

UN SCHÉMA UNITAIRE POUR LE TRAITEMENT DE DIVERS OPÉRATEURS REMARQUABLES DE L'ANALYSE

par

PAUL NEY

à Cluj

1. Introduction

Le présent article comprend les résultats de l'auteur concernant ses recherches¹ portant sur la formalisation et la généralisation de quelques aspects de la théorie de l'intégrale.

1. *Fonctionnelles classiques.* Soit S un ensemble quelconque X et Y deux groupes topologiques (éventuellement deux espaces vectoriels topologiques), $\mathcal{L} \subset X^S$ et I une application de $\mathcal{L}$ dans Y . Un grand nombre de fonctionnelles classiques — en particulier, d'intégrales — peuvent être exprimées à l'aide des éléments suivants :

- des fonctions $f_i \in \mathcal{L}$ ($i = 1, 2, \dots, m$),
- des sous-familles $\pi_i \subset \mathcal{L}(s)$ ($j = 1, 2, \dots, n$), on considère
- une relation m -aire, $\mathcal{F}$, dans $\mathcal{L}$
- une relation n -aire, Π , dans $\mathcal{L}(S)$;

on introduit une fonction Φ qui applique le produit cartésien $\mathcal{F} \times \Pi$ dans Y , et on définit un passage à la limite, dans Π . Ce passage à la limite — que l'on désignera par $\lim_{\Pi}$ peut être conçu de différentes manières (soit en définissant des suites convergentes, soit en organisant Π comme un ensemble dirigé, etc.). On écrira ensuite

$$(1) \quad I(f_1, \dots, f_m) = \lim_{\Pi} \Phi(f_1, \dots, f_m, \pi_1, \dots, \pi_n).$$

¹ Ces recherches sont comprises — en essence — dans le travail de diplôme de l'auteur, et partiellement elles ont été communiquées à des sessions scientifiques, notamment à Cluj (1968, 1969) Timișoara (1969) București (1971).

Ainsi, dans le cas des intégrales, on prend, d'habitude, pour Π , un système de partitions de S , et le passage, à la limite est conçu à l'aide d'un raffinement indéfini de la partition. Cette formulation, d'un caractère assez large, nous permettra le traitement des aspects, de la théorie de l'intégrale, d'une façon bien générale, et axiomatique.

Tout d'abord, on donne des *exemples de fonctionnelles classiques*, qui peuvent être exprimées conformément à (I), en choisissant convenablement les ensembles $\mathcal{F}$ et Π ainsi que le passage à la limite $\lim_{\Pi}$. Dans ce but on introduira quelques notations. Soit $[u, v] \subset \mathbb{R}$ et considérons l'ensemble

$$S = \{s | s = (x_i)_1^n, x_i \in [u, v], x_{i-1} < x_i (i = 2, \dots, n); 2 \leq n \in \mathbb{N}\}$$

où on désigne par

$|s|$, le maximum de l'ensemble $\{(x_i - x_{i-1})\}_{i=2}^n$

$\bar{s}$, le nombre des points de s

$[s]$, l'intervalle fermé $[x_1, x_n]$

$\lambda(s)$, la longueur $x_n - x_1$, de $[s]$.

Considérons un ensemble dénombrable de suites $(s_k)_1^\infty \subset S$ avec $\bar{s}_k = n$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$, donc $s_k = (x_i^{(k)})_{i=1}^n$ pour $k \in \mathbb{N}$. Nous poserons encore $s = (x_i)_1^n$ et nous désignerons par $s_k \rightarrow s$ le fait que pour chaque $i = 1, \dots, n$ on a lieu $x_i^{(k)} \rightarrow x_i (k \rightarrow \infty)$. On va considérer aussi des suites $(s_j)_1^\infty$ tel les qu'on ait $\lambda(s_j) \rightarrow 0$, on bien $|s_j| \rightarrow 0$, si $j \rightarrow \infty$.

Exemple A. La somme-intégrale „Riemann-Stieltjes”. (Pour des détails, voir [4].) On prendra $\mathcal{F} = \{(f, g) | f, g \in \mathbb{R}^{[u, v]}\}$ et

$$\Pi = \{(s_1, s_2, s_3) = ((x_i)_1^m, (y_i)_1^n, (z_i)_1^p) | s_1, s_2, s_3 \in \mathcal{S}, \bar{s}_1 = m = 2,$$

$$[s_1] = [s_2], \bar{s}_2 = \bar{s}_3 + 1, y_i \leq z_i \leq y_{i+1} (i = 1, \dots, n-1)\}.$$

On définit sur $\mathcal{F} \times \Pi$ la fonctionnelle S , de la façon suivante:

$$S(f_1, f_2, s_1, s_2, s_3) = \sum_{i=1}^{n-1} f_1(z_i) [f_2(y_{i+1}) - f_2(y_i)],$$

S étant la somme-intégrale „Riemann-Stieltjes”.

Moyennant ce mode de présentation, on peut obtenir maintes propriétés classiques de l'intégrale Riemann-Stieltjes, en partant directement des sommes-intégrales. Ainsi:

f_1 est (RS) — intégrable par rapport à f_2 sur l'intervalle compact $[s_1]$ s'il existe un nombre réel I , (qui sera désigné par la suite par $\int_{[s_1]} f_1(t) df_2(t)$).

de telle façon que pour chaque suite de la forme $(s_1, s_2^{(k)}, s_3^{(k)})_{k=1}^\infty \subset \Pi$ et avec $|s_2^{(k)}| \rightarrow 0$ on ait

$$S(f_1, f_2, s_1, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}) \rightarrow I.$$

À chaque intervalle compact $[s_1] \subset [u, v]$ on associe un passage à la limite on utilisant les suites du type $(s_1, s_2^{(k)}, s_3^{(k)})_{k=1}^\infty$ avec $|s_2^{(k)}| \rightarrow 0$. Ces passages à la limite peuvent être considérés comme des cas particuliers du passage à la limite général, déterminé par les suites

$$(s_1^{(l)}, s_2^{(k, l)}, s_3^{(k, l)})_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ l \in \mathbb{N}}} \subset \Pi$$

$$\text{où } s_1^{(l)} \rightarrow s_1 (l \rightarrow \infty) \text{ et } |s_2^{(k, l)}| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty, l \text{ fixé}).$$

En effet, donnons à l'une valeur fixe quelconque l_0 , la suite précédente des triplets dépendante de k et l , prendra la forme plus simple — dépendante seulement de k — utilisée ci-dessus pour arriver à la limite I .

On peut considérer dans $\mathcal{F}$ des convergences usuelles, comme par exemple: la convergence ponctuelle, la convergence uniforme (on bien d'autres types). Pour le cas de la convergence uniforme nous énoncerons la

Propriété 1. Soit $(f, g) \in \mathcal{F}$, $(f_n, g_m)_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ m \in \mathbb{N}}} \subset \mathcal{F}$ et $(s_1^{(l)}, s_2^{(k, l)}, s_3^{(k, l)})$ tel que $s_1^{(l)} \rightarrow s_1$, $|s_2^{(k, l)}| \rightarrow 0 (l \text{ fixé})$. Si

$$1^\circ \text{ existe } I = \int_{[s_1]} f(t) dg(t)$$

$$2^\circ f_n \rightrightarrows f, g_m \rightrightarrows g$$

$$3^\circ g \text{ est monotone sur } [u, v] \text{ et continue au points de } s_1$$

$$4^\circ f \text{ est bornée sur } [u, v]$$

alors

$$\lim_{n, m, k, l \rightarrow \infty} S(f_n, g_m, s_1^{(l)}, s_2^{(k, l)}, s_3^{(k, l)}) = I.$$

Si $s_1^{(l)} = s_1$ pour chaque l , alors la propriété est valable aussi sans la condition 3°.

(Pour la démonstration voir [4]).

Exemple B. La différence divisée de l'ordre n . (Pour des détails, voir [5].) On définit $\mathcal{F}$ par

$$\mathcal{F} = \{(f, g) | f, g \in \mathbb{R}^{[u, v]}, g \text{ ayant une inverse}\}$$

Pour chaque $t \in [u, v]$ on conçoit un ensemble du type Π , notamment

$$\Pi_t = \{s = (x_i)_0^n | s \in \mathcal{S} \text{ et } [s] \ni t; t \neq x_i (i = 0, \dots, n)\}.$$

On définit sur l'ensemble

$$\bigcup_{t \in [u, v]} (\mathcal{F} \times \Pi_t)$$

la fonctionnelle D , par induction

$$D(f, g, (x_i)_0^n) = \frac{D(f, g, (x_i)_1^n) - D(f, g, (x_i)_0^{n-1})}{g(x_n) - g(x_0)}$$

où

$$D(f, g, (x, y)) = \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} \quad (\forall x, y \in [u, v]).$$

Si pour chaque suite $(s^{(k)})_1^\infty$, pour laquelle on a $\lambda(s^{(k)})_1 \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) existe

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D(f, g, s^{(k)}),$$

alors cette limite sera nommée la n -ième dérivée directe généralisée de la fonction f par rapport à la fonction g , au point t , et elle pourra être désignée par $\mathfrak{D}^n(f/g)(t)$. On met en évidence la

Propriété 2. Si $(f_i, g_j)_{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{F}$ et $f_i \Rightarrow f$, $g_j \Rightarrow g$ où $(f, g) \in \mathfrak{F}$, et si pour la suite $(s^{(k)})_1^\infty$ on a $\lambda(s^{(k)}) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), alors

$$\lim_{i, j, k \rightarrow \infty} D(f_i, g_j, s^{(k)}) = \mathfrak{D}^n(f/g)(t)$$

si le membre droit de la dernière égalité existe.

(Pour la démonstration voir [5]).

2. Le schéma-opérateur. On introduit des espaces désignés par

$$(2) \quad (S, \mathfrak{L}, Y, I)$$

où S est un ensemble quelconque, Y un groupe topologique, X également un groupe topologique, à l'aide duquel on obtient $\mathfrak{L} \subset X^S$, et I une application de $\mathfrak{L}$ dans Y . Soumettant l'espace $(S, \mathfrak{L}, Y, I)$ à certaines conditions, on peut retrouver des résultats de la théorie de l'intégrale. Un exemple d'espace du type (2) est — par exemple — l'espace Daniell généralisé, introduit par Pellaumail, [6, 7], de la façon suivante : on prend pour S un ensemble quelconque, $X = \mathbb{R}$, Y un groupe topologique abélien séparable et complet, et on impose les conditions

$$(3) \quad \begin{cases} f, g \in \mathfrak{L} \Rightarrow (f \wedge g), (f - g) \in \mathfrak{L} \\ I(f - g) = I(f) - I(g) \\ f_n \downarrow 0 \Rightarrow I(f_n) \rightarrow 0 \end{cases}$$

Toute fois le cadre des espaces du type (2) n'est pas propice pour le traitement de certains problèmes de la théorie classique de l'intégrale, comme par exemple, l'approximation de la valeur $I(f)$ pour $f \in \mathfrak{L}$, ou bien quelques problèmes de passage à la limite concernant les sommes intégrales. Nous montrerons comment concevoir un cadre plus large, approprié au traitement de tels problèmes, et dont on peut obtenir aussi les espaces du type (2). Ainsi, étant donné un espace du type (2), $(S, \mathfrak{L}, Y, I)$ jouissant de certaines propriétés, on cherche un espace d'un nouveau type

$$(4) \quad (S, \mathfrak{F}, \Pi, Y, \Phi)$$

où : $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{F} \subset X^S$, $\Pi = \{\alpha\}$ étant un ensemble de paramètres doté d'un passage à la limite désigné par $\lim_\Pi$, et Φ une application de $\mathfrak{F} \times \Pi$ dans Y .

On demande, que par le passage à la limite portant sur Φ , l'espace désigné par

$$(S, \text{dom } \lim_\Pi \Phi, Y, \lim_\Pi \Phi)$$

soit identique à l'espace $(S, \mathfrak{L}, Y, I)$, du type (2) — (on mentionne que $\text{dom } \lim_\Pi \Phi$ signifie l'ensemble des fonctions telles que $f \in \mathfrak{F}$, pour lesquelles existe $\lim_\Pi \Phi(f, \alpha)$).

D'ailleurs, le système $(S, \mathfrak{F}, \Pi, Y, \Phi)$ doit être regardé comme un schéma-opérateur, qui permet la construction de divers opérateurs, en particulier ses éléments. Dans ce qui suit, on présente un certain schéma — opérateur, en étudiant celles de ses propriétés, qui peuvent être transmises à l'espace $(S, \text{dom } I, Y, I)$.

§2. Un schéma-opérateur

1. Forme générale. Soit $\mathfrak{F}$ un ensemble arbitraire (pas nécessairement un ensemble de fonctions), puis $(Y, +, \leq)$ un groupe totalement ordonné et σ — réticulé, Π un ensemble quelconque², et $\mathfrak{S}$ un ensemble totalement ordonné ayant θ comme élément minimal. Tous ces ensembles seront postulés infinis. On considère encore deux applications :

$\Phi : \mathfrak{F} \times \Pi \rightarrow Y$, et $\varphi : \Pi \rightarrow \mathfrak{S}$ (φ étant une surjection).
À l'ensemble Π^* ,

$$(5) \quad \Pi^* \subseteq \tilde{\Pi} = \{(\alpha_n) | \alpha_n \in \Pi \ (n \in \mathbb{N}), \varphi(\alpha_n) \rightarrow \theta\}$$

² Dans notre travail, on ne fera aucune hypothèse de structure sur l'ensemble Π . On mentionnera que dans [2] C. IONESCU-TULCEA suppose que Π est un groupode spécial soumis à des conditions de structure.

(où $\xrightarrow{0}$ symbolise la convergence au sens de l'ordre), on peut attacher un opérateur, I_{Π^*} , notamment

$$I_{\Pi^*} : \text{dom } I_{\Pi^*} \rightarrow Y$$

où

$$(6) \quad \begin{cases} \text{dom } I_{\Pi^*} = \{f \mid f \in \mathcal{F} \text{ et } \forall (\alpha_n) \in \Pi^*, \exists y \in Y \text{ (unique !)} \\ \text{tel que } \Phi(f, \alpha_n) \xrightarrow{0} y\} \\ \text{la valeur de } I_{\Pi^*} \text{ sur } f \in \text{dom } I_{\Pi^*} \text{ est } \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(f, \alpha_n) \end{cases}$$

2. *Cas Particuliers.* Nous présentons des exemples, pour appuyer notre affirmation, selon laquelle le schéma — opérateur, introduit auparavant, contient des intégrales ainsi que d'autres concepts de l'analyse, par exemple des procédés de quadrature, des dérivées, etc. Dans ce but on particularise les éléments du schéma

$$(7) \quad (\mathcal{F}, \Pi, Y, \Phi)$$

en précisant aussi la fonction φ et l'ensemble $\mathcal{S}$ mis en évidence au cadre du point 1 du § 2.

Exemple 1. Une intégrale Lebesgue rapportée à $(S, \mathcal{M}, \mu)$ où $\mathcal{M}$ est un „ σ -anneau” de parties de l'ensemble S , et μ une mesure positive définie sur $\mathcal{M}$. Soit $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^S$ l'ensemble des fonctions mesurables, $Y = \mathbb{R}$, $Z = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, puis désignant par σ et ξ des divisions habituelles sur $\mathbb{R}$, (séquences de noeuds), on pose

$$\Pi = \{(\sigma, \xi) \mid \sigma = (a_i), \xi = (b_i) \text{ et } a_{i-1} \leq b_i \leq a_i, i \in \mathbb{Z}\}$$

et $\varphi(\sigma, \xi) = |\sigma| = \sup (a_i - a_{i-1})$, enfin $\Phi(f, \sigma, \xi)$ sera la somme-intégrale

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} f(b_i) \cdot \mu\{s \mid a_{i-1} \leq f(s) < a_i\}.$$

On choisit $\Pi^* = \tilde{\Pi}$: alors, dans l'espace $(S, \text{dom } I, \mathbb{R}, I)$

$$I(f) = \lim_{|\sigma| \rightarrow 0} \Phi(f, \sigma, \xi)$$

représente l'intégrale de Lebesgue

$$(L) \int_S f(x) \mu(dx).$$

Exemple 2. L'intégrale Riemann-Stieltjes. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F} = \{(f, g) \mid f, g \in \mathbb{R}^{[a, b]}\}, Z = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, Y = \mathbb{R},$$

$$\Pi = \{(\sigma, \xi) \mid \sigma = (x_i)_0^n, \xi = (\xi_i)_1^n, x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i (i = 1, \dots, n); \\ x_0 = a, x_n = b, (n \in \mathbb{N})\}$$

$\varphi(\sigma, \xi) = |\sigma| = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1})$, et $\Phi(f, g, \sigma, \xi)$ signifie la somme-intégrale Riemann-Stieltjes

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) [g(x_i) - g(x_{i-1})].$$

On choisit $\Pi^* = \tilde{\Pi}$: alors, dans l'espace $([a, b], \text{dom } I, \mathbb{R}, I)$

$$I = \lim_{|\sigma| \rightarrow 0} \Phi(f, g, \sigma, \xi)$$

représente l'intégrale de Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b f(x) dg(x).$$

Exemple 3. L'intégrale de Burkill. Soit $I[a, b]$ l'ensemble des sous-intervalles de $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathbb{R}^{I[a, b]}$, $Y = \mathbb{R}$,

$$\Pi = \{\sigma \mid \sigma = (x_i)_0^n, x_i \in [a, b]; x_0 = a, x_n = b (n \in \mathbb{N}),$$

$\varphi(\sigma) = |\sigma| = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1})$, $\Pi^* = \tilde{\Pi}$ enfin $\Phi(f, \sigma)$ sera la somme

$$\sum_{i=1}^n f([x_{i-1}, x_i]).$$

Dans l'espace $(I[a, b], \text{dom } I, \mathbb{R}, I)$, l'ensemble $\text{dom } I$ sera celui des fonctions d'intervalle intégrables au sens de BURKILL, [13], et I sera l'intégrale de Burkill de la fonction f ,

$$I = \int_a^b f(dx).$$

Exemple 4. Une formule de quadrature (Simpson). Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

$$Y = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathbb{R}^{[a, b]}, Z = \left\{0, b-a, \frac{b-a}{2}, \dots, \frac{b-a}{2^k}, \dots\right\}$$

$$\Pi = \{\sigma | \sigma = (x_i), x_i = a + i \frac{b-a}{n} \ (i=0, 1, \dots, n), n=2^k, k=0, 1, \dots\},$$

$$\varphi(\sigma) = |\sigma| = \frac{b-a}{2^k}, \Pi^* = \tilde{\Pi} \text{ et alors } \Phi(f, \sigma) \text{ sera la somme}$$

$$\frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^n [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]$$

qui figure dans la formule de quadrature de Simpson. Dans l'espace $([a, b], \text{dom } I, \mathbb{R}, I)$, dom I sera l'ensemble des fonctions pour lesquelles ce procédé de quadrature converge.

Remarque. Dans le schéma (7) peuvent être incluses aussi d'autres intégrales, par exemple celle de RUSSEL [12], de RADON [13], celle étudiée par M. RĂDULESCU [10], etc., ainsi que des procédés d'intégration numérique basés sur les formules du trapèze, de Newton, de Cotes, etc.,

Exemple 5. La n -ième dérivée directe. Soit $[a, b] \cup \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \{(f, g) | f, g \in \mathbb{R}^{[a, b]}, g \text{ univalente}\}, Z_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \Pi = \{\sigma | \sigma = (x_i)_n, x_i \in [a, b], t \in]x_0, x_n] \text{ mais } t \neq x_i\} \varphi(\sigma) = x_n - x_0$. Si on prend $\Pi^* = \tilde{\Pi}$, alors $\Phi(f, g, \sigma)$ signifie la différence divisée de la fonction f par rapport à la fonction g sur les points σ . Alors, dans l'espace désigné par $([a, b], \text{dom } I, \mathbb{R}, I)$, l'ensemble dom I contiendra les couples (f, g) pour lesquels existe la n -ième dérivée directe de f par rapport à g , au point t , et $I = \lim_{\varphi(\sigma) \rightarrow 0} \Phi(f, g, \sigma)$ sera cette dérivée.

§3. Quelques propriétés du schéma-opérateur

Dans ce paragraphe on restreindra l'étude du schéma-opérateur aux propriétés concernant l'intégrale, laissant de côté pour le moment les propriétés qui visent les autres concepts inclus dans ce schéma.

1. Soit I l'opérateur attaché à la famille Π^* de suites et soit dom I le domaine de I (voir le point 1 du § 2). On a la

Proposition 1. Si l'ensemble Π^* est fermé par rapport à l'opération de l'intercalation des suites, alors les affirmations suivantes seront équivalentes:

a) $f \in \text{dom } I$

b) pour chaque $(\alpha) \in \Pi^*$, $\Phi(f, \alpha)$ est une suite Cauchy.

Démonstration. On entend par „opération d'intercalation”, celle qui attache au couple de suites (α_i) et (β_i) la suite $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots)$. Supposons $f \in \text{dom } I$; puisque $\lim \Phi(f, \alpha_i) = I(f)$, il résulte que $\Phi(f, \alpha_i)$ est une suite Cauchy. Inversement, supposons qu'il existe deux suites $(\alpha_i), (\beta_i) \in \Pi^*$ telles, qu'on ait

$$\lim \Phi(f, \alpha_i) \neq \lim \Phi(f, \beta_i)$$

Par hypothèse la suite $(\gamma_i) = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots) \in \Pi^*$ donc $\lim \Phi(f, \gamma_i)$ existe, contrairement au fait que $\Phi(f, \gamma_i)$ a deux suites partielles à limites distinctes.

Note. Dans ce qui suit, on utilisera seulement des ensembles Π^* , qui sont fermés par rapport à l'opération de l'intercalation définie plus haut.

Proposition 2. Soit $(F, +, \leq)$ un groupe partiellement ordonné, et $\Phi: F \times \Pi \rightarrow Y$ tel que pour chaque $\alpha \in \Pi$ (mais fixée) on ait

$$(8) \quad \begin{cases} f, g \in F \rightarrow \Phi(f+g, \alpha) = \Phi(f, \alpha) + \Phi(g, \alpha) \\ f \leq g \Rightarrow \Phi(f, \alpha) \leq \Phi(g, \alpha) \end{cases}$$

Dans ces conditions et si $I(f), I(g)$ existent, on aura:

$$(9) \quad \begin{cases} a) & I(f+g) = I(f) + I(g) \\ b) & f \leq g \Rightarrow I(f) \leq I(g) \end{cases}$$

Démonstration. La démonstration résulte du fait que le passage à la limite n'altère pas les propriétés (8) de Φ .

Dans ce qui suit on introduira pour I des opérateurs qui jouent le même rôle que les intégrales de Darboux, pour l'intégrale de Riemann. Soit

$$(10) \quad \begin{aligned} \overline{\Phi}(f, \alpha) &= \sup \{\Phi(f, \beta) | \varphi(\alpha) = \varphi(\beta)\} \\ \underline{\Phi}(f, \alpha) &= \inf \{\Phi(f, \beta) | \varphi(\alpha) = \varphi(\beta)\} \end{aligned}$$

On écrira

$$(11) \quad \overline{I}(f) = \lim_{\varphi(\alpha) \rightarrow 0} \overline{\Phi}(f, \alpha) \quad \text{et} \quad \underline{I}(f) = \lim_{\varphi(\alpha) \rightarrow 0} \underline{\Phi}(f, \alpha).$$

Proposition 3. Dans les notations (10) et (11), on a

$$(12) \quad \begin{aligned} & a) \quad \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \quad (\forall f \in \mathcal{F}) \\ & b) \quad \underline{I}(f) = \bar{I}(f) \Leftrightarrow f \in \text{dom } I \text{ et } I(f) = \underline{I}(f) = \bar{I}(f). \end{aligned}$$

Démonstration. (12-a) résulte du fait que $\underline{\Phi}(f, \alpha) \leq \bar{\Phi}(f, \alpha)$, quel que soient f et α . En ce qui concerne (12-b), l'égalité $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$ signifie que

$$\lim_{\varphi(\alpha) \rightarrow 0} [\bar{\Phi}(f, \alpha) - \underline{\Phi}(f, \alpha)] = 0$$

donc $\lim_{\varphi(\alpha) \rightarrow 0} \Phi(f, \alpha) = I(f)$ car $\underline{\Phi}(f, \alpha) \leq \Phi(f, \alpha) \leq \bar{\Phi}(f, \alpha)$. Inversement si $f \in \text{dom } I$, on peut montrer que l'inégalité $\underline{I}(f) \neq \bar{I}(f)$ nous mène à une contradiction. En effet, considérons, d'abord,

$$\frac{1}{2} [\underline{I}(f) + \bar{I}(f)] \leq I(f) < \bar{I}(f)$$

et écrivons $y = \bar{I}(f) - \underline{I}(f)$, puis prenons $\varepsilon \in Y$ avec $0 < \varepsilon < y$. Considérons encore la suite $(\alpha_i) \in \Pi^*$. Conformément à la définition de $\Phi(f, \alpha)$, pour chaque α_i , il existe β_i tel que $\varphi(\beta_i) = \varphi(\alpha_i)$ et qu'on ait

$$|\bar{\Phi}(f, \alpha_i) - \Phi(f, \beta_i)| < \varepsilon.$$

D'autre part, $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(\beta_i) = 0$, donc il existe $\lim_{i \rightarrow \infty} \Phi(f, \beta_i)$ et on a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |\Phi(f, \beta_i) - \bar{I}(f)| < \varepsilon$$

Ainsi on a montré que $\lim_{i \rightarrow \infty} \Phi(f, \beta_i) \neq I(f)$ [ce qui est en contradiction avec $f \in \text{dom } I$]. Les cas $\underline{I}(f) < I(f) < \frac{1}{2} [\underline{I}(f) + \bar{I}(f)]$ se traite bienfait que d'une façon similaire. ■

2. La comparaison des schémas-opérateurs. En général, si M et N sont deux ensembles non-vides quelconques et A_1, A_2 deux applications de M à N , on dit que A_1 est plus générale que A_2 si on a

$$(13) \quad \begin{cases} \text{dom } A_1 \supset \text{dom } A_2, \text{ et} \\ m \in \text{dom } A_2 \Rightarrow A_1(m) = A_2(m) \end{cases}$$

On écrit dans ce cas $A_1 > A_2$ et on dit aussi que A_1 est une extension de A_2 .

Considérons l'ensemble $\mathcal{J} = \{I_{\Pi^*} | \Pi^* \subseteq \tilde{\Pi}\}$ des opérateurs du type I_{Π^*} qu'on obtient respectivement à partir de la famille de suites Π^* , pour chaque $\Pi^* \subseteq \tilde{\Pi}$, conformément au point 1 du §2. Nous allons étudier l'ensemble $\mathcal{J}$, du point de vue de l'ordre (partiel) $>$, que nous venons d'introduire. (Les axiomes de l'ordre partiel se vérifient facilement).

Proposition 4. Soient Π_1^* et Π_2^* des sous-ensembles de $\tilde{\Pi}$ et $I_{\Pi_1^*}, I_{\Pi_2^*}$ les opérateurs qu'on leur attache respectivement. Alors, on a les implications:

$$\begin{cases} \Pi_1^* \subseteq \Pi_2^* \Rightarrow \text{dom } I_{\Pi_1^*} \subseteq \text{dom } I_{\Pi_2^*} \\ f \in \text{dom } I_{\Pi_1^*} \Rightarrow I_{\Pi_1^*}(f) = I_{\Pi_2^*}(f) \end{cases}$$

Démonstration. La démonstration s'ensuit en remarquant que l'inclusion $\Pi_1^* \subseteq \Pi_2^*$ signifie que $I_{\Pi_1^*}$ doit satisfaire encore de plus à des conditions que $I_{\Pi_2^*}$ ne remplit pas, notamment de converger également sur les suites de $\Pi_2^* \setminus \Pi_1^*$. ■

Proposition 5. Restreindre les ensembles Π et Z qui figurent dans le schéma-opérateur (définie au point 1 du §2) c'est-à-dire: considérer $\Pi_1 \subset \Pi$ et $Z_1 \subset Z$ équivaut à considérer un Π^* particulier, en conservant toutefois Π et Z . L'ensemble Π^* est donné par $\Pi^* = \tilde{\Pi}' \subset \tilde{\Pi}$

$$\text{où } \Pi' = \Pi_1 \setminus \bigcup \{\varphi^{-1}(z) | z \in Z \setminus Z_1\}$$

Démonstration. On vérifie facilement que Π^* ainsi construite est l'ensemble particulier dont il est question dans l'énoncé. ■

Proposition 6. Dans l'ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{J}, >)$ ont lieu les propriétés:

- a) l'opérateur $I_{\tilde{\Pi}}$ attaché à Π est l'élément minimal de $\mathcal{J}$,
- b) chaque opérateur de la forme $I_{(\alpha_i)}$, attaché à $(\alpha_i) \in \tilde{\Pi}$ est un élément maximal dans $\{I_{\Pi^*} | \Pi^* \in (\alpha_i)\}$.

Démonstration. On constate que pour chaque $\Pi^* \subset \Pi$, a lieu $I_{\Pi^*} > I_{\tilde{\Pi}}$. De même $I_{(\alpha_i)} > I_{\Pi^*}$ pour chaque Π^* , tel que $(\alpha_i) \in \Pi^*$. ■

Corollaire. Si on se place dans le cadre de l'exemple 2 du §2, et si Π^* parcourt l'ensemble $\mathfrak{A}(\tilde{\Pi})$, alors l'intégrale de Riemann-Stieltjes est l'élément minimal de l'ensemble $\mathcal{J} = \{I_{\Pi^*} | \Pi^* \subseteq \tilde{\Pi}\}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Gunther, N., Sur les intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problèmes de la physique mathématique. Trudi, fiz. mat. Inst. imeni N. A. Steklova II, (1931).
- [2] Ionescu-Tulcea, C. T., Integrale aditive. Com. Acad. R. P. Român N, 9-10, 471-478 (1954).
- [3] Natanson, I. P., Konstruktivnaia teoria funktsii. Gos. Izd. Moscou-Leningrad, 1949.
- [4] Ney, Paul, Proprietăți ale mulțimii sumelor integrale ale unei funcții reale de o variabilă reală. Bul. Sti. Stud. București, Ser. Științe Tehnice, 19-28 (1970).
- [5] — Funcționala „diferență divizată” Atheneum Bul. Ști. Stud. Cluj, ser. Șt. Naturale 27-32 (1970).
- [6] Pellaumail, Jean, Intégrale de Daniell à valeurs dans un groupe C. R. Acad. Sci. Paris, 271, A, 876-879 (1970).
- [7] — Integrale de Daniell à valeurs dans un groupe. Rev. Roum. Math. Pures Appl. 16, 122-1236 (1971).
- [8] Popoviciu, Tiberiu, Introduction à la théorie des différences divisées. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 42, 1, 65-78 (1941).
- [9] — Diferențe divizate și derivate. Șt. cerc. Mat. Cluj 11, 1, 119-145, (1960).
- [10] Rădulescu, Marcel, Teza de doctorat, Cluj, 1969.
- [11] Roussel, A., Sur certaines généralisations des opérations infinitésimales élémentaires. Acta Math. 53, 87-130, 1929.
- [12] Roussel, A. M., Functions of bounded second variation and Stieltjes type integral. J. London Math. Soc. 2, 2, 193-208 (1976).
- [13] Szökefalvy-Nagy, Béla, Valós függvények és függvény-sorok, Tankönyvkiadó, Budapest 1954.
- [14] Tolstov, G. P., Proizvodnaia i integral (axiomaticeskii podhod) Mat. Sbornik 66, 608-630, (1965).

Reçu, le 13. IV. 1974