MATHEMATICA XVIII (1942), pp. 104—111

SUR UNE CONFIGURATION DE SIX POINTS ATTACHÉE À UN TÉTRAÈDRE COUPÉ PAR TROIS PLANS PARALLÈLES À UNE FACE.

PAR

D. V. IONESCU

(à TIMIŞOARA)

Reçu le 8 Oct. 1941.

1. Considérons le tétraèdre $SABC$ et les sections $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ parallèles à la base ABC. Une droite quelconque menée par S, rencontre les plans ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, en P, P_1, P_2, P_3.

Démontrons d'abord *que les plans menés par* P_1, P_2, P_3 *parallèlement aux plans* SBC, SCA, SAB *se coupent en un point* Q_1, *situé dans le plan* $A_1B_2C_3$.

Pour faire la démonstation de ce théorème nous allons employer les méthodes simples du calcul vectoriel. Posons

$$\overrightarrow{SA}=\vec{u},\quad \overrightarrow{SB}=\vec{v},\quad \overrightarrow{SC}=\vec{w} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{SA_1}=k_1\overrightarrow{SA},\quad \overrightarrow{SA_2}=k_2\overrightarrow{SA},\quad \overrightarrow{SA_3}=k_3\overrightarrow{SA}$$

et

$$\overrightarrow{SP}=\frac{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}+\nu\vec{w}}{\lambda+\mu+\nu}, \tag{1}$$

P étant le barycentre des masses λ, μ, ν placées en A, B, C.

Le vecteur SQ_1 est donné par une des formules

$$\overrightarrow{SQ_1}=k_1\frac{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}+\nu\vec{w}}{\lambda+\mu+\nu}+\beta_1\vec{v}+\gamma_1\vec{w}$$

$$\overrightarrow{SQ_2}=k_2\frac{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}+\nu\vec{w}}{\lambda+\mu+\nu}+\gamma_2\vec{w}+\alpha_2\vec{u}$$

$$\overrightarrow{SQ_3}=k_3\frac{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}+\nu\vec{w}}{\lambda+\mu+\nu}+\alpha_3\vec{u}+\beta_3\vec{v},$$

où les constantes $\beta_1, \gamma_1, \gamma_2, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3$ sont choisies de manière que ces trois formules soient identiques. Nous avons donc les équations

$$\frac{k_1\mu}{\lambda+\mu+\nu}+\beta_1=\frac{k_2\mu}{\lambda+\mu+\nu}$$

$$\frac{k_1\nu}{\lambda+\mu+\nu}+\gamma_1=\frac{k_3\nu}{\lambda+\mu+\nu},$$

qui donnent les valeurs de β_1 et γ_1.

Il résulte alors la formule

$$\overrightarrow{SQ_1}=\frac{k_1\lambda\vec{u}+k_2\mu\vec{v}+k_3\nu\vec{w}}{\lambda+\mu+\nu}, \tag{2}$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$\overrightarrow{SQ_1}=\frac{\lambda\overrightarrow{SA_1}+\mu\overrightarrow{SB_2}+\nu\overrightarrow{SC_3}}{\lambda+\mu+\nu},$$

et qui prouve que *le point* Q_1 *est le barycentre des masses* λ, μ, ν, *placées en* A_1, B_2, C_3. *Le point* Q_1 *se trouve donc dans le plan* $A_1B_2C_3$.

Le théorème est ainsi démontré.

2. Désignons par Q_1' l'intersection des plans menés par P_1, P_2, P_3 parallèlement aux plans SBC, SAB, SCA. Le point Q_1' se trouve plan $A_1B_3C_2$.

De la même manière, désignons par Q_2 l'intersection des plans menés par P_1, P_2, P_3 parallèlement aux plans SCA, SAB, SBC et par Q_3 l'intersection des plans menés par P_1, P_2, P_3 parallèlement aux plans SAB, SBC, SCA.

Enfin désignons par Q_2', Q_3' les analogues du point Q_1'.

Dans cet article nous allons étudier la configuration des six points $Q_1, Q_2, Q_3, Q_1', Q_2', Q_3'$.

Nous avons

$$\overrightarrow{SQ_1'}=\frac{k_1\lambda\vec{u}+k_3\mu\vec{v}+k_2\nu\vec{w}}{\lambda+\mu+\nu} \tag{2}$$

et

$$\overrightarrow{SQ_2}=\frac{k_3\lambda\vec{u}+k_1\mu\vec{v}+k_2\nu\vec{w}}{\lambda+\mu+\nu};\quad \overrightarrow{SQ_2'}=\frac{k_2\lambda\vec{u}+k_1\mu\vec{v}+k_3\nu\vec{w}}{\lambda+\mu+\nu}$$

$$\overrightarrow{SQ_3}=\frac{k_2\lambda\vec{u}+k_3\mu\vec{v}+k_1\nu\vec{w}}{\lambda+\mu+\nu};\quad \overrightarrow{SQ_3'}=\frac{k_3\lambda\vec{u}+k_2\mu\vec{v}+k_1\nu\vec{w}}{\lambda+\mu+\nu}. \tag{2}$$

Pour faciliter les interprétations, désignons par A′, B′ C′ les points où les plans menés par P parallèlement aux plans SBC, SCA, SAB rencontrent les droites SA, SB, SC. Nous avons

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{SA'} = \overrightarrow{u'} = \frac{\lambda \overrightarrow{u}}{\lambda+\mu+\nu} \\
(3) \qquad &\overrightarrow{SB'} = \overrightarrow{v'} = \frac{\mu \overrightarrow{v}}{\lambda+\mu+\nu} \\
&\overrightarrow{SC'} = \overrightarrow{w'} = \frac{\nu \overrightarrow{w}}{\lambda+\mu+\nu},
\end{aligned}
$$

et par suite nons pouvons écrire

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{SQ_1} = k_1\overrightarrow{u'} + k_2\overrightarrow{v'} + k_3\overrightarrow{w'}\,; \quad \overrightarrow{SQ_1'} = k_1\overrightarrow{u'} + k_3\overrightarrow{v'} + k_2\overrightarrow{w'} \\
(4) \qquad &\overrightarrow{SQ_2} = k_3\overrightarrow{u'} + k_1\overrightarrow{v'} + k_2\overrightarrow{w'}\,; \quad \overrightarrow{SQ_2'} = k_2\overrightarrow{u'} + k_1\overrightarrow{v'} + k_3\overrightarrow{w'} \\
&\overrightarrow{SQ_3} = k_2\overrightarrow{u'} + k_3\overrightarrow{v'} + k_1\overrightarrow{w'}\,; \quad \overrightarrow{SQ_3'} = k_3\overrightarrow{u'} + k_2\overrightarrow{v'} + k_1\overrightarrow{w'}.
\end{aligned}
$$

3. Nons déduisons de ces formules les relations suivantes

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{Q_1Q_1'} = (k_2-k_3)(\overrightarrow{w'}-\overrightarrow{v'}) = (k_2-k_3)\overrightarrow{B'C'} \\
(5) \qquad &\overrightarrow{Q_2Q_1'} = (k_3-k_1)(\overrightarrow{v'}-\overrightarrow{u'}) = (k_3-k_1)\overrightarrow{A'B'} \\
&\overrightarrow{Q_3Q_1'} = (k_1-k_2)(\overrightarrow{u'}-\overrightarrow{w'}) = (k_1-k_2)\overrightarrow{C'A'}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{Q_1Q_2'} = (k_1-k_2)\overrightarrow{A'B'}\,; \quad \overrightarrow{Q_1Q_3'} = (k_3-k_1)\overrightarrow{C'A'} \\
(5) \qquad &\overrightarrow{Q_2Q_2'} = (k_2-k_3)\overrightarrow{C'A'}\,; \quad \overrightarrow{Q_2Q_3'} = (k_1-k_2)\overrightarrow{B'C'} \\
&\overrightarrow{Q_3Q_2'} = (k_3-k_1)\overrightarrow{B'C'}\,; \quad \overrightarrow{Q_3Q_3'} = (k_2-k_3)\overrightarrow{A'B'}
\end{aligned}
$$

qui montrent que *les points* Q_1, Q_2, Q_3, Q_1', Q_2', Q_3' *sont situés dans un même plan parallèle au plan* A′B′C′.

Les droites Q_1Q_1', Q_2Q_3', Q_3Q_2' sont parallèles au côté B′C′; les droites Q_1Q_3', Q_2Q_2', Q_3Q_1' sont parallèles au côté C′A′ et les droites Q_1Q_2', Q_2Q_1', Q_3Q_3' sont parallèles au côté A′B′.

Désignons par A″B″C″ le triangle formé par les droites $Q_1'Q_3$, $Q_2'Q_3$, $Q_3'Q_1$.

Les milieux des segments Q_1Q_1', Q_2Q_3', Q_3Q_2' se trouvent sur la médiane du triangle A″B″C″, d'où résulte que *les six points* Q_1, Q_2, Q_3,

Q_1', Q_2', Q_3' *sont situés sur une conique* (E) *qui a pour centre le centre de gravité du triangle* A″B″C″.

En effet dans la conique qui passe par les points Q_2, Q_2', Q_1, Q_1', Q_3 la droite qui joint les milieux de Q_1Q_1' et $Q_2'Q_3$ est un diamètre, et comme elle passe aussi par le milieu de Q_2Q_3', le point Q_3' se trouve également sur la conique.

Les triangles $Q_1Q_2Q_3$, $Q_1'Q_2'Q_3'$ *ont le même centre de gravité, le centre de la conique* (E).

En effet, la médiane du triangle $Q_1Q_2Q_3$ partant de Q_1, passe par le milieu de B″Q_3', est une médiane dans le triangle B″Q_1Q_3' et passe par suite par le centre de gravité du triangle A″B″C″.

Il résulte de cette remarque que *la conique* (E) *est une ellipse*, et que les triangles $Q_1Q_2Q_3$, $Q_1'Q_2'Q_3'$ jouissent des propriétés communes des triangles inscrits dans une ellipse et qui ont leur centre de gravité dans le centre de l'ellipse.

Les aires des triangles $Q_1Q_2Q_3$, $Q_1'Q_2'Q_3'$ sont égales, ainsi que la somme des carrés de leurs côtés.

4. Il y a un cas intéressant, lorsque le triangle A″B″C″ se réduit à un point.

Calculons les côtés du triangle A″B″C″.

Nous avons

$$\overrightarrow{B''C''} = \overrightarrow{Q_2'Q_3} - 2\overrightarrow{Q_1Q_1'}$$

et en tenant compte des formules (5), nous aurons

$$\overrightarrow{B''C''} = (k_1 - 2k_2 + k_3)\overrightarrow{B'C'}$$

et, d'une manière analogue, on trouve

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{C''A''} &= (k_1 - 2k_2 + k_3)\overrightarrow{C'A'} \\
\overrightarrow{A''B''} &= (k_1 - 2k_2 + k_3)\overrightarrow{A'B'}\,.
\end{aligned}
$$

Le triangle A″B″C″ se réduit à un point si

$$k_1 - 2k_2 + k_3 = 0.$$

Nous avons donc le résultat suivant: *lorsque les sections* $A_1B_1C_1$, $A_3B_3C_3$ *sont également distantes de la section* $A_2B_2C_2$, *les droites* Q_1Q_3', Q_2Q_1', Q_3Q_2' *sont concourentes dans le centre de l'ellipse qui passe par les six points* Q_1, Q_2, Q_3, Q_1', Q_2', Q_3'.

5. Nous allons faire maintenant des calculs permettant de déterminer les axes de l'ellipse (E).

a) Calculons d'abord l'aire du triangle $Q_1 Q_2 Q_3$.

Le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{Q_1 Q_2}$, $\overrightarrow{Q_1 Q_3}$ est

$$\overrightarrow{Q_1 Q_2} \times \overrightarrow{Q_1 Q_3} = (\overrightarrow{Q_1 Q_2'} + \overrightarrow{Q_2' Q_2}) \times (\overrightarrow{Q_1 Q_1'} + \overrightarrow{Q_1' Q_3}).$$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{Q_1 Q_2} \times \overrightarrow{Q_1 Q_3} = \overrightarrow{Q_1 Q_2'} \times \overrightarrow{Q_1 Q_1'} + \overrightarrow{Q_2' Q_2} \times \overrightarrow{Q_1 Q_1'} + \overrightarrow{Q_1 Q_2'} \times \overrightarrow{Q_1' Q_3}$$

En utilisant les formules (5) et en faisant les calculs, nous aurons

$$\overrightarrow{Q_1 Q_2} \times \overrightarrow{Q_1 Q_3} = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - k_2 k_3 - k_3 k_1)\, \overrightarrow{A' B'} \times \overrightarrow{A' C'}$$

Cette formule montre que *les triangles* $Q_1 Q_2 Q_3$, $A' B' C'$ *ont la même orientation*, et que leurs aires Σ et S', sont liées par la relation

$$\Sigma = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - k_2 k_3 - k_3 k_1)\, S'. \tag{6}$$

On démontre de la même manière que

$$\overrightarrow{Q_1' Q_2'} \times \overrightarrow{Q_1' Q_3'} = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - k_2 k_3 - k_3 k_1)\, \overrightarrow{A' B'} \times \overrightarrow{A' C'},$$

ce qui prouve que *les triangles* $Q_1' Q_2' Q_3'$, $A' B' C'$ *ont aussi la même orientation* et que leurs aires Σ' et S' sont liées par la relation

$$\Sigma' = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - k_2 k_3 - k_3 k_1)\, S' \tag{6'}$$

Les formules (6) et (6') montrent que $\Sigma = \Sigma'$, résultat que nous avons déjà enoncé à la fin du No. 3.

b) Calculons maintenant la somme des carrés des côtés du triangle $Q_1 Q_2 Q_3$.

Nous avons

$$\overrightarrow{Q_2 Q_3} = \overrightarrow{Q_2 Q_3'} + \overrightarrow{Q_3' Q_3} = (k_1 - k_2)\, \overrightarrow{B' C'} + (k_3 - k_2)\, \overrightarrow{A' B'}$$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{Q_2 Q_3} = (k_3 - k_1)\, \overrightarrow{A' B'} + (k_1 - k_2)\, \overrightarrow{A' C'}.$$

En élevant au carré, nous aurons

$$\overline{Q_2 Q_3}^2 = (k_3 - k_1)^2\, \overline{A' B'}^2 + (k_1 - k_2)^2\, \overline{A' C'}^2 + 2 (k_3 - k_1)(k_1 - k_2)\, \overrightarrow{A' B'} . \overrightarrow{A' C'},$$

et en remplaçant

$$2\, \overrightarrow{A' B'} . \overrightarrow{A' C'} = \overline{A' B'}^2 + \overline{A' C'}^2 - \overline{B' C'}^2,$$

il résulte que

$$\overline{Q_2 Q_3}^2 = (k_1 - k_2)(k_1 - k_3)\, \overline{B'C'}^2 + (k_2 - k_3)(k_2 - k_1)\, \overline{C'A'}^2 + (k_3 - k_1)(k_3 - k_2)\, \overline{A'B'}^2.$$

Si nous posons

$$B' C' = a', \qquad C' A' = b' \qquad A' B' = c',$$

nous aurons

$$\overline{Q_2 Q_3}^2 = (k_1 - k_2)(k_1 - k_3)\, a'^2 + (k_2 - k_3)(k_2 - k_1)\, b'^2 + (k_3 - k_1)(k_3 - k_2)\, c'^2 \tag{7}$$

et d'une manière analoque

$$(7) \quad \begin{aligned} \overline{Q_3 Q_1}^2 &= (k_3 - k_1)(k_3 - k_2)\, a'^2 + (k_1 - k_2)(k_1 - k_3)\, b'^2 + (k_2 - k_3)(k_2 - k_1)\, c'^2 \\ \overline{Q_1 Q_2}^2 &= (k_2 - k_3)(k_2 - k_1)\, a'^2 + (k_3 - k_1)(k_3 - k_2)\, b'^2 + (k_1 - k_2)(k_1 - k_3)\, c'^2. \end{aligned}$$

En ajoutant les formules (7), on obtient

$$\overline{Q_2 Q_3}^2 + \overline{Q_3 Q_1}^2 + \overline{Q_1 Q_2}^2 = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - k_2 k_3 - k_3 k_1)(a'^2 + b'^2 + c'^2) \tag{8}$$

on démontre de la même manière que

$$(9) \quad \begin{aligned} \overline{Q_2' Q_3'}^2 &= (k_1 - k_2)(k_1 - k_3)\, a'^2 + (k_3 - k_1)(k_3 - k_2)\, b'^2 + (k_2 - k_3)(k_2 - k_1)\, c'^2 \\ \overline{Q_3' Q_1'}^2 &= (k_2 - k_3)(k_2 - k_1)\, a'^2 + (k_1 - k_2)(k_1 - k_3)\, b'^2 + (k_3 - k_1)(k_3 - k_2)\, c'^2 \\ \overline{Q_1' Q_2'}^2 &= (k_3 - k_1)(k_3 - k_2)\, a'^2 + (k_2 - k_3)(k_2 - k_1)\, b'^2 + (k_1 - k_2)(k_1 - k_3)\, c'^2. \end{aligned}$$

En ajoutant ces formules on obtient aussi

$$\overline{Q_2' Q_3'}^2 + \overline{Q_3' Q_1'}^2 + \overline{Q_1' Q_2'}^2 + = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - k_2 k_3 - k_3 k_1)(a'^2 + b'^2 + c'^2). \tag{10}$$

Les formules (8) et (10) montrent que

$$\overline{Q_2 Q_3}^2 + \overline{Q_3 Q_1}^2 + \overline{Q_1 Q_2}^2 = \overline{Q_2' Q_3'}^2 + \overline{Q_3' Q_1'}^2 + \overline{Q_1' Q_2'}^2,$$

résultat que nous avons déjà enoncé à la fin du No. 3.

6. Soient α et β les demi-axes de l'ellipse (E). On sait que

$$\overline{Q_2 Q_3}^2 + \overline{Q_3 Q_1}^2 + \overline{Q_1 Q_2}^2 = \frac{9}{2} (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$\Sigma = \frac{\sqrt{27}}{4}\, \alpha \beta.$$

Il résulte d'après les formules (6) et (8) que les valeurs de α et β seront données par le système d'équations

$$(11) \quad \begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= \frac{2}{9} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - k_2 k_3 - k_3 k_1)(a'^2 + b'^2 + c'^2) \\ \alpha \beta &= \frac{4}{\sqrt{27}} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - k_2 k_3 - k_3 k_1)\, S' \end{aligned}$$

Désignons par α', β' les demi-axes de l'ellipse (E') circonscrite au triangle A'B'C' et qui a le centre dans le centre de gravité de ce triangle. Nous avons

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = \frac{9}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2)$$

$$S' = \frac{\sqrt{27}}{4}\alpha'\beta',$$

et si nous remplaçons $a'^2 + b'^2 + c'^2$ et S' dans les formules (11), nous aurons

$$\text{(12)}\qquad \begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - k_2 k_3 - k_3 k_1)(\alpha'^2 + \beta'^2) \\ \alpha\beta &= (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - k_2 k_3 - k_3 k_1)\,\alpha'\beta'. \end{aligned}$$

Ces formules montrent que les deux ellipses (E) et (E') sont homothétiques, le rapport d'homothétie étant

$$\text{(13)}\qquad \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - k_2 k_3 - k_3 k_1}\ .$$

Nous avons donc le résultat suivant:

L'ellipse (E) *qui passe par les points* $Q_1, Q_2, Q_3, Q_1', Q_2', Q_3'$ *est homothétique à l'ellipse circonscrite au triangle* A'B'C' *et qui a pour centre le centre de gravité du triangle* A'B'C'.

En particulier l'ellipse (E) est un cercle lorsque le triangle A'B'C' est équilatéral.

7. Les produits

$$(k_1 - k_2)(k_1 - k_3), \qquad (k_2 - k_3)(k_2 - k_1), \qquad (k_3 - k_1)(k_3 - k_2)$$

qui entrent dans les formules (7) et (9), ont encore une signification intéressante.

Eliminons les vecteurs $\vec{u'}, \vec{v'}, \vec{w'}$ entre quatre des formules (4). Nous aurons par exemple l'équation

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{SQ_1'} & k_1 & k_3 & k_2 \\ \overrightarrow{SQ_1} & k_1 & k_2 & k_3 \\ \overrightarrow{SQ_2} & k_3 & k_1 & k_2 \\ \overrightarrow{SQ_3} & k_2 & k_3 & k_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous supposons $k_1 + k_2 + k_3 \neq 0$, on peut écrire cette équation sous la forme

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{SQ_1'} & k_1 & k_3 & 1 \\ \overrightarrow{SQ_1} & k_1 & k_2 & 1 \\ \overrightarrow{SQ_2} & k_3 & k_1 & 1 \\ \overrightarrow{SQ_3} & k_2 & k_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\overrightarrow{SQ_1'} = \frac{(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)\overrightarrow{SQ_1} + (k_2 - k_3)(k_2 - k_1)\overrightarrow{SQ_2} + (k_3 - k_1)(k_3 - k_2)\overrightarrow{SQ_3}}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - k_2 k_3 - k_3 k_1}.$$

Cette formule montre que Q_1' *est le barycentre des masses* $(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)$, $(k_2 - k_3)(k_2 - k_1)$, $(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)$ placées en Q_1, Q_2, Q_3.

On obtient de la même façon la formule

$$\overrightarrow{SQ_1} = \frac{(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)\overrightarrow{SQ_1'} + (k_3 - k_2)(k_3 - k_1)\overrightarrow{SQ_2'} + (k_2 - k_1)(k_2 - k_3)\overrightarrow{SQ_3'}}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - k_2 k_3 - k_3 k_1}$$

qui montre que Q_1 *est le barycentre des masses* $(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)$, $k_3 - k_2)(k_3 - k_1)$, $(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)$ *placées en* Q_1', Q_2', Q_3'.
