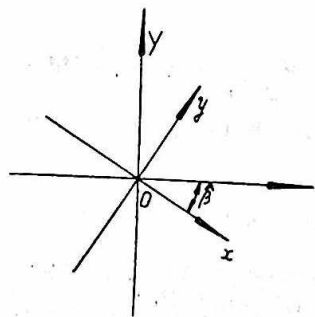
$$(117) \begin{cases} \text{si } \overline{M_{r,1} M_{r,2}} \text{ est parallèle à l'axe } OY: \\ X_{r,1} = X_{r,2} = R_4(\rho, b) = \frac{4\rho b^2(1 - \rho^2 - b^2)}{(\rho^2 + b^2)[1 - 2(\rho^2 - b^2) + (\rho^2 + b^2)^2]} \\ Y_{r,1} = Y(-1) = R_5(\rho, b) = \frac{2\rho b[\rho^2 - b^2 - 4\rho(\rho^2 + b^2) + 6(\rho^2 + b^2)^2 - 4\rho(\rho^2 + b^2)^2]}{(\rho^2 + b^2)[\rho - 2(\rho^2 + b^2) + \rho(\rho^2 + b^2)][1 - 2(\rho^2 - b^2) - b^2 + (\rho^2 + b^2)^2]} \\ Y_{r,2} = Y(1) = R_6(\rho, b) = \frac{2\rho b[\rho^2 - b^2 + 4\rho(\rho^2 + b^2) + 6(\rho^2 + b^2)^2 + 4\rho(\rho^2 + b^2)^2]}{(\rho^2 + b^2)[\rho + 2(\rho^2 + b^2) + \rho(\rho^2 + b^2)][1 - 2(\rho^2 - b^2) + (\rho^2 + b^2)^2]} \end{cases}$$

ce qui termine la démonstration du théorème.

Il est d'ailleurs facile d'effectuer une rotation des axes OXY de telle façon que les équations paramétriques de l'arc $(G_{r/\epsilon, z_1, z_2})$ par rapport aux nouveaux axes ne dépendent de ϵ que par le facteur $\frac{1}{1 + \epsilon^2}$. Il suffit en effet de rapporter l'arc $(G_{r/\epsilon, z_1, z_2})$ aux axes Oxy (fig. 14); l'axe Ox s'obtient en tournant (en sens inverse) l'axe OX d'un angle défini par les relations

$$(118) \begin{cases} \sin \beta = \frac{E_0 + E_1 \epsilon}{\sqrt{(1 + \epsilon^2)(E_0^2 + E_1^2)}} \\ \cos \beta = \frac{E_1 - E_0 \epsilon}{\sqrt{(1 + \epsilon^2)(E_0^2 + E_1^2)}} \end{cases}$$

avec E_0 et E_1 données par (93).



En ce cas

$$\begin{aligned} x &= X \cos \beta - Y \sin \beta = \\ &= \frac{(E_1 - E_0 \epsilon)X - (E_0 + E_1 \epsilon)Y}{\sqrt{(1 + \epsilon^2)(E_0^2 + E_1^2)}} \\ y &= X \sin \beta + Y \cos \beta = \\ &= \frac{(E_0 + E_1 \epsilon)X + (E_1 - E_0 \epsilon)Y}{\sqrt{(1 + \epsilon^2)(E_0^2 + E_1^2)}} \end{aligned}$$

En remplaçant dans ces formules E_0 et E_1 par leurs expressions (93) et $X = X(s)$ et $Y = Y(s)$ par leurs expressions (88), il vient

$$(119) \begin{cases} x = x(s) = K_0 \cdot \frac{[1 + 2(\rho^2 - b^2) + (\rho^2 + b^2)^2][br_0(1 - \rho^2 - b^2)(1 + r_0^2 + p_0^2) - \rho p_0(1 + \rho^2 + b^2)(1 - r_0^2 - p_0^2)] - 2\rho b(1 - \rho^2 - b^2)(1 + \rho^2 + b^2)[1 + 2(r_0^2 - p_0^2) + (r_0^2 + p_0^2)^2] + 2\rho[- 2\rho b(1 - \rho^2 - b^2)(1 + \rho^2 + b^2)r_0(1 + r_0^2 + p_0^2) - [3\rho^2 + b^2 + 2(\rho^2 + b^2)(3\rho^2 - b^2) + (3\rho^2 + b^2)(\rho^2 + b^2)^2] \cdot p_0(1 - r_0^2 - p_0^2) - b(1 - \rho^2 - b^2) \cdot \rho[2(\rho^2 + b^2) - [1 - 2(\rho^2 + 3b^2) + (\rho^2 + b^2)^2]r_0^2 - [1 + 2(3\rho^2 + b^2) + (\rho^2 + b^2)^2]p_0^2 + 2(\rho^2 + b^2)(r_0^2 + p_0^2)^2] \cdot \rho] \cdot s - 12(\rho^2 + b^2)[b(1 - \rho^2 - b^2)r_0 \cdot (1 + r_0^2 + p_0^2) + \rho(1 + \rho^2 + b^2)p_0(1 - r_0^2 - p_0^2)]s^2 - 8(\rho^2 + b^2)[b(1 - \rho^2 - b^2)(r_0^2 + p_0^2) + (\rho^2 + b^2)p_0(1 - r_0^2 - p_0^2)]s^3}{p_0^2(1 - r_0^2 - p_0^2)^2 + [r_0(1 + r_0^2 + p_0^2) + 2(r_0^2 + p_0^2)s]^2} \\ y = y(s) = K_0 \cdot \frac{[1 + 2(\rho^2 - b^2) + (\rho^2 + b^2)^2][\rho(1 + \rho^2 + b^2)r_0(1 + r_0^2 + p_0^2) + b(1 - \rho^2 - b^2)p_0(1 - r_0^2 - p_0^2)] - [\rho^2 - b^2 + 2(\rho^2 + b^2)^2 + (\rho^2 - b^2)(\rho^2 + b^2)^2][1 + 2(r_0^2 - p_0^2) + (r_0^2 + p_0^2)^2] + 2\rho[\rho^2 + 3b^2 + 2(\rho^2 + b^2)(\rho^2 - 3b^2) + (\rho^2 + 3b^2)(\rho^2 + b^2)^2]r_0(1 + r_0^2 + p_0^2) + 2\rho b(1 - \rho^2 - b^2)(1 + \rho^2 + b^2)p_0(1 - r_0^2 - p_0^2) - \rho(1 + \rho^2 + b^2) \cdot \rho[2(\rho^2 + b^2) - [1 - 2(\rho^2 + 3b^2) + (\rho^2 + b^2)^2]r_0^2 - [1 + 2(3\rho^2 + b^2) + (\rho^2 + b^2)^2]p_0^2 + 2(\rho^2 + b^2)(r_0^2 + p_0^2)^2] \cdot \rho] \cdot s + 4\rho[- \rho(\rho^2 + b^2)(1 + \rho^2 + b^2)r_0 \cdot (1 + r_0^2 + p_0^2) + b(\rho^2 + b^2)(1 - \rho^2 - b^2)p_0(1 - r_0^2 - p_0^2) - (\rho^2 + b^2)[\rho^2 + b^2 - 2(1 + \rho^2 - 3b^2) + (\rho^2 + b^2)^2]r_0^2 - 2]1 + 3\rho^2 - b^2 + (\rho^2 + b^2)^2]p_0^2 + (\rho^2 + b^2)(r_0^2 + p_0^2)^2] \cdot \rho] \cdot s^2 + 8(\rho^2 + b^2)[\rho(1 + \rho^2 + b^2)(r_0^2 + p_0^2) - (\rho^2 + b^2)r_0(1 + r_0^2 + p_0^2)]s^3}{p_0^2(1 - r_0^2 - p_0^2)^2 + [r_0(1 + r_0^2 + p_0^2) + 2(r_0^2 + p_0^2)s]^2} \end{cases}$$

avec

$$K_0 = (r_0^2 + p_0^2) \cdot \sqrt{\frac{r_0^2 + p_0^2}{(1 + \epsilon^2)(\rho^2 + b^2)[1 - 2(\rho^2 - b^2) + (\rho^2 + b^2)^2][(\rho - r_0)^2 + (b + p_0)^2][(1 - \rho r_0 - b p_0)^2 + (b r_0 - \rho p_0)^2]}}$$

Nous avons ainsi démontré le

COMPLÈMENT AU THÉORÈME 2. Par rapport aux axes Oxy , définis par la fig. 14 et par (118), l'arc $(G_{r/\epsilon, z_1, z_2})$ défini aux notations 1 (point 6°) ([4]) admet un système d'équations paramétriques données par (119).

&11. La fonction (de la variable m) $\frac{1 - m^2}{m}$ étant strictement décrois-

sante, il résulte de (108₁) que

(120) Si $0 < m_1 < m_2 < 1$, l'arc de cercle $(K_{m_1, +})^*$ est situé au-dessus de l'arc de cercle $(K_{m_2, +})$ (exception faite évidemment des points A_- et A_+).

En effet, les relations $\rho^2 + b^2 + \frac{1 - m_1^2}{m_1} b - 1 = 0$ et $\rho^2 + b^2 + \frac{1 - m_2^2}{m_2} b - 1 = 0$ donnent $\left(\frac{1 - m_1^2}{m_1} - \frac{1 - m_2^2}{m_2}\right)b = 0$

ce qui donne les points A_- et A_+ comme (seuls) points d'intersection des cercles auxquels ces arcs appartiennent.

Remarque 7. Les propositions (41₁) et (44₁) ([4]) se complètent de la façon suivante: Si le point (ρ, b) décrit la branche (k_1) définie en (74), alors en (38) ([4]) $|\alpha_{2,r}| > 1$ et si ce point décrit la branche (k_2) définie en (75), alors en (38) ([4]) $|\alpha_{1,r}| > 1$. Si le point (ρ, b) décrit la branche (k_1^0) de la courbe (K_1^0) définie en (82₁) comprise dans Δ , alors en (44₁) ([4]) $|\alpha_{2,i}| > 1$ et si ce point décrit la branche (k_2^0) de la courbe (K_2^0) définie en (82₁) comprise dans Δ , alors en (44₁) ([4]) $|\alpha_{1,i}| > 1$.

En effet, si, pour fixer les idées, le point (ρ, b) est situé sur (k_1) , alors il n'est pas situé sur (k_2) et réciproquement, ce qui fait que les nombres $\alpha_{2,r}$, respectivement $\alpha_{1,r}$ (selon (40₁)) ([4]) existent, auquel cas selon (41₁) ([4]) nous avons $|\alpha_{2,r}| > 1$, respectivement $|\alpha_{1,r}| > 1$ pour tout point (ρ, b) situé sur (k_1) , respectivement sur (k_2) . La démonstration des relations $|\alpha_{2,i}| > 1$ et $|\alpha_{1,i}| > 1$ se fait à l'aide de (44₁) ([4]).

Nous présentons les remarques suivantes, dont la première est démontrée par le théorème 1, la remarque 5, le lemme 7, ([4]) et la propriété (120), et la seconde par les notations 1 (point 7°) ([4]) et par les équations paramétriques suivantes de l'arc $(G_{i/\varepsilon, z_1, z_2})$ défini aux notations 1 (point 6°) ([4]) déduites de ce point 6° et de (88)

$$(121) \quad (G_{i/\varepsilon, z_1, z_2}) : \begin{cases} X = X(s) = -\varepsilon \frac{r_0^2 + p_0^2}{K} \cdot \frac{B_0(s)A(s) - A_0(s)B(s)}{A_0^2(s) + B_0^2(s)} \\ Y = Y(s) = \varepsilon \frac{r_0^2 + p_0^2}{K} \cdot \frac{A_0(s)A(s) + B_0(s)B(s)}{A_0^2(s) + B_0^2(s)} \end{cases} \quad (s \in [-1, 1])$$

avec $A_0(s)$, $B_0(s)$ données par (88) et K , $A(s)$, $B(s)$ données respectivement par (8) et (10) ([4]).

Remarque 8. Lorsque ε croît de 0 à ∞ , la région (R_ε) définie au point 3° des notations 1 ([4]) change en partant du et en aboutissant au segment $\overline{A_-A_+}$ ($(R_0) \equiv (R_\infty) \equiv \overline{A_-A_+}$). Si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$, alors $(R_{\varepsilon_1}) \subset (R_{\varepsilon_2})$ et si $1 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ alors $(R_{\varepsilon_1}) \supset (R_{\varepsilon_2})$ (les inclusions étant strictes). La région (R_1) est par conséquent la région maximale dans laquelle peut être situé le noeud z_2 , pour pouvoir délimiter le domaine des valeurs de la fonctionnelle $F[f]$ à l'aide du résultat cité page 183 ([4]) d'ASHNÉVITS et ULINA.

Nous nous servirons des

NOTATIONS 7. (G_{ε, z_1}) désigne l'arc d'équations paramétriques

$$(122) \quad \begin{cases} X = X(s) = \frac{r_0^2 + p_0^2}{K} \cdot \frac{[r_0(1 + r_0^2 + p_0^2) + 2(r_0^2 + p_0^2)s]A(s) + p_0(1 - r_0^2 - p_0^2)B(s)}{p_0^2(1 - r_0^2 - p_0^2)s^2 + [r_0(1 + r_0^2 + p_0^2) + 2(r_0^2 + p_0^2)s]^2} \\ Y = Y(s) = \frac{r_0^2 + p_0^2}{K} \cdot \frac{p_0[1 - r_0^2 - p_0^2]A(s) - [r_0(1 + r_0^2 + p_0^2) + 2(r_0^2 + p_0^2)s]B(s)}{p_0^2(1 - r_0^2 - p_0^2)s^2 + [r_0(1 + r_0^2 + p_0^2) + 2(r_0^2 + p_0^2)s]^2} \end{cases} \quad (s \in [-1, 1])$$

avec $A(s)$ et $B(s)$ données par (10) et K par (8) ([4]). et (E_{ε, z_1}) son enveloppe convexe, à l'aide desquelles nous présentons la

Remarque 9. Lorsque ε croît de 0 à ∞ , la région $(E_{r/\varepsilon, z_1, z_2})$ définie aux notations 1 (point 7°) ([4]) change en partant de la région (E_{z_1, z_2}) définie aux notations 7 et en aboutissant à l'origine des axes OXY ($(E_{r/\varepsilon, z_1, z_2}) \equiv (E_{z_1, z_2})$ et $(E_{r/\infty, z_1, z_2}) \equiv 0$) tandis que la région $(E_{i/\varepsilon, z_1, z_2})$ définie aux notations 1 (point 7°) ([4]) change en partant de l'origine des axes OXY et en aboutissant à la région (E_{z_1, z_2}) ($(E_{i/\varepsilon, z_1, z_2}) \equiv 0$ et $(E_{i/\infty, z_1, z_2}) \equiv (E_{z_1, z_2})$). De la remarque 9 résulte de suite la

Remarque 10. Lorsque ε croît de 0 à ∞ , la région $(E_{\varepsilon, z_1, z_2})$ définie aux notations 1 (point 7°) ([4]) qui figure à l'énoncé du théorème 1 ([4]) change en partant de et en aboutissant à la région (E_{z_1, z_2}) ($(E_{\varepsilon, z_1, z_2}) \equiv (E_{z_1, z_2})$ et $(E_{\infty, z_1, z_2}) \equiv (E_{z_1, z_2})$).

Remarque 11. L'arc $(G_{i/\varepsilon, z_1, z_2})$ défini aux notations 1 (point 6°) ([4]) s'obtient à partir de l'arc $(G_{r/\varepsilon, z_1, z_2})$ défini à ce même point 6° par la succession des trois opérations suivantes:

- 1° symétrie par rapport à l'axe OX
- 2° symétrie par rapport à la première bissectrice des axes OXY
- 3° homothétie de pôle l'origine des axes et de module ε .

Par suite, la région $(E_{i/\varepsilon, z_1, z_2})$ s'obtient à partir de la région $(E_{r/\varepsilon, z_1, z_2})$ par les opérations (123). Ces trois opérations conservent évidemment la nature de l'arc $(G_{r/\varepsilon, z_1, z_2})$. Par conséquent les renseignements fournis par le second théorème sur la nature de l'arc $(G_{r/\varepsilon, z_1, z_2})$ sont valables pour l'arc $(G_{i/\varepsilon, z_1, z_2})$. Si à la place de X et Y nous écrivons en (88) $X_{r,0}$ et $Y_{r,0}$ et en (121) $X_{i,0}$ et $Y_{i,0}$, alors les notations 1 (point 6°) ([4]) donnent

$$(124) \quad \begin{cases} X_{i,0} = -\varepsilon G_r(\varepsilon, z_1, z_2, s) = -\varepsilon Y_{r,0} \\ Y_{i,0} = \varepsilon G_r(\varepsilon, z_1, z_2, s) = \varepsilon X_{r,0} \end{cases}$$

Par conséquent, l'équation cartésienne de l'arc $(G_{i/\varepsilon, z_1, z_2})$ s'obtient en remplaçant dans les équations (93), (95) ou (100) (selon que c'est en arc de cubique, d'hyperbole ou un segment de droite) X par $\frac{Y}{\varepsilon}$ et Y par

$-\frac{X}{\varepsilon}$. Au cas général où $(G_{i/\varepsilon, z_1, z_2})$ est un arc de cubique, un système d'équations paramétriques a été donné en (121). Au cas où $(G_{i/\varepsilon, z_1, z_2})$ est un arc d'hyperbole, un tel système est fourni par (124) et (94)

$$(125) \quad (G_{i/\varepsilon, z_1, z_2}) : \begin{cases} X = X(s) = \frac{\varepsilon r_0}{K(1 + \varepsilon^2)} \cdot \frac{\varepsilon A(s) + B(s)}{1 + r_0^2 + 2r_0s} \\ Y = Y(s) = \frac{\varepsilon r_0}{K(1 + \varepsilon^2)} \cdot \frac{A(s) - \varepsilon B(s)}{1 + r_0^2 + 2r_0s} \end{cases} \quad (s \in [-1, 1])$$

avec K , $A(s)$, $B(s)$ donnés respectivement par (8) et (10) ([4]).

Enfin au cas où $(G_{i/\varepsilon, z_1, z_2})$ est un segment de droite, nous désignerons ses extrémités par $M_{i,1}$ et $M_{i,2}$. Les coordonnées $(X_{i,1}, Y_{i,1})$ et $(X_{i,2}, Y_{i,2})$ de ces extrémités sont donc fournies par (124):

$$(126) \quad M_{i,1} \begin{cases} X_{i,1} = -\varepsilon Y_{r,1} \\ Y_{i,1} = \varepsilon X_{r,1} \end{cases} \quad M_{i,2} \begin{cases} X_{i,2} = -\varepsilon Y_{r,2} \\ Y_{i,2} = \varepsilon X_{r,2} \end{cases}$$

où $(X_{r,1}, Y_{r,1})$ et $(X_{r,2}, Y_{r,2})$ sont les coordonnées des extrémités du segment auquel se réduit l'arc $(G_{r/\varepsilon, z_1, z_2})$. Au cas d'une position quelconque de ce segment (126) et (113) donnent

$$(127) \quad M_{i,1} \begin{cases} X_{i,1} = -\varepsilon Y_{r,1} \\ Y_{i,1} = \varepsilon X_{r,1} \end{cases} \quad M_{i,2} \begin{cases} X_{i,2} = -\varepsilon Y_{r,2} \\ Y_{i,2} = \varepsilon X_{r,2} \end{cases}$$

avec $X_{r,1}, Y_{r,1}, X_{r,2}, Y_{r,2}$ données par (113). Au cas particulier où le segment $\overline{M_{r,1} M_{r,2}}$ est parallèle à l'axe OX (cas a) et b) du théorème 3), les coordonnées de $M_{i,1}$ et $M_{i,2}$ sont données par (126) (avec $\varepsilon = \frac{2pb}{P_{2,A}}$) et (116), ce qui donne

$$(128) \quad M_{i,1} \begin{cases} X_{i,1} = R_4(\rho, b) \\ Y_{i,1} = R_5(\rho, b) \end{cases} \quad M_{i,2} \begin{cases} X_{i,2} = R_4(\rho, b) \\ Y_{i,2} = R_6(\rho, b) \end{cases}$$

Au cas où le segment $\overline{M_{r,1} M_{r,2}}$ est parallèle à l'axe OY (cas c) et d) du théorème 3), les coordonnées de $M_{i,1}$ et $M_{i,2}$ sont données par (126) (avec $\varepsilon = -\frac{P_{2,A}}{2pb}$) et (117), ce qui donne

$$(129) \quad M_{i,1} \begin{cases} X_{i,1} = R_1(\rho, b) \\ Y_{i,1} = R_2(\rho, b) \end{cases} \quad M_{i,2} \begin{cases} X_{i,2} = R_3(\rho, b) \\ Y_{i,2} = R_2(\rho, b) \end{cases}$$

avec $R_s(\rho, b)$ ($s = \overline{1,6}$) données par (116) et (117). Nous nous servons des notations suivantes (et dernières).

NOTATIONS 8. Nous désignons par $\overline{M_1^X M_2^X}$ un segment parallèle à l'axe OX , dont les extrémités M_1^X et M_2^X ont les coordonnées

$$M_1^X \begin{cases} X_1^X = R_1(\rho, b) \\ Y_1^X = R_2(\rho, b) \end{cases} \quad M_2^X \begin{cases} X_2^X = R_3(\rho, b) \\ Y_2^X = R_2(\rho, b) \end{cases}$$

et par $\overline{M_1^Y M_2^Y}$ un segment parallèle à l'axe OY , dont les extrémités M_1^Y et M_2^Y ont les coordonnées

$$M_1^Y \begin{cases} X_1^Y = R_4(\rho, b) \\ Y_1^Y = R_5(\rho, b) \end{cases} \quad M_2^Y \begin{cases} X_2^Y = R_4(\rho, b) \\ Y_2^Y = R_6(\rho, b) \end{cases}$$

avec $R_s(\rho, b)$ ($s = \overline{1,6}$) données par (116) et (117).

Dans ces notations (128) et (129) fournissent la

Remarque 12. Lorsque l'arc $(G_{r/\varepsilon, z_1, z_2})$ est parallèle à l'axe OX , il est le segment $\overline{M_1^X M_2^X}$ et l'arc $(G_{i/\varepsilon, z_1, z_2})$ est le segment $\overline{M_1^Y M_2^Y}$ et

lorsque l'arc $(G_{r/\varepsilon, z_1, z_2})$ est parallèle à l'axe OY , il est le segment $\overline{M_1^Y M_2^Y}$ et l'arc $(G_{i/\varepsilon, z_1, z_2})$ est le segment $\overline{M_1^X M_2^X}$ (cf. notations 8).

Remarque 13. Au cas où le noeud z_1 est réel (en (87) $p_0 = 0$), nous avons supposé tacitement dans toutes les formules (87), (88), ... (129), où r_0 intervient directement ou indirectement (par l'intermédiaire de (103) ou (105)) que $r_0 \neq 0$. Au cas où r_0 est donné par (103) ou (105), ceci est d'ailleurs évident, du fait qu'en (97) $P_0(0) = \rho^2 + b^2 > 0$. Si $r_0 = p_0 = 0$, donc en (87) $z_1 = 0$, la relation (129₁) démontrée ci-dessous donne $F[f] = 0$ pour toute fonction $f \in \mathfrak{F}$, par suite le domaine des valeurs de $F[f]$ lorsque f parcourt la classe $\mathfrak{F}$ se réduit à l'origine des axes.

Remarque 14. Le théorème 1 ([4]) suppose évidemment (129₁) $f'(z_2) \neq 0$ pour tout $z_2 \in (R_\varepsilon)$ et toute $f \in \mathfrak{F}$. La preuve de (129₁) se fait à l'aide du résultat suivant de GOODMAN ([3]): Toute fonction $f(z)$ de la classe $\mathfrak{F}$ (définie au §1) est univalente dans le domaine (D) compris entre les arcs de cercle $(K_{\sqrt{2}-1,+})$ et $(K_{\sqrt{2}-1,-})$ (notations 1, point 1°), ([4]) (le domaine est entendu sans sa frontière) et par suite, pour tout $z \in (D)$, $f'(z) \neq 0$ (cf. [3]). Or, selon la remarque 8, $(R_\varepsilon) \subseteq (R_1)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et selon la remarque 5 ([4]) et (120) $(R_1) \subset (D)$, du fait que $N(1) < \frac{1}{10} < \sqrt{2} - 1$. En effet, la première inégalité s'écrit, en tenant compte

que $\sqrt{20 + 14\sqrt{2}} = (1 + \sqrt{2}) \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} : \sqrt{8 + 4\sqrt{2} + 2(1 + \sqrt{2})\sqrt{2(2 + \sqrt{2})}} < \frac{11}{10} + \sqrt{2} + \sqrt{2(2 + \sqrt{2})}$ c'est-à-dire, par élévation au carré des termes:

$20(\sqrt{2} + \sqrt{2(2 + \sqrt{2})}) < 79$. Or, $\sqrt{2} + \sqrt{2(2 + \sqrt{2})} > 4$, parce que l'inégalité s'écrit $\sqrt{2(2 + \sqrt{2})} > 4 - \sqrt{2}$, c'est-à-dire, par élévation au carré des termes: $5\sqrt{2} > 7$. Par suite, $20(\sqrt{2} + \sqrt{2(2 + \sqrt{2})}) > 80 > 79$ ce qui prouve l'inégalité présentée. Par suite $(R_\varepsilon) = (R(N(\varepsilon))) \subseteq (R(N(1))) = (R_1) \subset (D)$

avec $N(1) < m_1 < \sqrt{2} - 1$

ce qui, avec le résultat ci-dessus cité de GOODMAN prouve l'assertion (129₁) de la remarque.

Remarque 15. En faisant $b = 0$ aux points a) et b) du théorème 3, il vient $\rho \neq 0$ parce que les régions (U_+) , (Z_+) , (V_-) , (W_-) ne contiennent pas l'origine. Par suite $\varepsilon = \frac{2pb}{P_{2,A}} = 0$ et (116) donne

$$(130) \quad X_{r,1} = \rho \frac{1-\rho}{1+\rho}, \quad Y_{r,1} = 0, \quad X_{r,2} = \rho \frac{1+\rho}{1-\rho}, \quad Y_{r,2} = 0$$

par suite $X_{r,1} < X_{r,2}$ (ce qui d'ailleurs résulte de (112) en y faisant $b=0$). Or, les formules (116) ont été déduites de (110) par l'intermédiaire de (114), c'est-à-dire en supposant en (97) $P_0(r_0) = 0$. La relation $P_0(r_0) = 0$ de (97) s'écrit pour $b = 0$: $\rho(\rho - r_0)(1 - \rho r_0) = 0$ ce qui donne $r_0 = \rho$ du fait que $\rho \neq 0$ et que pour $|\rho| < 1$, $|\rho| < 1$, $1 - \rho r_0 \neq 0$. En faisant

donc en [1] (formule (4)) $t = s$, $z_1 = z_2 = \rho$, nous avons $\omega(s) = \frac{\rho}{1 - \rho^2} (1 + \rho^2 + 2\rho s)$. Par conséquent, $\min_{s \in [-1, 1]} \omega(s) = \omega(-1) = \rho \frac{1 - \rho}{1 + \rho} = X_{r,1}$ de (130)

et $\max_{s \in [-1, 1]} \omega(s) = \omega(1) = \rho \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = X_{r,2}$, de (130).

Le théorème 1 de [1] et le théorème 3 de ce travail donnent donc au cas où les noeuds z_1 et z_2 sont réels et égaux à ρ , le même segment $\left[\rho \frac{1 - \rho}{1 + \rho}, \rho \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right]$ comme domaine des valeurs de la fonctionnelle $F[f]$. C'est là d'ailleurs une constatation formelle, du fait que les résultats de ce travail supposent en (8) ([4]) $b \neq 0$ et $\varepsilon > 0$.

Remarque 16. En faisant dans le théorème 1 $b = 0$, l'expression $\frac{f'(z_2)(1 + 2z_2s + z_2^2)^2}{1 - z_2^2}$ de (5) ([4]) a une valeur réelle, ce qui donne en (13) ([4]) $\varphi_c(s) = \varepsilon \varphi_r(s)$ et en (8) ([4]), $P_r(\alpha, \sigma) = [(1 - \rho^2)(1 + \rho^2 + 2\rho\alpha)(1 + \rho^2 + 2\rho\sigma)]^2 > 0$ pour toutes les valeurs de ρ , σ et α , avec $\rho \in (-1, 1)$, $\sigma \in [-1, 1]$, $\alpha \in [-1, 1]$. En ce cas l'inégalité (19₁) ([4]) a lieu et avec (7) ([4]) elle donne $\beta_r(s) \in U^*$.

Le résultat d'ASHNÉVITS et ULINA cité page 183 ([4]), donne en ce cas la proposition (48) ([4]) pour la fonctionnelle $F_r[f]$ et pour tout $\rho = z_2 \in (-1, 1)$. La relation $\varphi_i(s) = \varepsilon \varphi_r(s)$ et (14₁) ([4]) donnent $\beta_i(s) = \varepsilon \beta_r(s)$, donc $\frac{\beta_i(s)}{\varepsilon} \in U^*$. En ce cas (48₁) ([4]) donne la proposition (48) ([4]) pour la fonctionnelle $F_i[f]$ pour tout $\rho = z_2 \in (-1, 1)$. En écrivant $\frac{z_1}{1 + 2z_1s + z_1^2} = \bar{A}_0(s) + i\bar{B}_0(s)$ ($\bar{A}_0(s)$, $\bar{B}_0(s)$ fonctions à valeurs réelles), $\frac{(1 + 2z_2s + z_2^2)}{1 - z_2^2} = \bar{C}_0(s)$ (polynôme à valeurs réelles) les notations 1 (points 5° et 6°) ([4]) donnent pour l'arc $(G_{r/e, z_1, z_2})$ les équations paramétriques $X = X_{r,0}(s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \bar{C}_0(s) [\bar{A}_0(s) + \varepsilon \bar{B}_0(s)]$,

$$Y = Y_{r,0}(s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \bar{C}_0(s) (\bar{B}_0(s) - \varepsilon \bar{A}_0(s))$$

et pour l'arc $(G_{i/e, z_1, z_2})$ les équations $X = X_{i,0}(s) = -\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \bar{C}_0(s) (\bar{B}_0(s) - \varepsilon \bar{A}_0(s))$, $Y = Y_{i,0}(s) = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \bar{C}_0(s) (\bar{A}_0(s) + \varepsilon \bar{B}_0(s))$. Nous désignerons par (G_{r+i, z_1, z_2}) l'arc de courbe d'équations

$$\begin{aligned} X &= X_{r+i,0}(s) = X_{r,0}(s) + X_{i,0}(s) = \bar{C}_0(s) \bar{A}_0(s) \\ Y &= Y_{r+i,0}(s) = Y_{r,0}(s) + Y_{i,0}(s) = \bar{C}_0(s) \bar{B}_0(s) \end{aligned} \quad (s \in [-1, 1])$$

ce qui donne d'ailleurs

$$(131) \quad \omega(s) = \frac{z_1(1 + 2z_2s + z_2^2)}{(1 - z_2^2)(1 + 2z_1s + z_1^2)} = X_{r+i,0}(s) + iY_{r+i,0}(s)$$

* cf. notations 1 point 4° ([4]).

et nous nous servirons de la propriété suivante: le domaine $(E_{\varepsilon, z_1, z_2})$, défini aux notations 1 (point 7°) ([4]) contient l'enveloppe convexe de l'arc (G_{r+i, z_1, z_2}) .

En effet, les coordonnées (X_{r+i}, Y_{r+i}) d'un point quelconque de l'enveloppe convexe de l'arc (G_{r+i, z_1, z_2}) peuvent s'écrire par définition sous la forme

$$X_{r+i} = \sum_{\sigma=1}^n a_{\sigma} X_{r+i,0}(s_{\sigma}), \quad Y_{r+i} = \sum_{\sigma=1}^n a_{\sigma} Y_{r+i,0}(s_{\sigma})$$

où n est un nombre naturel $a_{\sigma} > 0$ ($\sigma = \overline{1, n}$), $\sum_{\sigma=1}^n a_{\sigma} = 1$, $s_{\sigma} \in [-1, 1]$ ($\sigma = \overline{1, n}$) c'est-à-dire $X_{r+i} = X_r + X_i$, $Y_{r+i} = Y_r + Y_i$, avec

$$X_r = \sum_{\sigma=1}^n a_{\sigma} X_{r,0}(s_{\sigma}), \quad X_i = \sum_{\sigma=1}^n a_{\sigma} X_{i,0}(s_{\sigma}), \quad Y_r = \sum_{\sigma=1}^n a_{\sigma} Y_{r,0}(s_{\sigma}),$$

$$Y_i = \sum_{\sigma=1}^n a_{\sigma} Y_{i,0}(s_{\sigma}).$$

Or, le point de coordonnées (X_r, Y_r) appartient par définition au domaine $(E_{r/e, z_1, z_2})$ et le point de coordonnées (X_i, Y_i) au domaine $(E_{i/e, z_1, z_2})$ (cf. notations 1, point 7°), ([4]), par conséquent le point de coordonnées (X_{r+i}, Y_{r+i}) appartient au domaine $(E_{\varepsilon, z_1, z_2})$, ce qui démontre la propriété. Selon le théorème 1 de [1] au cas où le noeud z_2 est réel, le domaine des valeurs de $F[f]$ est l'enveloppe convexe de la courbe $\omega(s)$ (c'est-à-dire de l'arc (G_{r+i, z_1, z_2}) , en raison de (131)), tandis que selon le théorème 1 ([4]) de ce travail le domaine des valeurs de $F[f]$ est contenu dans $(E_{\varepsilon, z_1, z_2})$, qui contient, selon la propriété ci-dessus, l'enveloppe convexe de la courbe $\omega(s)$. C'est là d'ailleurs une autre remarque formelle, du fait que dans ce travail nous avons supposé en (8) ([4]) $b \neq 0$.

Remarque 17. On ne peut prendre en (5) ([4]) $\varepsilon = 0$ du fait que dans ce cas l'expression (2) ([4]) de $\beta(s)$ donne $\beta(1) - \beta(-1) = 1$, donc $\beta(1) = \beta(-1)$, ce qui fait qu'il n'existe aucun nombre réel et fini N tel que la fonction $N\beta(s)$ appartienne à la classe U^* . Le résultat d'ASHNÉVITS et ULINA cité page 183 ([4]) n'est donc plus utilisable.

Remarque 18. La question peut être posée, de démontrer les propositions (41₁) ([4]) respectivement (44₁) ([4]) sans construire les boucles $\beta_s(s = \overline{1, 4})$ de (41), ([4]), respectivement les boucles (β_s^0) ($s = \overline{1, 4}$) des notations 5. ([4]). Une condition suffisante pour éviter la construction des boucles $\beta_s(s = \overline{1, 4})$ de (41) ([4]) est l'exactitude de la proposition suivante:

PROPOSITION P. Pour tout point (ρ, b) de $(\Delta_{1,r})^*$ qui n'est situé sur aucune des boucles (B_s) ($s = \overline{1, 4}$) de (23) ([4]) et où $\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)$ (respectivement $\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)$ de (38) ([4]) existe, il existe soit un nombre $\alpha_1 = \alpha_1(\rho, b) \in [-1, 1]$ tel

* cf. notations 1, point 4° ([4]).

* cf. notation 2. ([4]).

que en (21) ([4]) $|\sigma_{1,r}(\alpha_1)| < |\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)|$, soit un nombre $\alpha_2 = \alpha_2(\rho, b) \in [-1, 1]$, tel que en (21) ([4]) $|\sigma_{2,r}(\alpha_2)| < |\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)|$ (respectivement soit un nombre $\alpha_1 = \alpha_1(\rho, b) \in [-1, 1]$ tel qu'en (21) ([4]) $|\sigma_{1,r}(\alpha_1)| < |\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)|$, soit un nombre $\alpha_2 = \alpha_2(\rho, b) \in [-1, 1]$ tel qu'en (21) ([4]) $|\sigma_{2,r}(\alpha_2)| < |\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)|$ (les nombres α_1 et α_2 peuvent éventuellement exister simultanément).

Si la proposition (P) avait lieu, l'hypothèse $|\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)| \leq 1$ (respectivement $|\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)| \leq 1$) entraînerait soit $|\sigma_{1,r}(\alpha_1)| < 1$ soit $|\sigma_{2,r}(\alpha_2)| < 1$, ce qui contredit une des propositions (34) ou (35), ([4]), ceci du fait que $(\Delta_{1,r}) \subset \Delta_{3,r}$ (cf. page 176, [4]). Cependant, il est facile de trouver des valeurs de δ et des noeuds (ρ, b) qui mettent en défaut la partie de la proposition P relative à $\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)$. Il suffit, par exemple, de choisir pour δ une valeur δ telle que $0 < \delta < 1$ et que $1 - 10\delta^2 - 3\delta^4 > 0$. Pour le point (ρ, b) , nous choisirons un point (ρ, b) de la région (3_1) de la fig. 4 situé dans $(\Delta_{1,r})$ et sur la tangente commune (à l'origine) des branches (B_1) et (B_2) ([4]), pour lequel

$$(132) \left\{ \begin{array}{l} (0 < \rho < \frac{1}{1+\delta} \text{ et les valeurs des deux premières expressions (133) } \\ \text{et de l'expression } E_2 \text{ de (135) ci-dessous sont plus grandes que 1.} \end{array} \right.$$

Ayant $b = \delta\rho$, (21) et (38) ([4]) donnent

$$(133) \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\sigma_{1,r}(-1)}{\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)} \right| = \left| \frac{1}{(1+\delta^2)\rho(1-\rho)} \left[1 - \frac{4\rho}{1+2(1-\delta^2)\rho^2+(1+\delta^2)^2\rho^4} \right] \right| \\ \left| \frac{\sigma_{1,r}(1)}{\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)} \right| = \left| \frac{1}{(1+\delta^2)\rho(1+\rho)} \left[1 + \frac{4\rho}{1+2(1-\delta^2)\rho^2+(1+\delta^2)^2\rho^4} \right] \right| \\ \left| \frac{\sigma_{2,r}(\alpha)}{\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)} \right| = 2 \left| \frac{1+2(1-\delta^2)\alpha\rho+2(1-\delta^2)\rho^2+2(1+\delta^2)^2\alpha\rho^3+(1+\delta^2)^2\rho^4}{(1+\delta^2)[1+2(1-\delta^2)\rho^2+(1+\delta^2)^2\rho^4] \cdot [1+2\alpha\rho+(1-\delta^2)\rho^2]} \right| \end{array} \right.$$

Comme spécifié, le choix (132) de ρ donne en (133) $|\sigma_{1,r}(-1)/\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)| > 1$ et $|\sigma_{1,r}(1)/\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)| > 1$. En ce cas le tableau o ([4]) donne $|\sigma_{1,r}(\alpha)| > |\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)|$ pour tout $\alpha \in [-1, 1]$

De plus, pour tout $\alpha \geq -1$ nous avons en (133)

$$(134) \quad \begin{aligned} 1 + 2\alpha\rho + (1 - \delta^2)\rho^2 &\geq 1 - 2\rho + (1 - \delta^2)\rho^2 = \\ &= [1 - (1 + \delta)\rho][1 - (1 - \delta)\rho] > 0 \end{aligned}$$

conformément au choix (132) de ρ et

$$\begin{aligned} 1 + 2(1 - \delta^2)\alpha\rho + 2(1 - \delta^2)\rho^2 + 2(1 + \delta^2)^2\alpha\rho^3 + (1 + \delta^2)^2\rho^4 &\geq \\ \geq P_1(\rho) = 1 - 2(1 - \delta^2)\rho + 2(1 - \delta^2)\rho^2 - 2(1 + \delta^2)^2\rho^3 + (1 + \delta^2)^2\rho^4 \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\frac{1}{2} P_1'(\rho) = -(1 - \delta^2) + 2(1 - \delta^2)\rho - 3(1 + \delta^2)^2\rho^2 + 2(1 + \delta^2)^2\rho^3$$

$$\frac{1}{4} P_1''(\rho) = 1 - \delta^2 - 3(1 + \delta^2)^2\rho + 3(1 + \delta^2)^2\rho^2$$

$$\frac{1}{4} P_1^{(3)}(\rho) = 3(1 + \delta^2)^2(-1 + 2\rho)$$

$$P_1\left(\frac{1}{1+\delta}\right) = 4\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^4$$

$$P_1'\left(\frac{1}{1+\delta}\right) = \frac{-4\delta}{(1+\delta)^3} (1 + 2\delta + 4\delta^2 + \delta^4)$$

$$P_1^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 10\delta^2 - 3\delta^4 > 0$$

ρ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1+\delta}$
$P_1^{(3)}$	-	0	+
$P_1^{(2)}(\rho)$	$4(1 - \delta^2)$	$\searrow P_1^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \nearrow$	$P_1^{(2)}\left(\frac{1}{1+\delta}\right)$
$P_1'(\rho)$	$-2(1 - \delta^2)$	$\nearrow$	$P_1'\left(\frac{1}{1+\delta}\right) < 0$
$P_1(\rho)$	1	$\searrow$	$P_1\left(\frac{1}{1+\delta}\right) > 0$

Tableau 66

ainsi que le tableau 66, qui donne $P_1(\rho) > 0$.

En ce cas (134) donne en (133)

$$\left| \frac{\sigma_{2,r}(\alpha)}{\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)} \right| = \frac{2}{(1 + \delta^2)[1 + 2(1 - \delta^2)\rho^2 + (1 + \delta^2)^2 \cdot \rho^4]} \cdot R_1(\alpha)$$

avec

$$R_1(\alpha) = \frac{1 + 2(1 - \delta^2)\rho^2 + (1 + \delta^2)^2\rho^4 + 2\rho[1 - \delta^2 + (1 + \delta^2)^2\rho^2]\alpha}{1 + (1 - \delta^2)\rho^2 + 2\rho\alpha}$$

par suite

$$R_1'(\alpha) = -2\rho \left[\delta \frac{1 - (1 + \delta^2)\rho^2}{1 + (1 - \delta^2)\rho^2 + 2\rho\alpha} \right]^2 < 0$$

donc pour tout $\alpha \in [-1, 1]$, $R_1(\alpha) \geq R_1(1)$.

Par conséquent

$$(135) \quad \left| \frac{\sigma_{2,r}(\alpha)}{\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)} \right| \geq E_2 = \frac{2R_1(1)}{(1+\delta^2)[1+2(1-\delta^2)\rho^2+(1+\delta^2)^2\rho^4]} =$$

$$= \frac{2}{1+\delta^2} \cdot \frac{1+2(1-\delta^2)\rho+2(1-\delta^2)\rho^2+2(1+\delta^2)^2\rho^3+(1+\delta^2)^2\rho^4}{[1+(1-\delta)\rho][1+(1+\delta)\rho][1+2(1-\delta^2)\rho^2+(1+\delta^2)^2\rho^4]} > 1$$

Par conséquent $|\sigma_{2,r}(\alpha)| > |\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)|$ pour tout $\alpha \in [-1, 1]$. La partie de la proposition P relative à $\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)$ est ainsi mise en défaut.

Une condition suffisante pour mettre en défaut la partie de la proposition P relative à $\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)$ est l'existence d'un nombre δ et d'un nombre ρ qui remplissent les conditions:

$$(136) \quad \begin{cases} 1^\circ 0 < \delta < 1 \text{ et } 25 + \frac{17}{\delta^2} - \frac{2}{\delta^4} - \frac{2}{\delta^6} + 2 \left(12 + \frac{3}{\delta^2} - \frac{1}{\delta^4} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}} > 0 \\ 2^\circ 0 < \rho < \frac{\delta}{1 + \delta^2} \left[-(\delta + \sqrt{1 + \delta^2}) + \sqrt{2 + 3\delta^2 + 2\delta\sqrt{1 + \delta^2}} \right] \\ 3^\circ \text{ les expressions } \left| \frac{\sigma_{2,r}(-1)}{\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)} \right| \text{ et } \left| \frac{\sigma_{2,r}(1)}{\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)} \right| \\ \text{de (137) et l'expression } E_3 \text{ de (145) ci-dessous ont des valeurs plus} \\ \text{grandes que 1.} \\ 4^\circ \text{ Le point de coordonnées } \left(\rho, -\frac{1}{\delta}\rho \right) \text{ est situé dans } (\Delta_{1,r})^*. \end{cases}$$

Si l'hypothèse (136) est exacte, alors pour infirmer la partie de la proposition P relative à $\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)$, il suffirait de choisir un point (ρ, b) de la région (3_2) de la fig. 5, situé dans $(\Delta_{1,r})^*$ et sur la tangente commune (à l'origine) des boucles $(B_3 \text{ et } B_4)$ ([4]) dont l'abscisse ρ satisfait aux conditions (136).

Ayant $b = -\frac{\rho}{\delta}$, (21) et (38) ([4]) donnent

$$(137) \quad \begin{cases} \left| \frac{\sigma_{2,r}(-1)}{\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)} \right| = \left| \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)\rho(1-\rho)} \left[1 - \frac{4\rho}{1 + 2\left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)\rho^2 + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2\rho^4} \right] \right| \\ \left| \frac{\sigma_{2,r}(1)}{\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)} \right| = \left| \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)\rho(1+\rho)} \left[1 + \frac{4\rho}{1 + 2\left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)\rho^2 + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2\rho^4} \right] \right| \\ \left| \frac{\sigma_{1,r}(\alpha)}{\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)} \right| = 2 \cdot \frac{1 + 2\left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)\alpha\rho + 2\left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)\rho^2 + 2\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2\alpha\rho^3 + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2\rho^4}{\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)\left[1 + 2\left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)\rho^2 + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2\rho^4\right] \cdot \left[1 + 2\alpha\rho + \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)\rho^2\right]} \end{cases}$$

* cf notation 2 ([4]).

Or, (21) ([4]) donne

$$(138) \quad \sigma_{2,r}(\alpha) = - \frac{1 + 2\rho^2\left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2\rho^4 + 4\rho\alpha}{4\rho^2\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)(\rho + \alpha)}$$

auquel cas (33) ([4]) donne le tableau 67

α	-1	$-\rho$	1
$\sigma_{2,r}(\alpha)$	$\sigma_{2,r}(-1) > 1$	$\nearrow \pm\infty \nearrow$	$\sigma_{2,r}(1) < -1$

Tableau 67

où $\sigma_{2,r}(-1) > 1$ et $\sigma_{2,r}(1) < -1$. En effet, avec l'expression (138) de $\sigma_{2,r}(\alpha)$, ces inégalités s'écrivent respectivement

$$1 - 4\rho - 2\left(1 + \frac{3}{\delta^2}\right)\rho^2 + 4\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)\rho^3 + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2\delta^4 > 0$$

et

$$1 + 4\rho - 2\left(1 + \frac{3}{\delta^2}\right)\rho^2 - 4\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)\rho^3 + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2\rho^4 > 0$$

c'est-à-dire

$$(139) \quad \begin{cases} \left[1 - 2\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}}\right)\rho - \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)\rho^2 \right] \left[1 + 2\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}}\right)\rho - \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)\rho^2 \right] > 0 \\ \text{et} \\ \left[1 + 2\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}}\right)\rho - \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)\rho^2 \right] \left[1 - 2\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}}\right)\rho - \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)\rho^2 \right] > 0 \end{cases}$$

Or, le polynome en ρ

$$(140) \quad P_2(\rho) = 1 - 2\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}}\right)\rho - \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)\rho^2$$

a une racine positive

$$(141) \quad \rho = \rho^+ = \frac{1}{1 + \frac{1}{\delta^2}} \left[-\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}}\right) + \sqrt{3 + \frac{2}{\delta^2} + 2\sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}}} \right] < \frac{\delta}{1 + \delta}$$

(ce qui résulte du fait que en (140))

$$P_2\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right) = -\frac{2\delta}{(1+\delta)^2} \left[\delta + (1+\delta) \sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}} \right].$$

De plus, comme (136) et (141) donnent $0 < \rho < \frac{\delta}{1+\delta}$, nous avons en (139)

$$1 - \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^2 > 1 - \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \frac{\delta^2}{(1+\delta)^2} = \frac{2\delta}{(1+\delta)^2} > 0$$

et

$$\begin{aligned} 1 - 2 \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}} \right) \rho - \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^2 &= \\ = 4\rho + 1 - 2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}} \right) \rho - \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^2 &> 0 \end{aligned}$$

auquel cas les inégalités (139) sont évidemment satisfaites. Par suite, au tableau (67) nous avons, comme spécifié $\sigma_{2,r}(-1) > 1$ et $\sigma_{2,r}(1) < -1$. Les deux premières expressions (137) ont des valeurs plus grandes que 1, de par le choix (136) de ρ . En ce cas, le tableau 67 donne $|\sigma_{2,r}(\alpha)| > |\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)|$ pour tout $\alpha \in [-1, 1]$.

En effet pour $-1 \leq \alpha < -\rho$ nous avons

$$\left| \frac{\sigma_{2,r}(\alpha)}{\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)} \right| = \frac{\sigma_{2,r}(\alpha)}{|\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)|} \geq \frac{\sigma_{2,r}(-1)}{|\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)|} = \left| \frac{\sigma_{2,r}(-1)}{\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)} \right| > 1$$

et pour $-\rho < \alpha \leq 1$ nous avons

$$\left| \frac{\sigma_{2,r}(\alpha)}{\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)} \right| = \frac{-\sigma_{2,r}(\alpha)}{|\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)|} \geq \frac{-\sigma_{2,r}(1)}{|\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)|} = \left| \frac{\sigma_{2,r}(1)}{\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)} \right| > 1$$

De plus, pour $\alpha \geq -1$ nous avons en (137)

$$\begin{aligned} (142) \quad 1 + 2\alpha\rho + \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^2 &\geq 1 - 2\rho + \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^2 = \\ &= \left[1 - \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \rho \right] \left[1 + \left(-1 + \frac{1}{\delta}\right) \rho \right] > 0 \end{aligned}$$

conformément à (136) et (141) et pour $\alpha \in [-1, 1]$ et $\rho > 0$

$$\begin{aligned} (143) \quad 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right) \alpha\rho + 2 \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^2 + 2 \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \alpha\rho^3 + \\ + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^4 \geq P_3(\rho) = 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right) \rho + 2 \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^2 - \\ - 2 \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^3 + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^4. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\frac{1}{2} P'_3(\rho) = 1 - \frac{1}{\delta^2} + 2 \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right) \rho - 3 \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^2 + 2 \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^3.$$

$$\frac{1}{4} P''_3(\rho) = 1 - \frac{1}{\delta^2} - 3 \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \rho + 3 \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^2;$$

$$\frac{1}{12} P^{(3)}_3(\rho) = \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) (-1 + 2\rho)$$

par suite pour

$$(144) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 < \rho < \rho^+ < \frac{\delta}{1+\delta} < \frac{1}{2} \\ P^{(3)}_3(\rho) < 0, \quad P^{(2)}_3(\rho) < P^{(2)}_3(0) &= 4 \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right) < 0 \\ P'_3(\rho) < P'_3(0) &= 2 \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right) < 0, \quad P_3(\rho) > P_3(\rho^+) = \\ &= 4\rho^+ + \frac{25 + \frac{17}{\delta^2} - \frac{2}{\delta^4} - \frac{2}{\delta^6} + 2 \left(12 + \frac{3}{\delta^2} - \frac{1}{\delta^4}\right) \sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}}}{7 + \frac{7}{\delta^2} + \frac{2}{\delta^4} + \left(7 + \frac{3}{\delta^2}\right) \sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}} +} \\ &\quad + \left[2 \left(2 + \frac{1}{\delta^2}\right) + \left(3 + \frac{1}{\delta^2}\right) \sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}} \right] \sqrt{3 + \frac{2}{\delta^2} + 2 \sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}}} \end{aligned} \right.$$

En ce cas, (142) et (143) donnent en (137)

$$\left| \frac{\sigma_{1,r}(\alpha)}{\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)} \right| = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \left[1 + 2 \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^2 + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^4 \right]} R_2(\alpha)$$

avec

$$R_2(\alpha) = \frac{1 + 2 \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^2 + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^4 + 2\rho \left[1 - \frac{1}{\delta^2} + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^2 \right] \alpha}{1 + \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^2 + 2\rho\alpha}$$

par suite

$$R'_2(\alpha) = -2\rho \left[\frac{1}{\delta} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^2}{1 + \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right) \rho^2 + 2\rho\alpha} \right] < 0$$

donc pour tout $\alpha \in [-1, 1]$, $R_2(\alpha) \geq R_2(1)$ en vertu de (142).

Par suite

$$(145) \quad \left| \frac{\sigma_{1,r}(\alpha)}{\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)} \right| \geq E_3 = \frac{2R_2(1)}{\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \left[1 + 2\left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)\rho^2 + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2 \rho^4\right]} =$$

$$= \frac{2}{1 + \frac{1}{\delta^2}} \cdot \frac{1 + 2\left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)\rho + 2\left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)\rho^3 + 2\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2 \rho^3 + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2 \rho^4}{\left[1 + \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\rho\right] \left[1 + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\rho\right] \left[1 + 2\left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)\rho^2 + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2 \rho^4\right]} > 1$$

de par le choix (136) de ρ . Par conséquent $|\sigma_{1,r}(\alpha)| > |\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)|$ pour tout $\alpha \in [-1, 1]$. La partie de la proposition P relative à $\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)$ est ainsi, si l'hypothèse (136) est exacte, mise en défaut. Il s'ensuit que la construction des sections (β_1) et (β_2) des courbes (Γ_1) et (Γ_2) de (41) ([4]) ne peut être évitée par la proposition P , puisque sa partie relative à $\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)$ est inexacte. Ne sachant pas si l'hypothèse (136) est exacte, nous ne savons pas si la partie de la proposition P relative à $\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)$ est exacte ou non, donc si par ce moyen on peut ou non éviter la construction des sections (β_3) et (β_4) des courbes (Γ_3) et (Γ_4) de (41) ([4]).

Nous désignerons par le terme "proposition P^0 " une proposition obtenue en remplaçant dans la proposition P $(\Delta_{1,r})$ par $(\Delta_{3,i}^0)$, (B_s) par (B_s^0) ($s = 1, 4$) et δ par δ_0 (cf. notations 5, ([4])). Si la proposition P^0 avait lieu elle rendrait inutile la construction des sections (β_s^0) ($s = 1, 4$) définies aux notations 5 ([4]). Mais la partie de la proposition P^0 relative à $\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)$ est mise en défaut par choix d'un point (ρ, b) situé sur la tangente commune (à l'origine) des boucles (β_3^0) et (β_4^0) , dont l'abscisse satisfait aux conditions (136), dans lesquelles δ est remplacé par $\delta_0 > 1$ (ces conditions sont évidemment remplies pour ρ assez petit). En effet, l'inégalité (142) se conserve si δ y est remplacé par δ_0 , parce que ayant $0 < \rho < \frac{\delta_0}{1 + \delta_0}$ (cf. 136), 2° et (141), où δ est remplacé par δ_0 , il s'ensuit :

$$1 - \left(1 - \frac{1}{\delta_0}\right)\rho > 1 - \left(1 + \frac{1}{\delta_0}\right)\rho > 0$$

Les modifications à apporter au raisonnement présenté pages 164–168 sont donc d'y remplacer $\delta < 1$ par $\delta_0 > 1$ et de changer l'expression (143) de $P_3(\rho)$ par l'expression suivante :

$$(146) \quad P_3(\rho) = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{\delta_0^2}\right)\rho + 2\left(1 - \frac{1}{\delta_0^2}\right)\rho^2 - 2\left(1 + \frac{1}{\delta_0^2}\right)^2 \rho^3 + \left(1 + \frac{1}{\delta_0^2}\right)^2 \rho^4$$

Dans le raisonnement présenté pages 164–168 relatif à $\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)$ nous ne pouvions prendre $\rho > 0$ arbitrairement petit, parce que pour $\rho > 0$ suffisamment petit nous avons en (145) $E_3 < 1$. Dans le cas de la proposition P^0 cette restriction n'existe pas, du fait que pour de telles valeurs de ρ nous avons en (145) $E_3 > 1$. Les relations (136) 1° et (144) se remplacent donc par le choix de $\rho \in (0, \rho^+(\delta_0))$ assez petit pour avoir en (146) $P_3(\rho) > 0$. La construction des sections (β_3^0) et (β_4^0) des courbes (Γ_3^0) et (Γ_4^0) (no-

tations 5) ([4]) ne peut donc être évitée par la proposition P^0 , dont la partie relative à $\bar{\alpha}_{2,r}(\rho, b)$ est inexacte. Nous ne savons pas si sa partie relative à $\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)$ est exacte, donc si elle peut ou non éviter la construction des sections (β_1^0) et (β_2^0) des courbes (Γ_1^0) et (Γ_2^0) (notations 5). En effet, en remplaçant en (133) δ par δ_0 nous avons $\left| \frac{\sigma_{2,r}(\alpha)}{\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)} \right| < 1$ pour α fixé dans

l'intervalle $[-1, 1]$ si $\rho > 0$ est assez petit. Nous ne savons donc pas si l'on peut choisir ρ assez petit pour rendre les valeurs des trois expressions obtenues en remplaçant en (133) δ par δ_0 plus grandes que 1 (ce qui mettrait en défaut la partie de la proposition P^0 relative à $\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)$). Peut-être une hypothèse du genre (136) donnerait — elle une condition suffisante pour mettre en défaut la partie de la proposition P^0 relative à $\bar{\alpha}_{1,r}(\rho, b)$.

Remarque 19. Un des problèmes que pose l'étude de la fonctionnelle $F[f]$ est de rechercher comment la région $(E_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, z_1})$ définie au point 7 des notations 1 ([4]) change avec ε , en particulier d'indiquer d'éventuelles positions des noeuds z_1 et z_2 ($z_2 \in (R_c)$) pour lesquelles, ainsi que le suggère la remarque 8, nous ayons pour $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leq 1$, $(E_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, z_1}) \supset (E_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, z_2})$ pour de tels ε_1 et ε_2 et pour $1 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $(E_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, z_1}) \supset (E_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, z_2})$ pour de tels ε_1 et ε_2 donc changer le sens des inclusions en passant de $\varepsilon_1 < 1$ à $\varepsilon_1 \geq 1$. En ce cas, $(E_{1, \varepsilon_2, z_1})$ serait la région maximale (ou minimale) qu'on peut prendre dans l'énoncé du théorème 1. ([4]). Une telle conclusion présenterait peut-être un certain intérêt dans ce genre de recherches.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Mocanu, P., Reade, M. et Zlotkiewicz, E., *On the functional for typically real functions*. Revue d'analyse numérique et de la théorie de l'approximation 3, 2, 209–214 (1974).
- [2] Ashnévits, I., et Uliua, G. Об областях значений аналитических функций, представимых интегралом Стильеса. Вестник ленинградского университета, 11, 31–42 (1955).
- [3] Goodman, A., *The critical points of a typically real function*, Proceedings of the American Mathematical Society, 38, 1, 95–102 (1973).
- [4] Ripeanu D., *Sur la fonctionnelle $\frac{f(z_1)}{f'(z_2)}$ au cas des fonctions typiquement réelles* (I), Mathematica — Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation, Mathematica, 21 (44), 2, 163–188, (1979).
- [5] Ripeanu D., *Sur la fonctionnelle $\frac{f(z_1)}{f'(z_2)}$ au cas des fonctions typiquement réelles* (II), Mathematica — Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation. Mathematica 22 (45), 1, 131–165 (1980).

Recu, 23. XII. 1979

Institutul de Matematică
Str. Republicii 37 C.P. 68,
Oficiul Poștal 1 3400
Cluj-Napoca Romania