SUR LES FORMULES GÉNÉRALISÉES DE G. DARBOUX, ET UN THÉORÈME SUR LES QUADRATURES MÉCANIQUES

PAR

D. V. IONESCO

PROFESSEUR À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLUJ-TIMIŞOARA

1. Dans une note précédente[1]) nous avons généralisé la formule

$$\int_{\lambda}^{\mu} \varphi(x)\,dx = \frac{\mu-\lambda}{6}\left[\varphi(\lambda) + 4\,\varphi\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right) + \varphi(\mu)\right] \tag{1}$$

rencontrée par G. DARBOUX[2]), qui est vérifiée par un polynôme quelconque du troisième degré, et nous avons trouvé les formules

$$\begin{aligned}
&\int_{\lambda}^{\mu} \varphi(x)\,dx = (\mu-\lambda)\sum_{s=0}^{p} a_s\left[\varphi\left(\lambda + s\frac{\mu-\lambda}{2p}\right) + \varphi\left(\mu - s\frac{\mu-\lambda}{2p}\right)\right]\\
&\int_{\lambda}^{\mu} \varphi(x)\,dx = (\mu-\lambda)\sum_{s=0}^{p} a'_s\left[\varphi\left(\lambda + s\frac{\mu-\lambda}{2p+1}\right) + \varphi\left(\mu - s\frac{\mu-\lambda}{2p+1}\right)\right]
\end{aligned} \tag{2}$$

où les constantes $a_0, a_1, \ldots, a_p$ sont données par le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned}
&a_p + a_{p-1} + a_{p-2} + \ldots + a_0 = \frac{1}{2}\\
&a_{p-1} + 2^2 a_{p-2} + \ldots + p^2 a_0 = \frac{p^2}{2\cdot 3}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{p-1} + 2^{2p} a_{p-2} + \ldots + p^{2p} a_0 = \frac{p^{2p}}{2(2p+1)}
\end{aligned} \tag{3}$$

---

[1]) D. V. IONESCO, *Généralisation d'une équation fonctionnelle rencontrée par* G. DARBOUX. Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine Nr. 3 1939.

[2]) G. DARBOUX: *Sur le centre de gravité de certains volumes.* Note publiée dans le cours de Mécanique de Despeyrous, p. 383.

et où les constantes $a'_0, a'_1, \ldots, a'_p$ sont données par les équations linéaires

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
&a'_p + a'_{p-1} + \ldots + a'_0 = \frac{1}{2}\\
&a'_p + 3^2 a'_{p-1} + \ldots + (2p+1)^2 a'_0 = \frac{(2p+1)^2}{2.3}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a'_p + 3^{2p} a'_{p-1} + \ldots + (2p+1)^{2p} a'_0 = \frac{(2p+1)^{2p}}{2(2p+1)}.
\end{aligned}
$$

Nous avons intégré les équations fonctionnelles (2) en supposant la fonction $\varphi(x)$ continue et admettant des dérivées de tout ordre. Dans ces conditions, l'intégrale de chacune des équations (2) est un polynôme quelconque de degré $2p+1$.

Dans notre note, nous n'avons pas cité, à regret, un important Mémoire de M. Tiberiu Popoviciu[3]), qui s'occupe des équations fonctionnelles de la forme

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(x+ih) = 0$$

où les a_i et h sont des constantes, et étudie également des équations fonctionnelles de la forme (2). Le point de départ de M. Popoviciu est l'équation fonctionnelle de M. D. Pompeiu[4]).

$$\int_{\lambda}^{\mu} f(x)\,dx = (\mu-\lambda) f\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)$$

dont la solution continue quelles que soient les valeurs de λ et de μ, est un polynôme du premier degré.

M. Popoviciu considère une suite croissante de nombres donnés $k_0, k_1, \ldots, k_n$ compris entre 0 et 1, et forme le polynôme de *Lagrange*.

$$\mathrm{P}(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(t-t_0)(t-t_1)\ldots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\ldots(t-t_n)}{(t_i-t_0)(t_i-t_1)\ldots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\ldots(t_i-t_n)} f(t_i)$$

où

$$t_i = \lambda + k_i(\mu-\lambda)$$

[3]) Tiberiu Popoviciu: *Sur certaines équations fonctionnelles définissant des polynômes.* Mathematica Tome X, 1934, p. 197.

[4]) D. Pompeiu: *Sur une équation fonctionnelle qui s'introduit dans un problème de moyenne.* C. R. de l'Académie des Sciences de Paris t. 190, p. 1107.

et en écrivant que les valeurs moyennes des fonctions $f(t)$ et $P(t)$ sont égales, obtient l'équation fonctionnelle

$$\int_{\lambda}^{\mu} f(x)\,dx = (\mu-\lambda)\sum_{i=0}^{n} \mu_i f[\lambda + k_i(\mu-\lambda)] \tag{5}$$

où

$$\mu_i = \int_0^1 \frac{(t-k_0)\,(t-k_1)\ldots(t-k_{i-1})(t-k_{i+1})\ldots(t-k_n)}{(k_i-k_0)(k_i-k_1)\ldots(k_i-k_{i-1})(k_i-k_{i+1})\ldots(k_i-k_n)}\,dt$$

$$(i=0,1,\ldots,n).$$

M. Popoviciu démontre que la solution continue générale de cette équation (5) est un polynôme. Comme cas particulier, M. Popoviciu donne l'équation fonctionnelle (1), et en général, dans le cas $k_i = \dfrac{i}{n}$ $(i=0,1,\ldots,n)$ affirme que la solution continue de l'équation (5) est un polynôme de degré n si n est impair et un polynôme de degré $n+1$ si n est pair.

L'équation (5) coïncide, lorsque $k_i = \dfrac{i}{n}$, avec les équations fonctionnelles (2). M. Popoviciu ne donne pas les équations linéaires (3) et (4).

En citant le Mémoire de M. Popoviciu, antérieur à notre travail, nous devons toutefois ajouter que nos travaux sont distincts non seulement par leurs point de départ, mais aussi par les méthodes employées, comme il résulte du développement de notre note[5]). Nous devons encore ajouter que notre étude sur les équations fonctionnelles (2) est suivie de nombreuses applications.

2. Dans ce travail nous voulons démontrer que *les nombres* a_0, a_1 *ainsi que* a_0', a_1' *sont toujours positifs quel que soit* p.

Ecrivons d'abord la formule

$$\int_{\lambda}^{\mu} \varphi(x)\,dx = (\mu-\lambda)\sum_{s=0}^{p} a_s\left[\varphi\left(\lambda + s\frac{\mu-\lambda}{2p}\right) + \varphi\left(\mu - s\frac{\mu-\lambda}{2p}\right)\right] \tag{6}$$

en prenant pour intervalle (λ, μ)

$$\lambda = -ph, \quad \mu = ph$$

---

[5]) D. V. Ionesco: *Généralisation d'une équation fonctionnelle rencontrée par* G. Darboux. Bulletin Mathématique de la Société roumaine des Sciences. Tome 41, 1939, p. 77 — 100.

et pour $\varphi(x)$, le polynôme

$$\varphi(x) = x^2(x^2 - h^2)(x^2 - 4h^2)\dots[x^2 - (p-1)^2 h^2]$$

de degré $2p$.

La formule (6), nous donnera à cause de la symétrie

$$2ph\varphi(ph)a_0 = \int_0^{ph} x^2(x^2 - h^2)\dots[x^2 - (p-1)^2 h^2]\,dx. \tag{7}$$

Remarquons que $\varphi(ph)$ est toujours positif, d'où résulte que le signe de a_0 est donné par le signe de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{ph} x^2(x^2 - h^2)(x^2 - 4h^2)\dots[x^2 - (p-1)^2 h^2]\,dx. \tag{8}$$

Ecrivons l'intégrale I, de la façon suivante

$$\mathrm{I} = \int_0^h + \int_h^{2h} + \dots + \int_{(p-1)h}^{ph}$$

et dans la seconde intégrale faisons le changement de variable $x = h + x_1$, dans la troisième, le changement $x = 2h + x_2, \dots$, dans la dernière le changement $x = (p-1)h + x_{p-1}$; nous aurons

$$\begin{aligned}\mathrm{I} = \int_0^h \Big\{ & x^2(x^2 - h^2)(x^2 - 4h^2)\dots[x^2 - (p-1)^2 h^2] \\ & + (x+h)^2[(x+h)^2 - h^2][(x+h)^2 - 4h^2]\dots[(x+h)^2 - (p-1)^2h^2] \\ & + (x+2h)^2[(x+2h)^2 - h^2][(x+2h)^2 - 4h^2]\dots[(x+2h)^2 - (p-1)^2h^2] \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + [x+(p-1)h]^2[(x+(p-1)h)^2 - h^2]\dots[(x+(p-1)h)^2 - (p-1)^2h^2] \Big\} dx\end{aligned}$$

ou bien

$$\mathrm{I} = \int_0 x(x+h)(x+2h)\dots[x+(p-1)h]\mathrm{P}(x)\,dx, \tag{9}$$

où

$$
\begin{aligned}
(10)\quad P(x)=&(x-h)(x-2h)\ldots[x-(p-3)h][x-(p-2)h][x-(p-1)h]x\\
&+(x-h)(x-2h)\ldots[x-(p-3)h][x-(p-2)h][x+ph](x+h)\\
&+(x-h)(x-2h)\ldots[x-(p-3)h][x+ph][x+(p+1)h](x+2h)\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(x-h)[x+ph]\ldots[x+(2p-4)h][x+(2p-3)h][x+(p-2)h]\\
&+[x+ph][x+(p+1)h]\ldots[x+(2p-3)h][x+(2p-2)h][x+(p-1)h]
\end{aligned}
$$

Nous allons démontrer que dans l'intervalle (o, h) le polynôme $P(x)$ est toujours positif.

a). Supposons d'abord que $p=2q$; la formule (10) a alors $2q$ lignes et dans chaque ligne il y a $2q$ facteurs. Nous allons grouper dans cette formule la première ligne avec la seconde, ensuite la troisième avec la quatrième, ... et enfin la $(2q-1)$-ème avec la $(2q)$-ème; nous aurons

$$
\begin{aligned}
P(x)=&(x-h)\ldots[x-(2q-2)h]\{x[x-(2q-1)h]+(x+h)(x+2qh)\}\\
&+(x-h)\ldots[x-(2q-4)h][x+2qh][x+(2p+1)h]\\
&\times\{(x+2h)[x-(2q-3)h]+(x+3h)[x+(2q+2)h]\}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(x-h)(x-2h)(x+2qh)\ldots[x+(4q-5)h]\\
&\times\{[x+(2q-4)h](x-3h)+[x+(2q-3)h][x+(4q-4)h]\}\\
&+(x+2qh)[x+(2q+1)h]\ldots[x+(4q-3)h]\\
&\times\{[x+(2q-2)h](x-h)+[x+(2q-1)h][x+(4q-2)h]\}.
\end{aligned}
$$

Si nous posons

$$Q(x)=x[x-(2q-1)h]+(x+h)(x+2qh),$$

c'est-à-dire

$$Q(x)=2(x^2+hx+qh^2)$$

nous pouvons écrire

$$
\begin{aligned}
(11)\quad P(x)=&(x-h)\ldots[x-(2q-2)h]Q(x)\\
&+(x-h)\ldots[x-(2q-4)h][x+2qh][x+(2q+1)h]Q(x+2h)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(x-h)(x-2h)[x+2qh]\ldots[x+(4q-5)h]Q[x+(2q-4)h]\\
&+(x+2qh)[x+(2q+1)h]\ldots[x+(4q-3)h]Q[x+(2q-2)h].
\end{aligned}
$$

Le polynôme $Q(x)$ est positif dans l'intervalle (o, h) ainsi que les polynômes

$$Q(x+2h),\quad Q(x+4h),\ \ldots,\ Q[x+(2q-2)h].$$

Les polynômes

$$(x-h)(x-2h)\ldots[x-(2q-2)h],$$
$$(x-h)(x-2h)\ldots[x-(2q-4)h).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x-h)(x-2h)$$

dont le nombre de facteurs est pair, sont positifs dans l'intervalle (o, h).

Nous voyons donc sur la formule (11) que le polynôme $P(x)$ est positif dans l'intervalle (o, h).

b). Supposons maintenant que $p=2q+1$; la formule (10) a alors $2q+1$ lignes et chaque lignes a $2q+1$ facteurs. Nous allons grouper dans la formule (10) la seconde ligne avec la troisième, la quatrième avec la cinquième, ..., la $(2q)$-ème avec la $(2q+1)$-ème; nous aurons

$$\begin{aligned}P(x)=&(x-h)(x-2h)\ldots[x-2qh]x\\&+(x-h)(x-2h)\ldots[x-(2q-2)h][x+(2q+1)h]\\&\qquad\times\{(x+h)[x-(2q-1)h]+(x+2h)[x+(2q+2)h]\}\\&+(x-h)\ldots[x-(2q-4)h][x+(2q+1)h][x+(2q+2)h][x+(2q+3)h\\&\qquad\times\{(x+3h)[x-(2q-3)h]+(x+4h)[x+(2q+4)h]\}\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+(x-h)(x-2h)[x+(2q+1)h]\ldots[x+(4q-3)h]\\&\qquad\times\{[x+(2q-3)h](x-3h)+[x+(2q-2)h][x+(4q-2)h]\}\\&+[x+(2q+1)h][x+(2q+2)h]\ldots[x+(4q-1)h]\\&\qquad\times\{[x+(2q-1)h](x-h)+[x+2qh][x+4qh]\}.\end{aligned}$$

En posant

$$Q_1(x)=(x+h)[x-(2q-1)h]+(x+2h)[x+(2q+2)h]$$

c'est à dire

$$Q_1(x)=2x^2+6hx+(2q+5)h^2,$$

nous avons

$$\begin{aligned}P(x)=&(x-h)(x-2h)\ldots(x-2qh).x\\&+(x-h)(x-2h)\ldots[x-(2q-2)h][x+(2q+1)h]Q_1(x)\\&+(x-h)(x-2h)\ldots[x-(2q-4)h][x+(2q+1)h]\\&\qquad\times[x+(2q+2)h][x+(2q+3)h]Q_1(x+2h)\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+(x-h)(x-2h)[x+(2q+1)h]\ldots[x+(4q-3)h]Q_1(x+(2q-4)h]\\&+[x+(2q+1)h][x+(2q+2)h]\ldots[x+(4q-1)h]Q_1[x+(2q-2)h]\end{aligned}$$

Sur cette expression nous voyons comme plus haut que le polynôme P (x) est positif dans l'intervalle (o, h).

Il résulte alors que dans la formule (9), l'élément de l'intégrale est positif lorsque x se trouve entre o et h, et par suite l'intégrale I est positive.

Nous avons ainsi démontré que dans la formule (6), le coefficient a_0 *est toujours positif.*

3. Reprenons maintenant la formule (6), l'intervalle (λ, μ) étant

$$\lambda = -ph, \quad \mu = ph$$

et le polynôme $\varphi(x)$ étant

$$\varphi(x) = -x^2(x^2-h^2)(x^2-4h^2)\dots[x^2-(p-2)^2h^2][x^2-p^2h^2]$$

de degré $2p$.

Ce polynôme s'annulle pour $x = o$, $x = \pm h, \dots, x = \pm(p-2)h$, $x = \pm ph$; il est positif entre $\pm(p-2)h$ et $\pm ph$.

La formule (6), nous donnera à cause de la symétrie

$$(12) \quad 2ph\varphi[(p-1)h]\,a_1 = -\int_0^{ph} x^2(x^2-h^2)\dots[x^2-(p-2)^2h^2][x^2-p^2h^2]\,dx.$$

Comme nous avons remarqué que $\varphi[(p-1)h] > 0$, le signe de a_1 est le même que le signe de l'intégrale

$$(13) \quad \mathrm{J} = -\int_0^{ph} x^2(x^2-h^2)\dots[x^2-(p-2)^2h^2][x^2-p^2h^2]\,dx.$$

Nous sommes ainsi amené à étudier le signe de l'intégrale J.

Nous pouvons écrire:

$$\mathrm{J} = -\int_0^{ph} x^2(x^2-h^2)\dots[x^2-(p-2)^2h^2][x^2-(p-1)^2h^2]\,dx$$

$$+(2p-1)h^2\int_0^{(p-1)h} x^2(x^2-h^2)(x^2-4h^2)\dots[x^2-(p-2)^2h^2]\,dx$$

$$+(2p-1)h^2\int_{(p-1)h}^{ph} x^2(x^2-h^2)(x^2-4h^2\dots[x^2-(p-2)^2h^2]\,dx.$$

L'intégrale écrite sur la première ligne est l'intégrale I que nous avons rencontré au No. 2; l'intégrale écrite sur la seconde ligne est la même que I où l'on échange p en $p-1$; pour la troisième intégrale nous faisons le changement de variable $x = (p-1)h + x_1$. En utilisant la formule (9), nous pouvons écrire:

$$(14)\quad J = -\int_0^h x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(p-1)h]P(x)\,dx$$

$$+(2p-1)h^2\int_0^h x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(p-2)h]P_1(x)\,dx$$

$$+(2p-1)h^2\int_0^h (x+h)(x+2h)\ldots[x+(p-2)h][x+(p-1)h]^2$$

$$\times[x+ph]\ldots[x+(2p-3)h]\,dx,$$

où $P(x)$ est le polynôme (10) et où $P_1(x)$ est le polynôme

$$(15)\quad P_1(x) = (x-h)(x-2h)\ldots[x-(p-3)h][x-(p-2)h]x$$

$$+(x-h)(x-2h)\ldots[x-(p-3)h][x+(p-1)h](x+h)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(x-h)[x+(p-1)h]\ldots[x+(2p-6)h]$$
$$\times[x+(2p-5)h][x+(p-3)h]$$

$$+[x+(p-1)h][x+ph]\ldots[x+(2p-5)h]$$
$$\times[x+(2p-4)h][x+(p-2)h].$$

a). Supposons d'abord que $p = 2q$.

Nous allons laisser de côté le terme de la première intégrale de la formule (14) qui provient du dernier terme de $P(x)$, que nous allons combiner avec la troisième intégrale de la formule (14), et nous écrirons:

$$(16)\quad J = -\int_0^h x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(2q-1)h]P_2(x)\,dx$$

$$+(4q-1)h^2\int_0^h x(x+h)\ldots[x+(2q-2h]P_1(x)\,dx$$

$$+\int_0^h (x+h)\ldots[x+(2q-2)h][x+(2q-1h]^2[x+2qh]\ldots[x+(4q-3)h[$$

$$\times\{(4q-1)h^2 - x[x+(4q-2)h]\}\,dx,$$

où

$$
\begin{aligned}
P_2(x)=&(x-h)(x-2h)\ldots[x-(2q-3)h][x-(2q-2)h][x-(2q-1)h]x \\
&+(x-h)(x-2h)\ldots[x-(2q-3)h][x-(2q-2)h][x+2qh](x+h) \\
&+(x-h)(x-2h)\ldots[x-(2q-3)h][x+2qh][x+(2q+1)h](x+2h) \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+(x-h)[x+2qh]\ldots[x+(4q-4)h][x+(4q-3)h][x+(2q-2)h].
\end{aligned}
$$

Dans le premier terme de $P_2(x)$ il y a $2q-1$ facteurs négatifs. Dans $P_2(x)$ nous allons grouper le second terme avec le troisième, ensuite le quatrième avec le cinquème, ... et enfin l'avant dernier avec le dernier. En posant

$$R(x)=(x+h)[x-(2q-2)h]+(x+2h)[x+(2q+1)h],$$

c'est-à-dire

$$R(x)=2x^2+6hx+(2q+4)h^2,$$

nous pouvons écrire

$$
\begin{aligned}
P_2(x)=&(x-h)(x-2h)\ldots[x-(2q-1)h]x \\
&+(x-h)\ldots[x-(2q-3)h][x+2qh]R(x) \\
&+(x-h)\ldots[x-(2q-5)h][x+2qh][x+(2q+1)h] \\
&\qquad\qquad\qquad\times[x+(2q+2)h]R(x+2h) \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+(x-h)[x+2qh]\ldots[x+(4q-4)h]R[x+(2q-4)h].
\end{aligned}
$$

Comme le polynôme $R(x)$ est positif dans l'intervalle (o, h) ainsi que les polynômes $R(x+2h), \ldots, R[x+(2q-4)h]$, il résulte que dans l'intervalle (o, h), le polynôme $P_2(x)$ est négatif; le premier terme de la formule (16) est donc positif.

D'autre part nous avons vu au No. 2 que dans l'intervalle (o, h) le polynôme $P_1(x)$ est positif, de sorte que le second terme de la formule (16) est encore positif.

Dans le troisième terme de la formule (16), nous pouvons écrire

$$(4q-1)h^2-x[x+(4q-2)h]=(h-x)[x+(4q-1)h]$$

et nous voyons que ce trinôme est positif dans l'intervalle (o, h); le troisième terme de la formule (16) est donc aussi positif.

Il résulte finalement que l'intégrale J est positive et la formule (12) montre *que le coefficient* a_1 *est positif.*

b). Supposons maintenant que $p=2q+1$.

Dans la première intégrale de la formule (14) nous laisserons de côté le terme qui provient du dernier terme de $P(x)$, que nous allons grouper avec la troisième intégrale de la formule (14); nous aurons alors

$$(17)\quad J = -\int_0^h x(x+h)(x+2h)\dots[x+2qh]P_3(x)\,dx$$

$$+(4q+1)h^2\int_0^h x(x+h)(x+2h)\dots[x+(2q-1)h]P_1(x)\,dx$$

$$+\int_0^h (x+h)\dots[x+(2q-1)h][x+2qh]^2[x+(2q+1)h]\dots$$
$$\times[x+(4q-1)h][(4q+1)h^2-x(x+4qh)]\,dx$$

où

$$P_3(x) = (x-h)(x-2h)\dots[x-(2q-2)h][x-(2q-1)h][x-2qh]x$$
$$+(x-h)(x-2h)\dots[x-(2q-2)h][x-(2q-1)h][x+(2q+1)h](x+h)$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+(x-h)[x+(2q+1)h]\dots[x+(4q-1)h][x+(2q-1)h].$$

Dans $P_3(x)$, nous allons grouper le premier terme avec le second, le troisième avec le quatrième,... l'avant dernier avec le dernier. En posant

$$R_1(x) = x(x-2qh) + (x+h)[x+(2q+1)h]$$

c'est à dire

$$R_1(x) = 2x^2 + 2hx + (2q+1)h^2,$$

nous pouvons écrire

$$P_3(x) = (x-h)(x-2h)\dots[x-(2q-1)h]R_1(x)$$
$$+(x-h)(x-2h)\dots[x-(2q-3)h][x+(2q+1)h]$$
$$\times[x+(2q+2)h][R_1(x+2h)$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+(x-h)[x+(2q+1)h]\dots[x+(4q-2)h]R_1[x+(2q-2)h].$$

Le polynôme $R_1(x)$ est positif dans l'intervalle (o, h), ainsi que les polynômes $R_1(x+2h)$, ..., $R_1[x+(2q-2)h]$. Il résulte que le polynôme $P_3(x)$ est négatif dans l'intervalle (o, h), et par suite le premier terme de la formule (17) est positif dans le même intervalle.

Le second terme de la formule (17) est également positif dans l'intervalle (o, h).

Dans le troisième terme de la formule (17), remarquons que le trinome

$$(4q+1)h^2 - x(x+4qh) = (h-x)[x+(4q+1)h]$$

est positif dans l'intérvalle (o, h), et par suite ce troisième terme est positif dans le même intervalle.

Il résulte finalement que l'intégrale J est positive, et par suite, d'après la formule (12), le coéfficient a_1 est positif.

Nous avons ainsi démontré que *le coefficient* a_1 *des formules* (2) *est positif quel que soit* p.

4. Démontrons maintenant que le coefficient a_0' de la seconde formule de Darboux (2), est positif. Partageons l'intervalle (λ, μ) en $2p+1$ parties égales et désignons par A_i le point ayant pour abscisse

$$x_i = \lambda + i\frac{\mu - \lambda}{2p+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p+1;\ x_0 = \lambda, x_{2p+1} = \mu).$$

Considérons le polynôme $\varphi(x)$ de degré $2p+1$, qui s'annule pour $x = x_i\ [i = 0, 1, \ldots, 2p]$ et qui est positif pour $x = +\infty$. Il est évident que pour $x > x_{2p}$, ce polynôme est positif. En appliquant la seconde formule (2), nous aurons

$$(\mu - \lambda)\, a_0'\, \varphi(\mu) = \int_\lambda^\mu \varphi(x)\, dx, \tag{18}$$

$\varphi(\mu)$ étant positif, le signe de a_0' est donné par le signe de l'intégrale

$$I_1 = \int_\lambda^\mu \varphi(x)\, dx.$$

Nous pouvons écrire

$$I_1 = \int_\lambda^{x_{2p}} \varphi(x)\, dx + \int_{x_{2p}}^\mu \varphi(x)\, dx.$$

L'intervale (λ, x_{2p}) étant partagé en $2p$ parties égales par les points $A_1, A_2, \ldots, A_{2p-1}$ et $\varphi(x)$ étant un polynôme de degré $2p+1$, nous pouvons appliquer la première formule de Darboux (2), et nous déduisons que

$$\int_\lambda^{x_{2p}} \varphi(x)\, dx = 0,$$

puisque le polynôme $\varphi\ (x)$ s'annule pour $x = x_i\ (i = 0, 1, \ldots, 2p)$ Il reste

$$I_1 = \int_{x_{2p}}^\mu \varphi\ (x)\, dx.$$

Mais dans l'intervalle (x_{2p}, μ) le polynôme $\varphi(x)$ étant positif, il résulte que I_1 est positive et par suite *le coefficient* a_0' *est positif, quel que soit* p.

5. Prenons maintenant pour $\varphi(x)$, le polynôme qui s'annule pour $x = x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, 2p-1)$ ainsi que pour $x = x_{2p+1} = \mu$, et qui est négatif pour $x = \infty$. Il est évidént que ce polynôme est positif lorsque x est compris entre x_{2p-1} et $x_{2p+1} = \mu$. En appliquant la seconde formule (2), nous aurons

$$(\mu - \lambda) a_1' \varphi(x_{2p}) = \int_\lambda^\mu \varphi(x)\, dx. \tag{19}$$

$\varphi(x_{2p})$ étant positif, le signe de a_1' est le signe de l'intégrale

$$J_1 = \int_\lambda^\mu \varphi(x) dx = \int_\lambda^{x_{2p}} \varphi(x) dx + \int_{x_{2p}}^\mu \varphi(x)\, dx.$$

D'autre part, l'intervalle (λ, x_{2p}) étant partagé en $2p$ parties égales par les points $A_1, A_2, \ldots, A_{2p-1}$, et $\varphi(x)$ étant un polynôme de degré $2p+1$, en appliquant la première formule (2), nous avons

$$\int_\lambda^{x_{2p}} \varphi(x) dx = (x_{2p} - \lambda) a_0 \varphi(x_{2p})$$

de sorte que

$$J_1 = (x_{2p} - \lambda) a_0 \varphi(x_{2p}) + \int_{x_{2p}}^\mu \varphi(x)\, dx.$$

On a démontré au No. 2, que a_0 est positif quel que soit p; $\varphi(x_{2p})$ est positif; l'intégrale

$$\int_{x_{2p}}^\mu \varphi(x) dx,$$

est positive puisque le polynôme $\varphi(x)$ est positif dans l'intervalle (x_{2p}, μ). Il résulte que l'intégrale J_1 est positive, et par suite *le coefficient* a_1' *est positif quelque soit* p.

6. En ce qui concerne le signe des coéfficients a_2 ou a_2' on trouve que pour $p = 1, 2, 3$ a_2 est positif, tandis que pour $p = 4$ il est *négatif* on a

$$a_2 = -\frac{464}{14.175}.$$

De même pour $p = 1, 2, 3, 4$ le coefficient a_2' est positif, tandis que pour $p = 5$ il est *négatif*, on a

$$a_2' = -\frac{3.237.113}{87.091.200} \quad {}^{1)}$$

7. Nous allons faire maintenant quelques applications des théorèmes établis plus haut.

Considérons la courbe (c) représentée par l'équation

$$y = \varphi(x),$$

où $\varphi\ (x)$ est un polynôme quelconque de degré $2p+1$ au plus. Prenons un intervalle quelconque (λ, μ) de l'axe Ox, que nous allons partager en $2p$ parties égales, et désignons par A_i les points de la courbe (c) qui ont pour abscisses

$$x_i = \lambda + i\frac{\mu - \lambda}{2p} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p)$$

a) Par les points $A_0, A_1, \ldots, A_{2p-1}$ nous allons faire passer une courbe (c_1) réprésentée par une équation de la forme

$$y = \varphi_1(x),$$

où $\varphi_1(x)$ est un polynôme de degré $2p+1$; ce polynôme a $2p+2$ coéfficients, dont *deux* peuvent être pris arbitrairement.

Désignons par S_1 l'aire comprise entre les courbes (c), (c_1) et les droites $x = \lambda$, $x = \mu$. *L'aire* S_1 *est positive, nulle ou négative, suivant que la différence* $Y_1 = \varphi(\mu) - \varphi_1(\mu)$ *est positive, nulle ou négative.*

En effet, l'aire S_1 est donnée par la formule

$$S_1 = \int_\lambda^\mu [\varphi(x) - \varphi_1(x)]\,dx.$$

En appliquant la première formule de Darboux (2), nous déduisons que

$$S_1 = (\mu - \lambda)\,a_0[\varphi(\mu) - \varphi_1(\mu)]$$

parce que le polynôme $\varphi(x) - \varphi_1(x)$ s'annule aux points $A_0, A_1, \ldots, A_{2p-1}$. Mais nous avons démontré que le coefficient a_0, est positif;

1) Voir aussi.

B. P. Moors *Valeur approximative d'une intégrale définie* Gauthier-Villars. Paris 1905.

d'où résulte que le signe de l'aire S_1, est le même que le signe de la différence $Y = \varphi(\mu) - \varphi_1(\mu)$ des ordonnées qui correspondent au point A_{2p}.

b) De même, nous pouvons considérer une courbe (c_2) qui passe par les points $A_0, A_1, \ldots, A_{2p-2}, A_{2p}$ et dont l'équation est

$$y = \varphi_2(x),$$

où $\varphi_2(x)$ est un polynôme de degré $2p+1$; *deux* des coefficients de ce polynôme peuvent être pris arbitrairement.

L'aire S_2 *comprise entre les courbes* (c), (c_2) *et les droites* $x = \lambda$, $x = \mu$ *est positive, nulle ou négative suivant que la différence* $Y_2 = \varphi\left(\mu - \frac{\mu-\lambda}{2p}\right) - \varphi_2\left(\mu - \frac{\mu-\lambda}{2p}\right)$ *est positive, nulle ou négative.*

En effet l'aire S_2 est donnée par la formule

$$S_2 = \int_\lambda^\mu [\varphi(x) - \varphi_2(x)]\, dx$$

et le polynôme $\varphi(x) - \varphi_2(x)$ étant de degré $2p+1$, nous pouvons appliquer la première formule de Darboux (2), et nous déduisons que

$$S_2 = (\mu - \lambda)\, a_1 \left[\varphi\left(\mu - \frac{\mu-\lambda}{2p}\right) - \varphi_2\left(\mu - \frac{\mu-\lambda}{2p}\right)\right].$$

Nous avons démontré que le coefficient a_1 est positif, d'où résulte que le signe de S_2 est le même que le signe de la différence

$$\varphi\left(\mu - \frac{\mu-\lambda}{2p}\right) - \varphi_2\left(\mu - \frac{\mu-\lambda}{2p}\right)$$

des ordonnées qui correspondent au point A_{2p-1}.

8. Partageons maintenant l'intervalle quelconque (λ, μ) en $2p+1$ parties égales, et prenons sur la courbe (c') représenté par l'équation

$$y = \Psi(x),$$

où $\Psi(x)$ est un polynôme de degré $2p+1$ au plus, les points B_i ayant pour abscisses

$$x_i = \lambda + i\frac{\mu-\lambda}{2p+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p+1).$$

a) Par les points $B_0, B_1, \ldots, B_{2p}$ nous pouvons faire passer une courbe (c'_1) représentée par l'équation

$$y = \Psi_1(x)$$

où $\Psi_1(x)$ est un polynôme de degré $2p+1$; *un seul* de ses coefficients peut être pris arbitrairement.

L'aire S'_1 *comprise entre les courbes* (c′), (c′) *et les droites* $x = \lambda$, $x = \mu$ *est positive, nulle ou négative, suivant que la différence* $Y'_1 = \Psi(\mu) - \Psi_1(\mu)$ *est positive, nulle ou négative.*

En effet, en appliquant la seconde formule (2), cette aire est donnée par

$$S'_1 = (\mu - \lambda) a'_0 [\Psi(\mu) - \Psi_1(\mu)]$$

et comme nous avons démontré que le coefficient a'_0 est positif, il résulte que le signe de S'_1 est le signe de $\Psi(\mu) - \Psi_1(\mu)$.

b) Nous pouvons aussi faire passer par les points

$$B_0, B_1, \ldots, B_{2p-1}, B_{2p+1}$$

une courbe (c'_2) représentée par une équation

$$y = \Psi_2(x),$$

où $\Psi_2(x)$, est un polynôme de degré $2p+1$, dont *un seul* coefficient peut être arbitraire

L'aire S'_2 *comprise entre les courbes* (c′), (c'_2) *et les droites* $x = \lambda$, $x = \mu$ *est positive, nulle ou négative suivant que la différence des ordonnées au point d'abscisse* $\mu - \dfrac{\mu - \lambda}{2p+1}$,

$$Y'_2 = \Psi\left(\varphi - \frac{\mu - \lambda}{2p+1}\right) - \Psi_2\left(\mu - \frac{\mu - \lambda}{2p+1}\right)$$

est positive, nulle ou négative.

En effet on établit facilement que

$$S'_2 = (\mu - \lambda) a'_1 \left[\Psi\left(\mu - \frac{\mu - \lambda}{2p+1}\right) - \Psi_2\left(\mu - \frac{\mu - \lambda}{2p+1}\right)\right]$$

et comme a'_1 est positif, le signe de S'_2 est le même que le signe de Y'_2.

9. Lorsqu'on calcule aproximativement l'intégrale définie

$$\int_\lambda^\mu f(x)\, dx,$$

on emploie quelquefois la méthode de *Newton-Côtes* qui consiste à partager l'intervalle (μ, λ) en un nombre quelconque de parties égales, et à prendre pour valeur approchée de l'intégrale, la somme

$$(\mu - \lambda)\left\{k_0\Big[f(\lambda) + f(\mu)\Big] + k_1\left[f\left(\lambda + \frac{\mu - \lambda}{n}\right) + f\left(\mu - \frac{\mu - \lambda}{n}\right)\right] - \ldots\right\}$$

où

$$k_0 = \int_0^1 \frac{\left(t-\frac{1}{n}\right)\left(t-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(t-\frac{n}{n}\right)}{\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(-\frac{n}{n}\right)}\,dt \tag{20}$$

et

$$k_1 = \int_0^1 \frac{t\left(t-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(t-\frac{n}{n}\right)}{\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(-\frac{n-1}{n}\right)}\,dt. \tag{20}$$

Lorsque $n=2p$, on a $k_0=a_0$, $k_1=a_1$ et lorsque $n=2p+1$. on a $k_0=a_0'$ et $k_1=a_1'$.

Le théorème que nous avons démontré dans ce travail est que les nombres k_0 *et* k_1 *sont positifs quelque soit* n.

L'interprétation géomètrique du fait que les intégrales (20) sont positives, est comprise dans les applications que nous avons fait aux Nos. 7 et 8.