

SUR LES RACINES DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0.$$

par

DUMITRU RIPEANU

à Cluj-Napoca

1. Dans ce travail nous donnons une délimitation inférieure aux racines positives des solutions de l'équation différentielle

$$(1) \quad y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

qui s'annulent pour $x = 0$. Nous supposons que les coefficients $p_s(x)$ ($s = 1, 2$) sont des fonctions continues dans un intervalle donné $[0, l]$ ($l > 0$)*). Nous présentons accessoirement un intervalle d'interpolation pour l'équation (1), ainsi que quelques informations sur la longueur de cet intervalle et un procédé qui donne des équations (1) interpolatoires dans un intervalle donné.

Nous nous servons pour la commodité des notations suivantes :

- 1°. E — une équation (1) déterminée par ses coefficients $p_s(x)$ ($s = 1, 2$).
- 2°. $H = H(l)$ — l'ensemble des équations (1) qui ont la propriété que leurs solutions qui s'annulent pour $x = 0$ possèdent dans l'intervalle $[0, l]$ au moins une racine positive.
- 3°. h_E — la plus petite racine positive des solutions de E ($E \in H$) qui s'annulent pour $x = 0$.

$$4°. (2) F_{a_1, a_2}(h) = a_2 \max_{x \in [0, h]} |p_2(x)| h^2 + a_1 \max_{x \in [0, h]} |p_1(x)| h - 1,$$

avec a_1, a_2 constantes et h variable > 0 (et $\leq l$).

- 5°. $\mathcal{A}$ — l'ensemble des paires ordonnées de deux nombres positifs (a_1, a_2) qui ont la propriété qu'en (2)

$$(3) \quad F_{a_1, a_2}(h_E) \geq 0$$

pour chaque équation E de H .

Bien que le lemme qui suit présente un résultat bien connu ([1] et [4]) et sans rapport immédiat avec l'objet de ce travail, nous le présentons avec une démonstration immédiate.

*) Nous supposons $p_1(x)$ et $p_2(x)$ non identiquement nulles dans $[0, l]$.

Lemme 1. L'ensemble $\mathcal{A}$ comprend parmi ses éléments la paire $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$.

Démonstration. Le théorème bien connu de DE LA VALLÉE-POUSSIN ([1]) appliqué à l'équation (1) et à l'intervalle $[0, h_E]$ nous dit que si $P(h_E) < 0$, où $P(h) = -1 + m_1 h + m_2 \frac{h^2}{2}$ et $m_s = \max_{x \in [0, h_E]} |p_s(x)|$ ($s = 1, 2$), alors l'intervalle $[0, h_E]$ est un intervalle d'interpolation pour l'équation E . En ce cas, toute solution non identiquement nulle de l'équation E possède dans l'intervalle $[0, h_E]$ au plus une racine (DE LA VALLÉE-POUSSIN [1]), ce qui contredit la définition du nombre h_E et démontre que $P(h_E) \geq 0$, c'est-à-dire en (2) $F_{1, \frac{1}{2}}(h_E) \geq 0$ pour toute équation E de H . Le lemme

est ainsi démontré.

2. Le théorème ci-dessous donne la délimitation inférieure spécifiée au §. 1.

THÉOREME 1.1. Pour chaque équation E de H a lieu la relation $h_E \geq \Phi(p)$, où

$$(4) \quad \begin{cases} p = \frac{M_2}{M_1^2}, M_s = \max_{x \in [0, 1]} |p_s(x)| (s = 1, 2) \text{ et} \\ \Phi(p) = \begin{cases} \frac{2}{M_1} \cdot \frac{\log \frac{1}{2p} (1 - 2p + \sqrt{1 - 4p})}{\sqrt{1 - 4p}} & \text{si } 0 < p < \frac{1}{4} \\ \frac{2}{M_1} \cdot \frac{\arccos \left(\frac{1}{2p} - 1 \right)}{\sqrt{4p - 1}} & \text{si } p > \frac{1}{4} \end{cases} \end{cases} *$$

(dans les expressions ci-dessus, la notation $\log$ désigne le logarithme népérien et la notation $\arccos$ l'arc d'origine 0 et d'extrémité $\leq \pi$).

2. La fonction $\Phi(p)$ est une fonction continue de la variable indépendante p dans l'intervalle $(0, \infty)$ et lorsque p croît de 0 à ∞ , $\Phi(p)$ décroît de manière monotone de ∞ à 0.

Démonstration. Si l'on écrit, comme dans la démonstration du lemme 1

$$(5) \quad m_s = \max_{x \in [0, h_E]} |p_s(x)| \quad (s = 1, 2),$$

alors la relation (3) s'écrit

$$\frac{a_2 m_2 \left(h_E + \frac{2}{-a_1 m_1 + \sqrt{a_1^2 m_1^2 + 4a_2 m_2}} \right) \left(h_E - \frac{2}{a_1 m_1 + \sqrt{a_1^2 m_1^2 + 4a_2 m_2}} \right)}{\geq 0},$$

$$* \Phi(p) = \frac{4}{M_1} \text{ si } p = \frac{1}{4}.$$

ce qui équivaut à

$$(6) \quad h_E \geq \frac{2}{a_1 m_1 + \sqrt{a_1^2 m_1^2 + 4a_2 m_2}}.$$

Or (4) et (5) donnent $m_s \leq M_s$ ($s = 1, 2$) (à cause que $h_E \leq L$), de sorte que

$$\frac{2}{a_1 m_1 + \sqrt{a_1^2 m_1^2 + 4a_2 m_2}} \geq \frac{2}{a_1 M_1 + \sqrt{a_1^2 M_1^2 + 4a_2 M_2}}$$

auquel cas (6) donne

$$(7) \quad \begin{cases} h_E \geq H(a_1, a_2), \text{ où } H(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{2}{M_1 \sigma_1 + \sqrt{M_1^2 \sigma_1^2 + 4M_2 \sigma_2}} \\ (\sigma_1, \sigma_2 \text{ variables indépendantes à valeurs positives}), \\ \text{ce qui fait que} \end{cases}$$

$$(8) \quad \text{si } 0 < \sigma'_1 < \sigma''_1 \text{ et } 0 < \sigma'_2 < \sigma''_2, \text{ alors } H(\sigma'_1, \sigma'_2) > H(\sigma''_1, \sigma''_2).$$

Nous allons nous servir du résultat suivant ([2], p. 91, th. 2) : Le point P de coordonnées (a_1, a_2) par rapport à un système d'axes rectangulaires Oa_1a_2 couvre, lorsque la paire (a_1, a_2) parcourt l'ensemble $\mathcal{A}$ défini aux notations du §. 1 (point 5°), un domaine infini (D) , marqué en pointillé dans la fig. 1 et situé au-dessus de la (et sur la) frontière (C) définie de la manière suivante. Pour $0 < a_1 < \frac{1}{8}$, (C) est constituée par l'arc de courbe (C_1) d'équations paramétriques

$$(9) \quad \begin{cases} a_1 = a_1(s) = -\frac{1-s}{2 \log s} \cdot \frac{2(1-s) + (1+s) \log s}{1-s^2 + (1+s^2) \log s} \\ (C_1) \\ a_2 = a_2(s) = -\frac{(1-s)^2}{4s \log^2 s} \cdot \frac{1-s^2 + 2s \log s}{1-s^2 + (1+s^2) \log s}, \end{cases}$$

où le paramètre s parcourt l'intervalle $(0, 1)$ et $\log s$ désigne le logarithme népérien de s . Pour $a_1 = \frac{1}{8}$, le point (C) est le point A de coordonnées

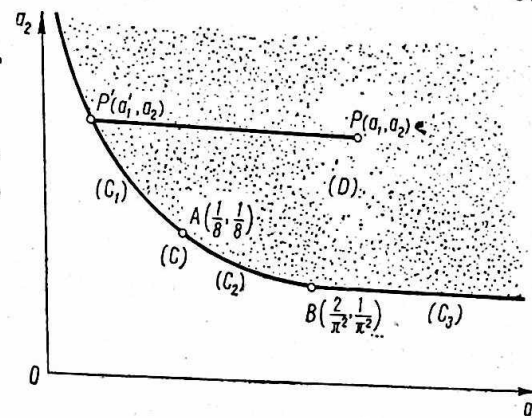


Fig. 1.

données $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$. Pour $\frac{1}{8} < a_1 < \frac{2}{\pi^2}$, (C) est constituée par l'arc de courbe (C_2) d'équations paramétriques

$$(10) \quad (C_2)a_1 = a_1(s) = \frac{2(1 - \cos s) - s \sin s}{2s(\sin s - s \cos s)}, \quad a_2 = a_2(s) = \frac{(1 - \cos s)(s - \sin s)}{2s^2(\sin s - s \cos s)}$$

où le paramètre s parcourt l'intervalle $(0, \pi)$. Enfin, pour $a_1 \geq \frac{2}{\pi^2}$, (C) est constituée par la demi-droite (C_3) d'origine B et parallèle à l'axe Oa_1 , le point B ayant les coordonnées $\left(\frac{2}{\pi^2}, \frac{1}{\pi^2}\right)$. La frontière (C) appartient, comme spécifié ci-dessus, au domaine (D) .

De ce résultat et de (8) il résulte sur la fig. 1 où le point P' est sur (C) , que en (7) $H(a'_1, a_2) \geq H(a_1, a_2)$, ce qui signifie que en (7)

$$(10_1) \quad \max_{(a_1, a_2) \in \mathcal{C}} H(a_1, a_2) = \max_{P(a_1, a_2) \in (D)} H(a_1, a_2) = \max_{P(a_1, a_2) \in (C)} H(a_1, a_2)$$

où il est entendu par la notation $P(a_1, a_2) \in (D)$ (ou (C)) que le point P de coordonnées (a_1, a_2) , appartient à (D) (ou à (C)).

Nous écrivons le long de (C)

$$(11) \quad \begin{cases} a_1 = a_1(s), \quad a_2 = a_2(s) \\ f(s) = H(a_1(s), a_2(s)) = \frac{2}{M_1} \cdot \frac{1}{a_1(s) + \sqrt{a_1^2(s) + 4p a_2(s)}} \text{ de sorte que} \\ f'(s) = -\frac{2}{M_1} \cdot \frac{a'_1(s) + \frac{a_1(s) a'_1(s) + 2p a'_2(s)}{\sqrt{a_1^2(s) + 4p a_2(s)}}}{[a_1(s) + \sqrt{a_1^2(s) + 4p a_2(s)}]^2} \\ f(s) = f_\alpha(s) \text{ le long de l'arc } (C_\alpha) (\alpha = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

Or, le long de l'arc (C_1) $a'_1(s) > 0$ et $a'_2(s) = \frac{1-s^2}{2s \log s} a'_1(s)$ ([2], pages 92-93), de sorte que (11) donne

$$f'_1(s) = \frac{2p a'_1(s)}{M_1 \sqrt{a_1^2(s) + 4p a_2(s)} [a_1(s) + \sqrt{a_1^2(s) + 4p a_2(s)}]^2} \cdot \frac{p(1-s^2)^2 + 2a_1(s)(1-s^2)s \log s - 4a_2(s)s^2 \log^2 s}{s^2 \log^2 s \left[\sqrt{a_1^2(s) + 4p a_2(s)} - a_1(s) - p \frac{1-s^2}{s \log s} \right]}$$

par suite, $sg f'_1(s) = sg \varphi_1(s)$, avec

$\varphi_1(s) = p(1-s^2)^2 + 2a_1(s)(1-s^2)s \log s - 4a_2(s)s^2 \log^2 s$, c'est-à-dire, avec les expressions (9) $\varphi_1(s) = (1-s^2)^2 \bar{\Phi}_1(s)$, avec

$$(12) \quad \bar{\Phi}_1(s) = p - \frac{s}{(1+s)^2},$$

ce qui donne $\bar{\Phi}'_1(s) = \frac{-1+s}{(1+s)^2}$. À l'aide des valeurs $\lim_{s \rightarrow 0+} a_1(s) = 0$,

Tableau 1

s	0	s_1	1
$f'_1(s)$	+	0	-
$f_1(s)$	0	$\nearrow f_1(s_1)$	$\searrow f_1(1)$

Tableau 2

s	0	1
$f'_1(s)$	+	
$f_1(s)$	0	$\nearrow f_1(1)$

$$\lim_{s \rightarrow 0+} a_2(s) = \infty, \quad a_1(1) = a_2(1) = \frac{1}{8},$$

il en résulte les tableaux 1 ou 2, selon que $p < \frac{1}{4}$ ou $p \geq \frac{1}{4}$. Le long de l'arc (C_2) , $a'_1(s) > 0$ et $a'_2(s) = -\frac{\sin s}{s} a'_1(s)$ ([2], pages 92-93), de sorte que (11) donne.

$$f'_2(s) = \frac{8p a'_1(s)}{M_1 \sqrt{a_1^2(s) + 4p a_2(s)} [a_1(s) + \sqrt{a_1^2(s) + 4p a_2(s)}]^2} \cdot \frac{p \sin^2 s - sa_1(s) \sin s - s^2 a_2(s)}{s^2 \left[\sqrt{a_1^2(s) + 4p a_2(s)} - a_1(s) + 2p \frac{\sin s}{s} \right]}$$

Par conséquent $sg f'_2(s) = sg \varphi_2(s)$, avec

$$\varphi_2(s) = p \sin^2 s - sa_1(s) \sin s - s^2 a_2(s),$$

c'est-à-dire avec les expressions (10) :

$$\varphi_2(s) = \sin^2 s \bar{\Phi}_2(s), \text{ avec}$$

$$(13) \quad \bar{\Phi}_2(s) = p - \frac{1}{2(1 + \cos s)}$$

ce qui donne $\bar{\Phi}'_2(s) = -\frac{\sin s}{2(1 + \cos s)^2}$. À l'aide des valeurs $a_1(0) = a_2(0) = \frac{1}{8}$, $a_1(\pi) = \frac{2}{\pi^2}$, $a_2(\pi) = \frac{1}{\pi^2}$, il en résulte les tableaux 3 ou 4, selon que $p > \frac{1}{4}$ ou que $p \leq \frac{1}{4}$ et auxquels $f_1(1) = f_2(0)$.

Tableau 3

s	0	s_2	π
$f'_2(s)$	+	0	-
$f_2(s)$	$f_2(0)$	$\nearrow f_2(s_2)$	$\searrow f_2(\pi)$

Tableau 4

s	0	π
$f'_2(s)$	-	
$f_2(s)$	$f_2(0)$	$f_2(\pi)$

Enfin, le long de la demi-droite (C_3) , qui admet, par exemple, la représentation paramétrique $a_1 = s$, $a_2 = \frac{1}{\pi^2} \left(s \geq \frac{2}{\pi^2} \right)$,

(11) donne $f_3(s) = \frac{2}{M_1} \cdot \frac{1}{s + \sqrt{\frac{4p}{\pi^2} + s^2}}$ ce qui donne le tableau 5, auquel

$f_3\left(\frac{2}{\pi^2}\right) = f_2(\pi)$. Or, lorsque le paramètre s croît de 0 à 1, respectivement de 0 à π , le point P de coordonnées $(a_1(s), a_2(s))$ données par (9), respectivement l'arc (C_2) dans le sens donné par la flèche de la fig. 1 ([2], pag. 93).*)

Tableau 5

s	$\frac{2}{\pi^2}$	∞
$f_3(s)$	$f_3\left(\frac{2}{\pi^2}\right)$	0

En ce cas, les tableaux 1—5 donnent les tableaux 6—8, qui décrivent le comportement de la fonction $f(s)$ de (11) alors que le point P de coordonnées (a_1, a_2) parcourt la frontière (C) dans le sens donné sur la fig. 1 par la flèche et où $f_1(1) = f_2(0) = H\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ ([2], p. 93).*)

Tableau 6 $\left(p < \frac{1}{4}\right)$

s	0	s_1	1	s	0	π	s	$\frac{2}{\pi^2}$	∞
$f_1(s)$	0	$\nearrow f_1(s_1)$	$\searrow f_1(1)$	$f_2(s)$	$f_2(0) = f_1(1)$	$\searrow f_2(\pi)$	$f_3(s)$	$f_3\left(\frac{2}{\pi^2}\right) = f_2(\pi)$	$\searrow 0$

Tableau 7 $\left(p = \frac{1}{4}\right)$

s	0	1	s	0	π	s	$\frac{2}{\pi^2}$	∞
$f_1(s)$	0	$\nearrow \frac{4}{M_1}$	$f_2(s)$	$\frac{4}{M_1}$	$\searrow f_2(\pi)$	$f_3(s)$	$f_3\left(\frac{2}{\pi^2}\right) = f_2(\pi)$	$\searrow 0$

Tableau 8 $\left(p > \frac{1}{4}\right)$

s	0	1	s	0	s_2	π	s	$\frac{2}{\pi^2}$	∞
$f_1(s)$	0	$\nearrow f_1(1)$	$f_2(s)$	$f_2(0) = f_1(1)$	$\nearrow f_2(s_2)$	$\searrow f_2(\pi)$	$f_3(s)$	$f_3\left(\frac{2}{\pi^2}\right) = f_2(\pi)$	$\searrow 0$

*) Sens de A vers B .

Pour $p < \frac{1}{4}$, le nombre s_1 du tableau 6 est la racine (comprise dans l'intervalle $(0, 1)$) de la fonction $\Phi_1(s)$ de (12), c'est-à-dire

$$s_1 = \frac{1}{2p} (1 - 2p - \sqrt{1 - 4p}),$$

En remplaçant s par cette valeur en (9), il vient donc

$$(14) \quad \begin{cases} a_1 = a_1^\oplus = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-4p}}{\log \frac{1}{2p} (1-2p-\sqrt{1-4p})} \\ \quad \cdot \frac{2\sqrt{1-4p} + \log \frac{1}{2p} (1-2p-\sqrt{1-4p})}{\sqrt{1-4p} + (1-2p) \log \frac{1}{2p} (1-2p-\sqrt{1-4p})} \\ a_2 = a_2^\oplus = -\frac{1-4p}{4p \log^2 \frac{1}{2p} (1-2p-\sqrt{1-4p})} \\ \quad \cdot \frac{\sqrt{1-4p} + 2p \log \frac{1}{2p} (1-2p-\sqrt{1-4p})}{\sqrt{1-4p} + (1-2p) \log \frac{1}{2p} (1-2p-\sqrt{1-4p})} \end{cases}$$

ce qui donne

$$(a_1^\oplus)^2 + 4p a_2^\oplus = \frac{(1-4p)^3}{4 \left[\sqrt{1-4p} + (1-2p) \log \frac{1}{2p} (1-2p-\sqrt{1-4p}) \right]^2}$$

Si l'on écrit $\theta_1(p) = \frac{\sqrt{1-4p}}{1-2p} + \log \frac{1}{2p} (1-2p-\sqrt{1-4p})$, il vient $\theta_1'(p) = \frac{\sqrt{1-4p}}{p(1-2p)^2} > 0$, donc pour $0 < p \leq \frac{1}{4}$, $\theta_1(p) \leq \theta_1\left(\frac{1}{4}\right) = 0$, de sorte que

$$\sqrt{(a_1^\oplus)^2 + 4p a_2^\oplus} = -\frac{(1-4p) \sqrt{1-4p}}{2 \left[\sqrt{1-4p} + (1-2p) \log \frac{1}{2p} (1-2p-\sqrt{1-4p}) \right]}$$

En portant l'expression obtenue et celle de $a_1^\oplus$ de (14) en (11), il vient

$$(15) \quad f_1(s_1) = \Phi_1(p) = \frac{2}{M_1} \cdot \frac{\log \frac{1}{2p} (1-2p+\sqrt{1-4p})}{\sqrt{1-4p}}$$

Pour $p > \frac{1}{4}$, le nombre s_2 du tableau 8 est la racine (comprise dans



l'intervalle $(0, \pi)$ de la fonction $\bar{\Phi}_2(s)$ de (13), c'est-à-dire $s_2 = \arccos\left(\frac{1}{2p} - 1\right)$.
En remplaçant s par cette valeur en (10) il vient donc

$$(16) \quad \begin{cases} a_1 = a_1^{\mathcal{Q}} = \frac{\sqrt{4p-1}}{2 \arccos\left(\frac{1}{2p} - 1\right)} \cdot \frac{2\sqrt{4p-1} - \arccos\left(\frac{1}{2p} - 1\right)}{\sqrt{4p-1} - (1-2p) \arccos\left(\frac{1}{2p} - 1\right)} \\ a_2 = a_2^{\mathcal{Q}} = \frac{4p-1}{4p \left[\arccos\left(\frac{1}{2p} - 1\right) \right]^2} \cdot \frac{-\sqrt{4p-1} + 2p \arccos\left(\frac{1}{2p} - 1\right)}{\sqrt{4p-1} - (1-2p) \arccos\left(\frac{1}{2p} - 1\right)} \end{cases}$$

ce qui donne

$$(a_1^{\mathcal{Q}})^2 + 4p a_2^{\mathcal{Q}} = \frac{(4p-1)^3}{4 \left[\sqrt{4p-1} - (1-2p) \arccos\left(\frac{1}{2p} - 1\right) \right]^2}$$

Si l'on écrit $\theta_2(p) = \frac{\sqrt{4p-1}}{1-2p} - \arccos\left(\frac{1}{2p} - 1\right)$, il vient $\theta_2'(p) = \frac{\sqrt{4p-1}}{p(1-2p)^2} \geq 0$, donc pour $\frac{1}{4} \leq p < \frac{1}{2}$, $\theta_2(p) \geq \theta_2\left(\frac{1}{4}\right) = 0$, de sorte que (ce qui pour $p \geq \frac{1}{2}$ est évident).

$$\sqrt{(a_1^{\mathcal{Q}})^2 + 4p a_2^{\mathcal{Q}}} = \frac{(4p-1) \sqrt{4p-1}}{2 \left[\sqrt{4p-1} + (2p-1) \arccos\left(\frac{1}{2p} - 1\right) \right]}$$

En portant l'expression obtenue et celle de $a_1^{\mathcal{Q}}$ de (16) en (11) il vient

$$(17) \quad f_2(s_2) = \Phi_2(p) = \frac{2}{M_1} \cdot \frac{\arccos\left(\frac{1}{2p} - 1\right)}{\sqrt{4p-1}}$$

D'ailleurs (15) donne $\frac{M_1}{2} \Phi_1'(p) = \frac{A_1(p)}{(1-4p) \sqrt{1-4p}}$ avec

$$(18) \quad A_1(p) = -\frac{\sqrt{1-4p}}{p} + 2 \log \frac{1}{2p} (1-2p + \sqrt{1-4p}),$$

de sorte que $A_1'(p) = \frac{\sqrt{1-4p}}{p^2} > 0$, et pour $0 < p \leq \frac{1}{4}$, $A_1(p) \leq A_1\left(\frac{1}{4}\right) = 0$, donc $\Phi_1'(p) < 0$. Quand p croît de 0 à $\frac{1}{4}$, $\Phi_1(p)$, décroît donc de ∞ à $\frac{4}{M_1}$.

Enfin (17) donne

$$(19) \quad \frac{M_1}{2} \Phi_2'(p) = \frac{A_2(p)}{(4p-1) \sqrt{4p-1}}, \text{ avec}$$

$$A_2(p) = \frac{\sqrt{4p-1}}{p} - 2 \arccos\left(\frac{1}{2p} - 1\right),$$

de sorte que $A_2'(p) = -\frac{\sqrt{4p-1}}{p^2} < 0$ et pour $p \geq \frac{1}{4}$, $A_2(p) \leq A_2\left(\frac{1}{4}\right) = 0$, donc $\Phi_2'(p) < 0$. Quand p croît de $\frac{1}{4}$ à ∞ , $\Phi_2(p)$ décroît donc de $\frac{4}{M_1}$ à 0. Par conséquent

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Lorsque } p \text{ croît de } 0 \text{ à } \infty, \text{ la fonction} \\ \Phi(p) = \begin{cases} \Phi_1(p) & \text{pour } 0 < p < \frac{1}{4} \\ \frac{4}{M_1} & \text{pour } p = \frac{1}{4} \\ \Phi_2(p) & \text{pour } p > \frac{1}{4} \end{cases} \\ \text{est une fonction continue, qui décroît de manière monotone de } \infty \text{ à } 0. \end{array} \right.$$

La relation (7) donne

$$(21) \quad h_E \geq \max_{(a_1, a_2) \in \mathcal{A}} H(a_1, a_2).$$

Or, le maximum de $H(a_1, a_2)$ étant atteint sur la frontière (C) (cf. (10)), (11) donne

$$\max_{(a_1, a_2) \in \mathcal{A}} H(a_1, a_2) = \max \left(\max_{s \in (0, 1)} f_1(s), \max_{s \in (0, \pi)} f_2(s), \max_{s \geq \frac{2}{\pi}} f_3(s), H\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) \right),$$

auquel cas les tableaux 6-8 donnent

$$\max_{(a_1, a_2) \in \mathcal{A}} H(a_1, a_2) = \begin{cases} f_1(s_1) & \text{pour } 0 < p < \frac{1}{4} \\ \frac{4}{M_1} & \text{pour } p = \frac{1}{4} \\ f_2(s_2) & \text{pour } p > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Si l'on tient compte des expressions (15) et (17), (21) donne

$$h_E \geq \Phi(p)$$

avec $\Phi(p)$ définie en (20) (ou en (4)), c'est-à-dire le point 1, et (20) le point 2 du théorème.

3. Le théorème ci-dessous donne un intervalle d'interpolation pour l'équation (1), comme spécifié au §. 1.

THÉORÈME 2. L'intervalle $[0, \Phi(p))$, avec $\Phi(p)$ définie en (4) est un intervalle d'interpolation pour l'équation E de l'ensemble H .

Démonstration. Si $y_0(x)$ est une solution de l'équation E pour laquelle $y_0(0) = y_0(h_E) = 0$, alors, du fait que selon le théorème 1 l'intervalle $[0, \Phi(p))$ est compris dans l'intervalle $[0, h_E)$, il résulte que dans l'intervalle $[0, \Phi(p))$ de même que dans $[0, h_E)$ $y_0(x)$ possède la seule racine $x = 0$. Si $y_1(x)$ est une solution de l'équation E pour laquelle $y_1(0) \neq 0$, $x = 0$. Si $y_1(x)$ est une solution de l'équation E pour laquelle $y_1(0) \neq 0$, donc linéairement indépendante de la solution $y_0(x)$, alors $y_1(x)$ possède dans l'intervalle $[0, h_E)$ au plus une racine, parce que au cas contraire, selon le théorème de STURM, $y_0(x)$ aurait au moins une racine dans l'intervalle (ouvert) $(0, h_E)$, ce qui contredit la définition du nombre h_E . Par conséquent, toute solution (non identiquement nulle) de l'équation E possède dans l'intervalle $[0, \Phi(p))$ comme dans l'intervalle $[0, h_E)$, au plus une racine. Selon un résultat de DE LA VALLÉE-POUSSIN ([1]), utilisé d'ailleurs aussi à la démonstration du lemme 1, l'équation E est interpolatoire dans l'intervalle $[0, \Phi(p))$, comme dans l'intervalle $[0, h_E)$, ce qui démontre le théorème.

Le théorème suivant donne un procédé pour construire des équations (1), interpolatoires dans un intervalle de longueur supérieure à un nombre donné d'avance.

THÉORÈME 3. Si l'on donne un nombre positif arbitraire N , on peut construire une équation (1), interpolatoire dans un intervalle d'origine 0 et de longueur plus grande que N , de la manière suivante :

1. On choisit quatre nombres $l, \eta = \eta(N, l)$, $M_1 > 0$ et $M_2 > 0$, pour lesquels

$$(22) \quad l > N, p = \frac{M_2}{M_1} \leq \eta, N < \Phi(\eta) < l$$

avec $\Phi(p)$ définie en (4), où l'on remplace p par η .

2. On choisit un nombre L pour lequel

$$(23) \quad N < L < \Phi(\eta).$$

3. On choisit les coefficients $p_s(x)$ ($s = 1, 2$) de (1) tels que $\max_{x \in [0, l]} |p_s(x)| = M_s$ ($s = 1, 2$) (cf. (4)).

Dans ces conditions, l'équation (1) est interpolatoire dans l'intervalle $[0, L]$.

Démonstration. Si l'équation E construite de la sorte appartient à l'ensemble $H(l)$, alors (22), (23) et le théorème 1 donnent $N < L < \Phi(\eta) \leq \Phi(p) \leq h_E \leq l$. Conformément au théorème 2, l'équation E est interpolatoire dans l'intervalle $[0, \Phi(p))$, donc dans son sous-intervalle $[0, L]$ compris, comme l'intervalle $[0, \Phi(p))$, dans l'intervalle $[0, l]$. Si l'équation E n'appartient pas à la classe $H(l)$, alors si y_0 est une de ses solutions pour laquelle $y_0(0) = 0$, il résulte que $y_0(x)$ possède dans l'intervalle $[0, l]$

la seule racine $x = 0$ et si $y_1(x)$ est une de ses solutions pour laquelle $y_1(0) \neq 0$, donc linéairement indépendante de $y_0(x)$, il résulte que $y_1(x)$ possède dans l'intervalle $[0, l]$ au plus une racine, parce que au cas contraire, conformément au théorème de STURM, $y_0(x)$ posséderait dans l'intervalle (ouvert) $(0, l)$ au moins une racine, contre l'hypothèse que l'équation E n'appartient pas à la classe $H(l)$. Par conséquent, aucune solution (non identiquement nulle) de l'équation E ne possède dans l'intervalle $[0, l]$ plus d'une racine, ce qui conformément à un résultat de DE LA VALLÉE-POUSSIN utilisé auparavant signifie que l'intervalle $[0, l]$ est un intervalle d'interpolation pour l'équation E . L'intervalle $[0, L]$ étant, selon (22) et (23) un sous intervalle de $[0, l]$ il est un intervalle d'interpolation pour l'équation E , ce qui démontre le théorème.

Remarque 1. L'intervalle $[0, h_E)$ est un intervalle maximal d'interpolation (à l'origine dans l'origine des axes) de l'équation E , parce que dans l'intervalle $[0, h_E]$, toute solution de l'équation E qui s'annule pour $x = 0$ possède les racines $x = 0$ et $x = h_E$. D'autre part, l'intervalle $[0, h_E)$, est un intervalle d'interpolation pour l'équation E (cf. démonstration du théorème 2). L'intervalle $[0, h_E]$ n'ayant pas cette propriété, l'affirmation de la remarque est prouvée.

Remarque 2. Toute solution de l'équation (1) construite par le procédé du théorème 3 possède au plus une racine dans l'intervalle $[0, N]$.

4. Dans la littérature de spécialité sont indiquées différentes paires (a_1, a_2) , appartenant à l'ensemble $\mathcal{A}$. Ainsi, sans parler de la paire $(1, \frac{1}{2})$, donnée par DE LA VALLÉE-POUSSIN (cf. lemme 1), HARTMAN et WINTNER ont donné la paire $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$ ([3]) et OPJAL la paire $(\frac{2}{\pi^2}, \frac{1}{\pi^2})$ ([4]). Pour de telles paires (a_1, a_2) de $\mathcal{A}$, (7) donne

$$(24) \quad h_E \geq \frac{2}{M_1(a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2p})}$$

ce qui avec la remarque 1, donne le

THÉORÈME 4. L'intervalle $[0, F(p))$, avec

$$(25) \quad F(p) = \frac{2}{M_1(a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2p})}$$

et $(a_1, a_2) \in \mathcal{A}$ est un intervalle d'interpolation pour l'équation E de H .

Dans cet ordre d'idées, nous présentons en conclusion de ce travail le théorème suivant, qui compare les longueurs des intervalles d'interpolation $[0, \Phi(p))$ et $[0, F(p))$ donnés pour l'équation E de H respectivement par les théorèmes 2 et 4. Ce théorème évalue la différence

$$(26) \quad G(p) = \Phi(p) - F(p)$$

THÉORÈME 5. Si la paire (a_1, a_2) de $\mathcal{A}$ remplit la condition

$$(27) \quad a_1 \geq 2a_2$$

alors la fonction $G(p)$ de (26), qui est une fonction continue dans l'intervalle $(0, \infty)$ de la variable p (selon le théorème 1 et (25)), décroît de manière monotone de ∞ à 0, lorsque p croît de 0 à ∞ .

Démonstration. Selon (26) et (4)

$$(28) \quad G(p) = \begin{cases} G_1(p) = \Phi_1(p) - F(p) & \text{pour } 0 < p < \frac{1}{4} \\ \frac{2}{M_1} \left(2 - \frac{1}{a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2}} \right) & \text{pour } p = \frac{1}{4} \\ G_2(p) = \Phi_2(p) - F(p) & \text{pour } p > \frac{1}{4} \end{cases}$$

avec $\Phi_1(p)$ et $\Phi_2(p)$ données respectivement par (15) et (17). Si $0 < p < \frac{1}{4}$, (18) et (25) donnent

$$(29) \quad H_1(p) = \frac{M_1}{2} (1 - 4p) \sqrt{1 - 4p} G'_1(p) = -\frac{\sqrt{1-4p}}{p} + 2 \log \frac{1-2p+\sqrt{1-4p}}{2p} + \frac{2}{\sqrt{a_2}} \cdot \frac{(1-4p)\sqrt{1-4p}}{\sqrt{A+4p}(\sqrt{A}+\sqrt{A+4p})^2},$$

où il a été écrit pour la commodité

$$(30) \quad A = \frac{a_1^2}{a_2}.$$

Par conséquent

$$(31) \quad K_1(p) = \frac{p^2 H'_1(p)}{\sqrt{1-4p}} = 1 - \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{a_2}} + \frac{1}{2\sqrt{a_2}} \left(\frac{\sqrt{A}}{p} - \frac{A^2 + A(6-A)p + 6(1-A)p^2}{p(A+4p)\sqrt{A+4p}} \right)$$

donc

$$(32) \quad L_1(p) = p^2 K'_1(p) = \frac{1}{2\sqrt{a_2}} \left[-\sqrt{A} + \frac{A^2 + 10A^2p + 30Ap^2 + 12(1-A)p^3}{(A+4p)^2\sqrt{A+4p}} \right],$$

de sorte que

$$(33) \quad L'_1(p) = \frac{6}{\sqrt{a_2}} p^2 \cdot \frac{-A(2+3A) + 2(1-A)p}{(A+4p)^2\sqrt{A+4p}}.$$

Si l'on désigne par (C_4) , respectivement (C_5) , la branche (située dans le premier quadrant des axes Oa_1a_2) de la parabole d'équation $a_2 = 6a_1^2$, respectivement de la droite d'équation $a_2 = \frac{a_1}{2}$, alors l'on déduit sur la

fig. 2 que les points $P(a_1, a_2)$ de (D) qui remplissent la condition (27), donc situés sous (ou sur) (C_5) sont situés sous (C_4) , donc $a_2 < 6a_1^2$. En effet, au cas contraire nous aurions $a_1 \leq \frac{1}{12}$ et $a_2 \leq \frac{1}{24}$. Or, de tels points n'appartiennent pas au domaine parce que si $(a_1, a_2) \in (D)$ et $a_1 \leq \frac{1}{12}$, alors $a_2 > \frac{1}{8} > \frac{1}{24}$. La relation ci-dessus $a_2 < 6a_1^2$ donne en (30)

$$(34) \quad A > \frac{1}{6}.$$

Si $A \geq 1$ (33) donne $L'_1(p) \leq 0$ et si $A < 1$ alors $\text{sg} L'_1(p) = \text{sg}(p - p_0)$, avec

$$(35) \quad p_0 = p_0(A) = A \cdot \frac{2+3A}{2(1-A)}.$$

Or, $p - p_0 < \frac{1}{4} - p_0 = \frac{(1+A)(1-6A)}{4(1-A)}$, donc dans ce cas aussi $L'_1(p) \leq 0$.

Par conséquent, $L_1(p) \leq L_1(0) = 0$, $K'_1(p) \leq 0$ et en (31)

$$(36) \quad K_1(p) \geq K_1\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{3}{4\sqrt{a_2}} N_1(A),$$

où $N_1(A) = \frac{1}{\sqrt{1+A}(\sqrt{A}+\sqrt{1+A})^2}$, de sorte que (34) donne $K_1\left(\frac{1}{4}\right) \geq 1 - \frac{3}{4\sqrt{a_2}} N_1\left(\frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{4-\sqrt{7}}{2} \sqrt{\frac{3}{14a_2}} \geq 1 - \frac{\pi}{2} (4-\sqrt{7}) \sqrt{\frac{3}{14}}$ (du fait que si $(a_1, a_2) \in \mathcal{A}$, alors $a_2 \geq \frac{1}{\pi^2}$). Mais $1 - \frac{\pi}{2} (4-\sqrt{7}) \sqrt{\frac{3}{14}} > 0$ parce que l'inégalité s'écrit $\pi = 3, 14 \dots < \frac{2}{27} (\bar{7}\sqrt{6} + 4\sqrt{42}) = 3,19 \dots$

Par conséquent

$$(37) \quad K_1\left(\frac{1}{4}\right) > 0$$

auquel cas (36) donne $K_1(p) > 0$ et (31) $H'_1(p) > 0$, de sorte que en (29) $H_1(p) < H_1\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ et en (28)

$$(38) \quad G'_1(p) < 0 \left(p < \frac{1}{4} \right).$$

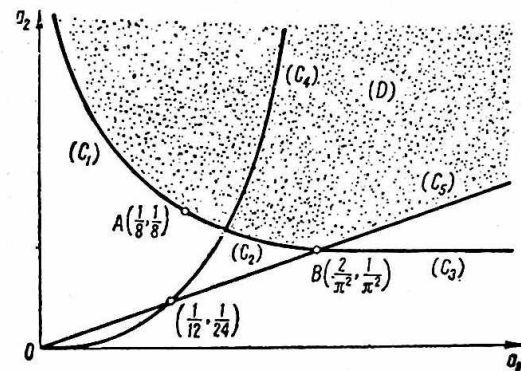


fig. 2

Si $p > \frac{1}{4}$, (19) et (25) donnent

$$(39) \quad H_2(p) = \frac{M_1}{2}(4p-1)\sqrt{4p-1}G'_2(p) = \\ = \frac{\sqrt{4p-1}}{p_1} - 2 \arccos\left(\frac{1}{2p} - 1\right) + \frac{2(4p-1)\sqrt{4p-1}}{\sqrt{a_2}\sqrt{A+4p}(\sqrt{A} + \sqrt{A+4p})^2},$$

de sorte que $K_2(p) = \frac{p^2}{\sqrt{4p-1}}H'_2(p) = -K_1(p)$ avec $K_1(p)$ donnée par (31).

Si donc nous écrivons $L_2(p) = p^2K'_2(p)$, alors

$$(40) \quad L_2(p) = -L_1(p) \quad \text{et} \quad L'_2(p) = -L'_1(p).$$

Par conséquent, si $A \geq 1$ (33) donne $L'_2(p) > 0$ donc

$$(41) \quad L_2(p) > L_2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{a_2}}\left[\sqrt{A} - \frac{3+24A+16A^2}{16(1+A)\sqrt{1+A}}\right] = \\ = \frac{1}{2\sqrt{a_2}} \cdot \frac{-9+112A+96A^2}{16(1+A)\sqrt{1+A}[3+24A+16A^2+16(1+A)\sqrt{A(1+A)}]}.$$

Conformément à (34), $L_2(p) > 0$, de sorte que $K'_2(p) > 0$, ce qui au cas où en (27) $a_1 > 2a_2$ donne le tableau 10.

Tableau 10

p	$\frac{1}{4}$	p_1	∞
$K_2(p)$	$K_2\left(\frac{1}{4}\right) < 0 \nearrow$	$0 \nearrow$	$K_2(\infty) > 0$
$H'_2(p)$	$-$	0	$+$
$H_2(p)$	$0 \searrow$	$H_2(p_1) \nearrow$	$-2\left(\pi - \frac{1}{\sqrt{a_2}}\right) \leq 0$

où $K_2\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ (cf. (37)) et $K_2(\infty) = -1 + \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{a_2}} = -1 + \frac{a_1}{2a_2} > 0$. Si en (27) $a_1 = 2a_2$, alors $K_2(p) < K_2(\infty) = 0$, donc $H'_2(p) < 0$ et

$$(41_1) \quad H_2(p) < H_2\left(\frac{1}{4}\right) = 0.$$

$$(42) \quad p'_0(A) = \frac{2+6A-3A^2}{2(1-A)^2} > 0.$$

Il reste à examiner le cas $A < 1$. En ce cas (35) donne la relation (42), de sorte que si A croît de $\frac{1}{6}$ à 1, $p_0(A)$ croît de $\frac{1}{4}$ à ∞ , ce qui

donne le tableau 11. Les tableaux, 10, 11 et la relation (41₁) donnent en (39) $G'_2(p) < 0$ ce qui, avec (38) et le théorème 1, atteste qu'alors que p croît de 0 à ∞ , $G(p)$ de (28) décroît de ∞ à 0 et démontre le théorème.*

Remarque 3. La question suivante présenterait peut-être un certain intérêt: le théorème 5 est-il valable sans la restriction (27)? La restriction respective a été faite pour la simplicité de la démonstration. L'absence de la restriction entraîne de sérieuses difficultés techniques dans l'étude

Tableau 11

p	$\frac{1}{4}$	p_0	p_1	p_2	∞
$L'_2(p)$	$+$	0	$-$		
$L_2(p)$	$L_2\left(\frac{1}{4}\right) > 0 \nearrow$	$L_2(p_0) \searrow$		$0 \searrow$	$-\infty$
$K'_2(p)$		$+$		0	$-$
$K_2(p)$	$-K_1\left(\frac{1}{4}\right) < 0 \nearrow$		$0 \nearrow$	$K_2(p_2) \searrow$	$-1 + \frac{a_1}{2a_2} \geq 0$
$H'_2(p)$	$-$		0	$+$	
$H_2(p)$	$0 \searrow$		$H_2(p_1) \nearrow$		$-2\left(\pi - \frac{1}{\sqrt{a_2}}\right) \leq 0$

de l'allure de la fonction $G(p)$ de (26), tout au moins avec la méthode employée pour démontrer le théorème 5. Nous mentionnons, pour spécifier, trois des difficultés, surgies au cas $a_1 < 2a_2$.

1°. Si en (30) $A < \frac{-14+5\sqrt{10}}{24} < \frac{1}{6}$, alors en (35) $p_0 < \frac{1}{4}$ (tableau 14),

de sorte qu'au cas $p < \frac{1}{4}$ la relation $L'_1(p) \leq 0$ est remplacée par le tableau 12, où (40) et (41) donnent $L_1\left(\frac{1}{4}\right) > 0$. Il en résulte le tableau 13, qui

au cas où $K_1\left(\frac{1}{4}\right) > 0$ (ce qui peut avoir lieu si $A > 0$ est assez proche de 0, parce que la démonstration de la relation (37) atteste que si $A = 0$ et a_2 assez grand, alors $K_1\left(\frac{1}{4}\right) > 0$), exige l'étude du signe du nombre $K_1(p_2)$, où p_2 est la racine positive de la fonction $L_1(p)$, c'est-à-dire du

* Si l'équation $E \in H(l)$ alors les théorèmes 1 et 5 donnent $[0, F(p)) \subset [0, \Phi(p)) \subseteq [0, h_E] \subset [0, l]$. Si $E \notin H(l)$, alors E est interp. dans $[0, l]$ (dém. du th. 3).

Tableau 12

p	0	p_0	p_2	$\frac{1}{4}$
$L_1'(p)$	-	0	+	
$L_1(p)$	0	$\searrow L_1(p_0) \nearrow 0 \nearrow L_1\left(\frac{1}{4}\right)$		

Tableau 13

p	0	p_2	$\frac{1}{4}$
$L_1(p)$	-	0	+
$K_1'(p)$	-	0	+
$K_1(p)$	1	$\searrow K_1(p_2) \nearrow K_1\left(\frac{1}{4}\right)$	

polynome $P(p) = 36(1-A)^2 p^3 - 4A(19+45A)p^2 - 5A^2(7+12A)p - 2A^3(2+3A)$. Au cas où $K_1(p_2) < 0$, le tableau 13 donne le tableau 15, qui exige l'étude du signe du nombre $H_1(p_1)$, où p_1 est la plus petite

Tableau 15

p	0	p_1	p_2	p_3	$\frac{1}{4}$
$K_1(p)$	1	$\searrow 0 \searrow K_1(p_2) \nearrow 0 \nearrow K_1\left(\frac{1}{4}\right)$			
$H_1'(p)$	+	0	-	0	+
$H_1(p)$	$-\infty \nearrow H_1(p_1) \searrow$		$H_1(p_3) \nearrow 0$		

racine positive de la fonction $K_1(p)$ de (31). Si $H_1(p_1) > 0$, alors le théorème 5 n'a pas lieu. La situation ci-dessus se présente, comme spécifié, dans l'hypothèse

$$A < \frac{-14 + 5\sqrt{10}}{24}, K_1(p_2) < 0, K_1\left(\frac{1}{4}\right) > 0 \text{ et } H_1(p_1) > 0.$$

Ceci exige d'examiner si cette hypothèse est ou non possible 2°. Toujours dans l'hypothèse $A < \frac{-14 + 5\sqrt{10}}{24}$, mais en supposant au tableau 13 $K_1\left(\frac{1}{4}\right) < 0$, ce tableau donne le tableau 16, qui infirme le théorème 5. Ceci exige d'examiner si l'hypothèse

$$A < \frac{-14 + 5\sqrt{10}}{24} \text{ et } K_1\left(\frac{1}{4}\right) < 0$$

est ou non possible pour $(a_1, a_2) \in \mathcal{A}$.

3°. Dans l'hypothèse $A > \frac{1}{6}$ et $K_2(p_2) > 0$, la section du tableau 11 concernant $K_2(p)$, $H_2'(p)$ et $H_2(p)$ avec $p > p_2$ se remplace par le tableau 17 qui exige l'étude du signe du nombre $H_2(p_1)$, où p_1 est la racine de la

Tableau 16

p	0	p_4	p_1	p_2	$\frac{1}{4}$
$K_1'(p)$		-		0	+
$K_1(p)$	1	$\searrow$	0	$\searrow K_1(p_2) \nearrow K_1\left(\frac{1}{4}\right) < 0$	
$H_1'(p)$		+	0	-	
$H_1(p)$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow$	$H_1(p_1) \searrow$			0

Tableau 17

p	p_2	p_1	∞
$K_2(p)$	$K_2(p_2) \searrow$	0	$\searrow -1 + \frac{a_1}{2a_2} < 0$
$H_2'(p)$	+	0	-
$H_2(p)$	$H_2(p_2) \nearrow$	$H_2(p_1) \searrow$	$-2\left(\pi - \frac{1}{\sqrt{a_2}}\right) \leq 0.$

fonction $K_1(p)$. Si $H_2(p_1) > 0$, alors le théorème 5 n'a pas lieu. Ceci exige d'examiner si l'hypothèse $A > \frac{1}{6}$, $K_2(p_2) > 0$ et $H_2(p_1) > 0$ est ou non possible.

Remarque 4. La remarque 3 ne présente qu'un intérêt concernant l'allure de la fonction $G(p)$ de (26), parceque toutes les paires de la littérature de spécialité citées dans la remarque 2 remplissent la condition (27), de sorte que pour elles le théorème 5 est valable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] De la Vallée-Poussin, Ch., Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre, Journal de mathématiques pures et appliquées 10, 125-144, (1929).
- [2] Ripeanu, D., Un problème d'interpolation dans la théorie des équations différentielles linéaires, Mathematica, 7(30), 71-127, (1965).
- [3] Hartman Ph., et A. Wintner, On oscillation criterium of de La Vallée-Poussin, Quarterly of applied Mathematics, 13, 330-332, (1955).
- [4] Opial, Z., Sur une inégalité de Ch. de la Vallée-Poussin dans la théorie de l'équation différentielle linéaire du second ordre, Annales Polonici Mathematici, 16, 87-91, (1959).

Reçu le 10. VI. 1977