BULL. MATH. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de Roumanie
Tome 9 (57), nr. 1, 1965

LA REPRÉSENTATION DE LA DIFFÉRENCE DIVISÉE GÉNÉRALISÉE D'UNE FONCTION PAR UNE INTÉGRALE DÉFINIE DANS LE CAS DES NOEUDS MULTIPLES (II)

PAR

D. V. IONESCU (Cluj)

1. Considérons une fonction $f \in C^n[a, b]$ et $k+1$ noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_k$ multiples d'ordres $n_0, n_1, \ldots, n_k$ où $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots \ldots < x_k \leqslant b$ et $n_0 + n_1 + \ldots + n_k = n + 1$. La différence divisée de la fonction $f(x)$ sur ces noeuds peut être représentée par une intégrale définie

$$\frac{1}{V(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{n_0}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{n_k})} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ (1)' & (x_0)' & \ldots & (x_0^{n-1})' & f'(x_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1)^{(n_0-1)} & (x_0)^{(n_0-1)} & \ldots & (x_0^{n-1})^{(n_0-1)} & f^{(n_0-1)}(x_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_k & & x_k^{n-1} & f(x_k) \\ (1)' & (x_k)' & & (x_k^{n-1})' & f'(x_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1)^{(n_k-1)} & (x_k)^{(n_k-1)} & & (x_k^{n-1})^{(n_k-1)} & f^{(n_k-1)}(x_k) \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_k} \varphi(x) f^{(n)}(x) \,\mathrm{d}x \tag{1}$$

et on écrit aussi cette formule sous la forme

$$[\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{n_0}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{n_k}; f] = \int_{x_0}^{x_k} \varphi(x) f^{(n)}(x) \,\mathrm{d}x \tag{2}$$

La formule (2) a été donnée pour la premiere fois par L. TCHAKALOFF [5] et nous l'avons retrouvée dans notre travail [2]. Nous avons fait une étude approfondie de la fonction $\varphi(x)$ et nous avons démontré notamment qu'elle est positive sur l'intervalle (x_0, x_k).

Dans ce travail nous étendons la formule (1) au cas où le système

$$1,\ x, \ldots,\ x^{n}, \ldots \tag{3}$$

et remplacé par un système

$$y_0(x),\ y_1(x), \ldots,\ y_n(x) \tag{4}$$

sur lequel nous faisons les mêmes hypothèses que dans notre travail sur la représentation de la différence divisée généralisée d'une fonction par une intégrale définie dans le cas des noeuds simples [3]. Cela nous permet d'introduire les opérateurs

$$L_n[f] = \frac{W[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, f]}{W[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]} \tag{5}$$

et de continuer la théorie déja exposée dans le cas des noeuds simples. Dans la première partie de ce travail, nous démontrerons la formule

$$\frac{1}{D(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{n_0}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{n_k})}\begin{vmatrix} y_0(x_0) & y_1(x_0) & \ldots & y_{n-1}(x_0) & f(x_0) \\ y_0'(x_0) & y_1'(x_0) & \ldots & y_{n-1}'(x_0) & f'(x_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0^{(n_0-1)}(x_0) & y_1^{(n_0-1)}(x_0) & \ldots & y_{n-1}^{(n_0-1}(x_0) & f^{(n_0-1)}(x_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0(x_k) & y_1(x_k) & \ldots & y_{n-1}(x_k) & f(x_k) \\ y_0'(x_k) & y_1'(x_k) & \ldots & y_{n-1}'(x_k) & f'(x_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0^{(n_k-1)}(x_k) & y_1^{(n_k-1)}(x_k) & \ldots & y_{n-1}^{(n_k-1)}(x_k) & f^{(n_k-1}(x_k) \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_k} \varphi\, L_n[f]\, \mathrm{d}x \tag{6}$$

où

$$D(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{n_0}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{n_k}) = \begin{vmatrix} y_0(x_0) & y_1(x_0) & \ldots & y_{n-1}(x_0) & y_n(x_0) \\ y_0'(x_0) & y_1'(x_0) & \ldots & y_{n-1}'(x_0) & y_n'(x_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0^{(n_0-1}(x_0) & y_1^{(n_0-1}(x_0) & \ldots & y_{n-1}^{(n_0-1}(x_0) & y_n^{(n_0-1)}(x_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0(x_k) & y_1(x_k) & \ldots & y_{n-1}(x_k) & y_n(x_k) \\ y_0'(x_k) & y_1'(x_k) & \ldots & y_{n-1}'(x_k) & y_n'(x_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0^{(n_k-1)}(x_k) & y_1^{(n_k-1)}(x_k) & \ldots & y_{n-1}^{(n_k-1)}(x_k) & y_n^{(n_k-1)}(x_k) \end{vmatrix} \tag{7}$$

Dans la seconde partie de ce travail nous étudierons la fonction $\varphi(x)$ et nous démontrerons qu'elle ne s'annule pas sur l'intervalle (x_0, x_k).

§ 1. Problème aux limites.

2. Considérons les fonctions f et $\psi \in C^n [a, b]$, l'opérateur

$$L_n [f] = \frac{W[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, f]}{W[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]} = f^{(n)} + a_1(x) f^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) f \tag{8}$$

et son adjoint

$$L_n^* [\psi] = (-1)^n [\psi^{(n)} - (a_1 \psi)^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n a_n \psi]. \tag{9}$$

Entre ces opérateurs nous avons l'identité

$$\psi L_n [f] - f L_n^* [\psi] = (H [f, \psi])' \tag{10}$$

où

$$H[f, \psi] = \psi f^{(n-1)} - [\psi' - (a_1 \psi)] f^{(n-2)} + [\psi'' - (a_1 \psi)' + (a_2 \psi)] f^{(n-3)} -$$
$$- \ldots + (-1)^{n-1} [\psi^{(n-1)} - (a_1 \psi)^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-1} (a_{n-1} \psi)] f. \tag{11}$$

Nous prenons sur l'intervalle $[a, b]$ les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_k$ multiples d'ordres $n_0, n_1, \ldots, n_k$, où $x_0 < x_1 < \ldots < x_k$ et $n_0 + n_1 + \ldots \ldots + n_k = n + 1$. Aux intervalles $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1}, x_k]$ nous attachons les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, solutions des équations différentielles

$$L_n^* [\varphi_1] = 0, \; L_n^* [\varphi_2] = 0, \ldots, L_n^* [\varphi_k] = 0 \tag{12}$$

Si nous remplaçons dans l'identité (10) la fonction ψ par φ_j et si nous intégrons les deux membres de x_{j-1} à x_j, nous avons

$$H [f, \varphi_j] \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_j L_n [f] \, dx.$$

En faisant la somme de ces formules relativement à $j = 1, 2, \ldots, k$ membre à membre, nous avons

$$\sum_{j=1}^{k} H[f, \varphi_j)] \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} = \int_{x_0}^{x_k} \varphi L_n [f] \, dx \tag{13}$$

où la fonction φ coïncide sur les intervalles $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1} x_k]$ avec les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$.

Si l'on introduit les conditions aux limites

$$\begin{array}{llll}
\varphi_1(x_0) = 0, & \varphi_1'(x_0) = 0, & \ldots, & \varphi_1^{(n-n_0-1)}(x_0) = 0 \\
\varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1), & \varphi_2'(x_1) = \varphi_1'(x_1), & \ldots, & \varphi_2^{(n-n_1-1)}(x_1) = \varphi_1^{(n-n_1-1)}(x_1) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\varphi_k(x_{k-1}) = \varphi_{k-1}(x_{k-1}), & \varphi_k'(x_{k-1}) = \varphi_{k-1}'(x_{k-1}), & \ldots, & \varphi_k^{(n-n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) = \varphi_{k-1}^{(n-n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) \\
\varphi_k(x_k) = 0, & \varphi_k'(x_k) = 0, & \ldots, & \varphi_k^{(n-n_k-1)}(x_k) = 0
\end{array} \tag{14}$$

et si nous supposons que le système d'équations différentielles (12) avec les conditions aux limites (14) admet une solution, alors la formule (13) se reduit à une formule de la forme

$$\sum_{j_1=0}^{n_0-1} A_0^{(j_1)} f^{(j_1)}(x_0) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} A_1^{(j_2)} f^{(j_2)}(x_1) + \ldots + \sum_{j_k=0}^{n_{k-1}-1} A_{k-1}^{(j_k)} f^{(j_k)}(x_{k-1}) +$$
$$+ \sum_{j_{k+1}}^{n_k-1} A_k^{(j_{k+1})} f^{(j_{k+1})}(x_k) = \int_{x_0}^{x_k} \varphi L_n[f]\, dx, \tag{15}$$

où nous avons

$$\begin{aligned}
&A_0^{(0)} = -\varphi_1^{(n-1)}(x_0),\ A_0^{(1)} = \varphi_1^{(n-2)}(x_0), \ldots, A_0^{(n_0-1)} = (-1)^{n_0} \varphi_1^{(n-n_0)}(x_0),\\
&A_1^{(0)} = \varphi_1^{(n-1}(x_1) - \varphi_2^{(n-1)}(x_1),\ A_1^{(1)} = -[\varphi_1^{(n-2)}(x_1) - \varphi_2^{(n-2}(x_1)], \ldots\\
&\ldots, A_1^{(n_1-1)} = (-1)^{n_1-1}[\varphi_1^{(n-n_1)}(x_1) - \varphi_2^{(n-n_1)}(x_1)]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (16)\\
&A_{k-1}^{(0)} = \varphi_{k-1}^{(n-1)}(x_{k-1}) - \varphi_k^{(n-1)}(x_{k-1}),\ A_{k-1}^{(1)} = -[\varphi_{k-1}^{(n-2)}(x_{k-1}) - \varphi_k^{(n-2)}(x_{k-1})], \ldots\\
&\ldots, A_{k-1}^{(n_{k-1}-1)} = (-1)^{n_{k-1}-1}[\varphi_{k-1}^{(n-n_{k-1})}(x_{k-1}) - \varphi_k^{(n-n_{k-1})}(x_{k-1})]\\
&A_k^{(0)} = \varphi_k^{(n-1}(x_k),\ A_k^{(1)} = -\varphi_k^{(n-2)}(x_k), \ldots, A_k^{(n_k-1)} = (-1)^{n_k-1}\varphi_k^{(n-n_k)}(x_k).
\end{aligned}$$

Nous démontrerons que la formule (15) se réduit à la formule (6) qui fait l'objet de ce travail. Pour cela nous devons d'abord intégrer les équations différentielles (12) avec les conditions aux limites (14).

3. Considérons la fonction de CAUCHY

$$G(x, s) = y_0(x) z_0(s) + y_1(x) z_1(s) + \ldots + y_{n-1}(x) z_{n-1}(s) \tag{17}$$

où

$$z_0 = (-1)^{n-1} \frac{W[y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}]}{W[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]},\ z_1 = (-1)^{n-2} \frac{W[y_0, y_2, \ldots, y_{n-1}]}{W[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]}, \ldots$$
$$\ldots, z_{n-1} = (-1)^0 \frac{W[y_0, y_1, \ldots, y_{n-2}]}{W[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]}$$

On sait que si nous considérons les dérivées partielles

$$\frac{\partial^{h+j} G}{\partial x^h \partial s^j}(x, s) = y_0^{(h)}(x) z_0^{(j)}(s) + y_1^{(h)}(x) z_1^{(j)}(s) + \ldots + y_{n-1}^{(h)}(x) z_{n-1}^{(j)}(s),$$

nous avons

$$\frac{\partial^{h+j} G}{\partial x^h \partial s^j}(x, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } h + j < n - 1 \\ (-1)^j & \text{si } h + j = n - 1 \end{cases} \tag{18}$$

Il résulte alors que la fonction de s

$$\theta_h(x, s) = \frac{\partial^h G}{\partial x^h}(x, s) \tag{19}$$

est une solution de l'équation différentielle $L_n^*[z] = 0$ et satisfait aux conditions

$$\theta_h(x, x)=0, \frac{\partial \theta_h}{\partial s}(x, x)=0,\ldots, \frac{\partial^{n-h-2}\theta_h}{\partial s^{n-h-2}}(x, x)=0, \frac{\partial^{n-h-1}\theta_h}{\partial s^{n-h-1}}(x, x)=(-1)^{n-h-1} \tag{20}$$

En remplaçant x par x_{i-1} et s par x, nous déduisons que la fonction

$$\theta_{ih}(x) = (-1)^{n-h-1}\, \theta_h(x_{i-1}, x), \tag{21}$$

qu'on peut encore écrire sous la forme

$$\theta_{ih}(x) = \frac{(-1)^{n-h-1}}{W[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]}\begin{vmatrix} y_0^{(h)}(x_{i-1}) & y_1^{(h)}(x_{i-1}) & \ldots & y_{n-1}^{(h)}(x_{i-1}) \\ y_0(x) & y_1(x) & \ldots & y_{n-1}(x) \\ y_0'(x) & y_1'(x) & \ldots & y_{n-1}'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0^{(n-2)}(x) & y_1^{(n-2)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) \end{vmatrix}, \tag{22}$$

est une solution de l'équation différentielle $L_n^*[z] = 0$ et vérifie les conditions

$$\theta_{ih}(x_{i-1}) = 0,\ \theta_{ih}'(x_{i-1}) = 0,\ldots, \theta_{ih}^{(n-h-2)}(x_{i-1}) = 0,\ \theta_{ih}^{(n-h-1)}(x_{i-1}) = 1 \tag{23}$$

Les fonctions $\theta_{ih}(x)$ sont utiles à l'intégration des équations différentielles (12) avec les conditions aux limites (14).

4. Les fontions

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \sum_{j_1=0}^{n_0-1} (-1)^{n-j_1-1} C_0^{(j_1)}\, \theta_{1j_1}(x) \\
\varphi_2(x) &= \sum_{j_1=0}^{n_0-1} (-1)^{n-j_1-1} C_0^{(j_1)}\, \theta_{1j_1}(x) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} (-1)^{n-j_2-1} C_1^{(j_2)}\, \theta_{2j_2}(x) \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_k(x) &= \sum_{j_1=0}^{n_0-1} (-1)^{n-j_1-1} C_0^{(j_1)}\, \theta_{1j_1}(x) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} (-1)^{n-j_2-1} C_1^{(j_2)}\, \theta_{2j_2}(x) + \ldots \\
&\quad \ldots + \sum_{j_k=0}^{n_{k-1}-1} (-1)^{n-j_k-1} C_{k-1}^{(j_k)}\, \theta_{kj_k}(x)
\end{aligned} \tag{24}$$

vérifient les équations différentielles (12) et les conditions aux limites (14) relativement aux points $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$.

Il reste à déterminer les constantes $C_0^{(j_1)}, C_1^{(j_2)}, \ldots, C_{k-1}^{(j_k)}$ de manière à satisfaire aussi les conditions aux limites (14) du point x_k.

Remarquons qu'on peut écrire la fonction φ_k aussi sous la forme

$$\varphi_k(x) = U(x)\, T(x) \tag{25}$$

où

$$U(x) = \frac{1}{W[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]} \tag{26}$$

$$T(x) = \begin{vmatrix} C'_0 & C'_1 & \ldots & C'_{n-1} \\ y_0(x) & y_1(x) & \ldots & y_{n-1}(x) \\ y'_0(x) & y'_1(x) & \ldots & y'_{n-1}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0^{(n-2)}(x) & y_1^{(n-2)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) \end{vmatrix} \tag{27}$$

avec

$$\begin{aligned} C'_0 &= \sum_{j_1=0}^{n_0-1} C_0^{(j_1)} y_0^{(j_1)}(x_0) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} C_1^{(j_2)} y_0^{(j_2)}(x_1) + \ldots + \sum_{j_k=0}^{n_{k-1}-1} C_{k-1}^{(j_k)} y_0^{(j_k)}(x_{k-1}) \\ C'_1 &= \sum_{j_1=0}^{n_0-1} C_0^{(j_1)} y_1^{(j_1)}(x_0) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} C_1^{(j_2)} y_1^{(j_2)}(x_1) + \ldots + \sum_{j_k=0}^{n_{k-1}-1} C_{k-1}^{(j_k)} y_1^{(j_k)}(x_{k-1}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C'_{n-1} &= \sum_{j_1=0}^{n_0-1} C_0^{(j_1)} y_{n-1}^{(j_1)}(x_0) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} C_1^{(j_2)} y_{n-1}^{(j_2)}(x_1) + \ldots + \sum_{j_k=0}^{n_{k-1}-1} C_{k-1}^{(j_k)} y_{n-1}^{(j_k)}(x_{k-1}) \end{aligned} \tag{28}$$

En procédant comme dans notre travail [3], on peut montrer qu'on peut écrire les conditions aux limites (14) du point x_k, sous la forme

$$T(x_k) = 0,\ T'(x_k) = 0, \ldots,\ T^{(n-n_k-1)}(x_k) = 0 \tag{29}$$

et en faisant les calculs, on est conduit aux équations

$$\begin{vmatrix} y_0(x_k) & y_1(x_k) & \ldots & y_{n-1}(x_k) \\ y'_0(x_k) & y'_1(x_k) & \ldots & y'_{n-1}(x_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0^{(n_k-1)}(x_k) & y_1^{(n_k-1)}(x_k) & \ldots & y_{n-1}^{(n_k-1)}(x_k) \\ C'_0 & C'_1 & \ldots & C'_{n-1} \\ y_0^{(n_k+1)}(x_k) & y_1^{(n_k+1)}(x_k) & \ldots & y_{n-1}^{(n_k+1)}(x_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0^{(n-1)}(x_k) & y_1^{(n-1)}(x_k) & \ldots & y_{n-1}^{(n-1)}(x_k) \end{vmatrix} = 0, \tag{30}$$

$$\begin{vmatrix} y_0(x_k) & y_1(x) & \ldots & y_{n-1}(x_k) \\ y'_0(x_k) & y'_1(x_k) & \ldots & y'_{n-1}(x_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0^{(n_k)}(x_k) & y_1^{(n_k)}(x_k) & \ldots & y_{n-1}^{(n_k)}(x_k) \\ C'_0 & C'_1 & \ldots & C'_{n-1} \\ y_0^{(n_k+2)}(x_k) & y_1^{(n_k+2)}(x_k) & \ldots & y_{n-1}^{(n_k+2)}(x_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0^{(n-1)}(x_k) & y_1^{(n-1)}(x_k) & \ldots & y_{n-1}^{(n-1)}(x_k) \end{vmatrix} = 0, \ldots, \begin{vmatrix} y_0(x_k) & y_1(x_k) & \ldots & y_{n-1}(x_k) \\ y'_0(x_k) & y'_1(x_k) & \ldots & y'_{n-1}(x_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0^{(n-2)}(x_k) & y_1^{(n-2)}(x_k) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(x_k) \\ C'_0 & C'_1 & \ldots & C'_{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Considérons le déterminat

$$W[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]_{x_k} = \begin{vmatrix} y_0(x_k) & y_1(x_k) & \ldots y_{n-1}(x_k) \\ y_0'(x_k) & y_1'(x_k) & \ldots y_{n-1}'(x_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_0^{(n-1)}(x_k) & y_1^{(n-1)}(x_k) & \ldots y_{n-1}^{(n-1)}(x_k) \end{vmatrix} \tag{31}$$

et désignons par B_{ik} le complément algébrique de l'élément situé sur la ligne de rang i et sur la colonne de rang k. Alors on peut écrire les équations (30) sous la forme

$$\begin{aligned} B_{n_k+1,1}\, C_0' + B_{n_k+1,2}\, C_1' + \ldots + B_{n_k+1,n}\, C_{n-1}' &= 0 \\ B_{n_k+2,1}\, C_0' + B_{n_k+2,2}\, C_1' + \ldots + B_{n_k+2,n}\, C_{n-1}' &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ B_{n,1}\, C_0' + B_{n,2}\, C_1' + \ldots + B_{n,n}\, C_{n-1}' &= 0. \end{aligned} \tag{32}$$

On vérifie facilement que les équations (30) ou (32) ont les solutions

$$\begin{aligned} &C_0' = y_0(x_k), \quad C_1' = y_1(x_k), \quad \ldots, \quad C_{n-1}' = y_{n-1}(x_k) \\ &C_0' = y_0'(x_k), \quad C_1' = y_1'(x_k), \quad \ldots, \quad C_{n-1}' = y_{n-1}'(x_k) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &C_0' = y_0^{(n_k-1)}(x_k), \quad C_1' = y_1^{(n_k-1)}(x_k), \ldots, \quad C_{n-1}' = y_{n-1}^{(n_k-1)}(x_k) \end{aligned} \tag{33}$$

et plus généralement

$$\begin{aligned} &C_0' = -\sum_{j_{k+1}=0}^{n_k-1} C_k^{(j_{k+1})} y_0^{(j_{k+1})}(x_k), \quad C_1' = -\sum_{j_{k+1}=0}^{n_k-1} C_k^{(j_{k+1})} y_1^{(j_{k+1})}(x_k), \ldots \\ &\qquad \ldots, C_{n-1}' = -\sum_{j_{k+1}=0}^{n_k-1} C_k^{(j_{k+1})} y_{n-1}^{(j_{k+1})}(x_k) \end{aligned} \tag{34}$$

où $C_k^{(0)}, C_k^{(1)}, \ldots, C_k^{(n_k-1)}$ sont n_k constantes quelconques.

En remplaçant dans les équations (28), les constantes $C_0', C_1', \ldots, C_{n-1}'$ par les seconds membres des formules (34) nous avons le système de n équations linéaires et homogènes

$$\begin{aligned} &\sum_{j_1=0}^{n_0-1} C_0^{(j_1)} y_0^{(j_1)}(x_0) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} C_1^{(j_2)} y_0^{(j_2)}(x_1) + \ldots + \sum_{j_k=0}^{n_{k-1}-1} C_{k-1}^{(j_k)} y_0^{(j_k)}(x_{k-1}) + \\ &\qquad + \sum_{j_{k+1}=0}^{n_k-1} C_k^{(j_{k+1})} y_0^{(j_{k+1})}(x_k) = 0 \\ &\sum_{j_1=0}^{n_0-1} C_0^{(j_1)} y_1^{(j_1)}(x_0) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} C_1^{(j_2)} y_1^{(j_2)}(x_1) + \ldots + \sum_{j_k=0}^{n_{k-1}-1} C_{k-1}^{(j_k)} y_1^{(j_k)}(x_{k-1}) + \\ &\qquad + \sum_{j_{k+1}=0}^{n_k-1} C_k^{(j_{k+1})} y_1^{(j_{k+1})}(x_k) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\sum_{j_1=0}^{n_0-1} C_0^{(j_1)} y_{n-1}^{(j_1)}(x_0) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} C_1^{(j_2)} y_{n-1}^{(j_2)}(x_1) + \ldots + \sum_{j_k=0}^{n_{k-1}-1} C_{k-1}^{(j_k)} y_{n-1}^{(j_k)}(x_{k-1}) +$$
$$+ \sum_{j_{k+1}=0}^{n_k-1} C_k^{(j_{k+1})} y_{n-1}^{(j_{k+1})}(x_k) = 0 \tag{35}$$

pour déterminer les n_0 constantes $C_0^{(j_1)}$, les n_1 constantes $C_1^{(j_2)}, \ldots$, les n_k constantes $C_k^{(j_k+1)}$.

Le rang de la matrice des coeficients du système (35) est n, parce-qu'on peut former avec les éléments de cette matrice, au moins le déterminant

$$D(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{n_0}, \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{n_k})$$

qui est différent de zéro, quels que soient les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_k$ sur l'intervalle $[a, b]$, cela étant une propriété importante des fonctions de la suite (4), qui résulte des hypothèses faites dans notre travail [3]. Il résulte alors qu'en désignant par $M_0^{(0)}, M_0^{(1)}, \ldots, M_k^{(n_k-1}$ les déterminants qu'on obtient de la matrice des coeficients du système (35) en supprimant la première, la seconde,..., la dernière colonne de la matrice, nous aurons :

$$\frac{C_0^{(0)}}{M_0^{(0)}} = \frac{C_0^{(1)}}{-M_0^{(1)}} = \ldots = \frac{C_0^{(n_0-1)}}{(-1)^{n_0-1} M_0^{(n_0-1)}} =$$
$$= \frac{C_1^{(0)}}{(-1)^{n_0} M_1^{(0)}} = \frac{C_1^{(1)}}{(-1)^{n_0+1} M_1^{(1)}} = \ldots = \frac{C_1^{(n_1-1)}}{(-1)^{n_0+n_1-1} M_1^{(n_1-1}} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{C_k^{(0)}}{(-1)^{n_0+\cdots+n_{k-1}} M_k^{(0)}} = \frac{C_k^{(1)}}{(-1)^{n_0+\cdots+n_{k-1}+1} M_k^{(1)}} = \tag{36}$$
$$= \ldots = \frac{C_k^{(n_k-1)}}{(-1)^{n_0+\cdots+n_k-1} M_k^{(n_k-1)}} = M$$

où M est une constante que nous préciserons plus loin.

Les constantes $C_0^{(0)}, C_0^{(1)}, \ldots, C_k^{(n_k-1)}$ sont ainsi déterminées et par suite les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ sont aussi déterminées. La formule (15) est donc valable et nous pouvons l'utiliser.

En écrivant que le premier membre de la formule (15) est nul lorsque la fonction f est remplaçée par $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ nous avons un système de n équations linéaires et homogènes identique au système (35). On peut résoudre ce système par des formules analogues aux formules (36).

En prenant pour les deux suites de rapports égaux la même constante M, nous aurons les égalités

$$\begin{aligned} &A_0^{(0)} = C_0^{(0)},\ A_0^{(1)} = C_0^{(1)}, \ldots, A_0^{(n_0-1)} = C_0^{(n_0-1)} \\ &A_1^{(0)} = C_1^{(0)},\ A_1^{(1)} = C_1^{(1)}, \ldots, A_1^{(n_1-1)} = C_1^{(n_1-1)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A_k^{(0)} = C_k^{(0)},\ A_k^{(1)} = C_k^{(1)}, \ldots, A_k^{(n_k-1)} = C_k^{(n_k-1)} \end{aligned} \tag{37}$$

et par suite

$$\begin{aligned} &A_0^{(0)} = MM_0^{(0)} \quad A_1 = (-1)^{n_0} MM_1^{(0)}, \ldots, \quad A_k^{(0)} = (-1)^{n_0+\cdots+n_{k-1}} MM_k^{(0)} \\ &A_0^{(1)} = -MM_0^{(1)} \quad A_1^{(1)} = (-1)^{n_0+1} MM_1^{(1)}, \ldots, A_k^{(1)} = (-1)^{n_0+\cdots+n_{k-1}+1} MM_k^{(1)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A_0^{(n_0-1)} = (-1)^{n_0-1} MM_0^{(n_0-1)}, A_{1_1}^{(n_1-1)} = (-1)^{n_0+n_1-1} MM_1^{(n_1-1)}, \ldots, A_k^{(n_k-1)} = \\ &\qquad = (-1)^{n_0+\cdots+n_k-1} MM_k^{(n_k-1)} \end{aligned} \tag{38}$$

Si nous remplaçons maintenant dans la formule (15) les coefficients $A_0^{(0)}, A_0^{(1)}, \ldots, A_k^{(n_k-1)}$ par les formules (38) nous aurons

$$\int_{x_0}^{x_k} \varphi\, L_n[f]\, \mathrm{d}x = (-1)^n M \Delta$$

où Δ est le déterminant de la formule (6).

En choisissant

$$M = \frac{(-1)^n}{\Delta_1} \tag{39}$$

où

$$\Delta_1 = D\,(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{n_0}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{n_k}) \tag{40}$$

nous aurons

$$\frac{\Delta}{\Delta_1} = \int_{x_0}^{x_k} \varphi\, L_n[f]\, \mathrm{d}x \tag{41}$$

et par suite nous avons démontré la formule (6).

Nous avons donc le

Théorème 1. *La différence divisée généralisée de la fonction* $f \in C^n[a, b]$ *sur les noeuds* $x_0, x_1, \ldots, x_k \in [a, b]$, *multiples d'ordres* $n_0, n_1, \ldots, n_k$ *où* $n_0 + n_1 + \ldots + n_k = n + 1$, *est représentée par une intégrale définie, ce qui veut dire que nous avons la formule* (41), *où la fonction* φ *est donnée par les formules* (24) *avec les constantes* $C_0^{(0)}, C_0^{(1)}, \ldots, C_k^{(n_k-1)}$ *données par les formules* (37), (38), (39), (40).

Nous étudierons dans la seconde partie de ce travail la fontion φ et nous démontrerons qu'elle ne s'annule pas sur l'intervalle (x_0, x_k).

§ 2. L'étude de la fonction φ

5. La fonction φ coïncide sur les intervalles $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{k-1}, x_k]$ avec les fonction $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ données par les formules

$$\varphi_1(x) = \sum_{j_1=0}^{n_0-1} (-1)^{n-j_1-1} A_0^{(j_1)} \theta_{1,j_1}(x)$$

$$\varphi_2(x) = \sum_{j_1=0}^{n_0-1} (-1)^{n-j_1-1} A_0^{(j_1)} \theta_{1,j_1}(x) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} (-1)^{n-j_2-1} A_1^{(j_2)} \theta_{2,j_2}$$

. . . .

$$\varphi_k(x) = \sum_{j_1=0}^{n_0-1} (-1)^{n-j_1-1} A_0^{(j_1)} \theta_{1,j_1}(x) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} (-1)^{n-j_2-1} A_1^{(j_2)} \theta_{2,j_2}(x) + \cdots$$
$$+ \sum_{j_k=0}^{n_{k-1}-1} (-1)^{n-j_k-1} A_{k-1}^{(j_k)} \theta_{k,j_k}(x) \tag{42}$$

où les fonctions $\theta_{i,h}(x)$ sont données par les formules (22).

Ces fonctions vérifient les équations différentielles (12) et les conditions aux limites (14), que nous écrivons à l'aide des opérateurs $L_k^*[z]$, de notre travail [3], sous la forme

$$L_0^*[\varphi_1]_{x_0} = 0, \quad L_1^*[\varphi_1]_{x_0} = 0, \ldots, L_{n-n_0-1}^*[\varphi_1]_{x_0} = 0$$

$$L_0^*[\varphi_2]_{x_1} = L_0^*[\varphi_1]_{x_1}, L_1^*[\varphi_2]_{x_1} = L_1^*[\varphi_1]_{x_1}, \ldots, L_{n-n_1-1}^*[\varphi_2]_{x_1} = L_{n-n_1-1}^*[\varphi]_{x_1}$$

. . . . (43)

$$L_0^*[\varphi_k]_{x_{k-1}} = L_0^*[\varphi_{k-1}]_{x_{k-1}}, L_1^*[\varphi_k]_{x_{k-1}} = L_1^*[\varphi_{k-1}]_{x_{k-1}}, \ldots, L_{n-n_{k-1}-1}^*[\varphi_k]_{x_{k-1}} =$$
$$= L_{n-n_{k-1}-1}^*[\varphi_{k-1}]_{x_{k-1}}, L_0^*[\varphi_k]_{x_k} = 0, L_1^*[\varphi_k]_{x_k} = 0, \ldots, L_{n-n_k-1}^*[\varphi_k]_{x_k} = 0$$

Dans notre travail il est très important le

Théorème 2. *Les opérateurs différentiels*

$$L_{n-1}^*[\varphi_1], \; L_{n-1}^*[\varphi_2], \ldots, L_{n-1}^*[\varphi_k] \tag{44}$$

ne s'annulent pas sur les intervalles $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{k-1}, x_k]$.

Pour démontrer ce théorème, nous donnerons d'abord quelques théorèmes sur les coefficients de la formule fondamentale (15).

En général l'équation différentielle adjointe $L_n^*[z] = 0$ admet l'intégrale première

$$L_{n-1}^*[z] = \frac{C}{y_0(x)}. \tag{45}$$

Il nous reste à démontrer que si l'on remplaçe la fonction z par φ_1, ou $\varphi_2, \ldots$, ou φ_k la constante C est différente de zéro.

6. La formule (22) montre que

$$\theta_{l,h}(x) = (-1)^k [y_0^{(h)}(x_{l-1}) z_0(x) + y_1^{(h)}(x_{l-1}) z_1(x) + \ldots + y_{n-1}^{(h)}(x_{l-1}) z_{n-1}(x)]$$

de sorte que

$$L_{n-1}^*[\theta_{l,h}] = (-1)^h \{y_0^{(h)}(x_{l-1}) L_{n-1}^*[z_0] + y_1^{(h)}(x_{l-1}) L_{h-1}^*[z_1] + \ldots +$$
$$+ y_{n-1}^{(h)}(x_{l-1}) L_{n-1}^*[z_{n-1}]\}.$$

Mais

$$L_{n-1}^*[z] = (-1)^{n-1} \frac{W[z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z]}{W[z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}]}$$

et par suite

$$L_{n-1}^*[z_1] = 0, \ L_{n-1}^*[z_2] = 0, \ldots, \ L_{n-1}^*[z_{n-1}] = 0.$$

D'autre part, nous avons [3]

$$L_{n-1}^*[z_0] = \frac{1}{y_0(x)}.$$

et il résulte que

$$L_{n-1}^*[\theta_{l,h}] = (-1)^h \frac{y_0^{(h)}(x_{l-1})}{y_0(x)} \tag{46}$$

En utilisant les formules (42) et (46), nous aurons

$$L_{n-1}^*[\varphi_l] = \frac{(-1)^{n-1}}{y_0(x)} S_l \tag{47}$$

pour $l = 1, 2, \ldots, k$, où

$$S_l = \sum_{j_1=0}^{n_0-1} A_0^{(j_1)} y_0^{(j_1)}(x_0) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} A_1^{(j_2)} y_0^{(j_2)}(x_1) + \ldots + \sum_{j_l=0}^{n_{l-1}-1} A_{l-1}^{(j_l)} y_0^{(j_l)}(x_{l-1}). \tag{48}$$

Il nous reste à démontrer que les nombres $S_1, S_2, \ldots, S_k$ ne sont pas nuls.

7. Désignons par $h(x)$ le polynôme généralisé d'interpolation

$$h(x) = \alpha_0 y_0(x) + \alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_{n-1} y_{n-1}(x), \tag{49}$$

déterminé par les conditions suivantes

$$\begin{array}{lll}
h(x_0) = y_0(x_0) & h(x_{l-1}) = y_0(x_{l-1}) & h(x_l) = 0 \\
h'(x_0) = y_0'(x_0) & h'(x_{l-1}) = y_0'(x_{l-1}) & h'(x_l) = 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
h^{(n_0-1)}(x_0) = y_0^{(n_0-1)}(x_0) \ldots & h^{(n_{l-1}-1)}(x_{l-1}) = y_0^{(n_{l-1}-1)}(x_{l-1}) \ldots & h^{(n_l-1)}(x_l) = 0 \\
& h(x_{k-1}) = 0 & h(x_k) = 0 \\
& h'(x_{k-1}) = 0 & h'(x_k) = 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
& h^{(n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) = 0 & h^{(n_k-2)}(x_k) = 0.
\end{array} \tag{50}$$

Ce polynôme est bien déterminé, parce que le déterminant du système d'équations linéaires en $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ est

$$D(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{n_0}, \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{n_k-1}) \neq 0 \tag{51}$$

En remplaçant dans la formule (15) la fonction f par le polynôme généralisé h, nous aurons d'après les conditions (50)

$$S_l + A_k^{(n_k-1)} h^{(n_k-1)}(x_k) = 0. \tag{52}$$

D'après les formules (38), nous avons $A_k^{(n_k-1)} \neq 0$. Il nous reste à démontrer que $h^{(n_k-1)}(x_k) \neq 0$.

8. Théorème 3. *Si $h(x)$ est le polynôme généralisé d'interpolation, qui satisfait aux conditions (50), nous avons*

$$h^{(r_k-1)}(x_k) \neq 0, \tag{53}$$

pour $l = 1, 2, \ldots, k$.

Remarquons d'abord que le polynôme $h(x)$ n'est pas identiquement nul, parceque d'après les conditions (50) nous avons $h(x_0) = y_0(x_0) \neq 0$.

Posons

$$h(x) = y_0(x)\, h_1(x) \tag{54}$$

ce qui est possible, parceque nous avons $y_0(x) \neq 0$, sur l'intervalle $[x_0, x_k]$. Nous aurons

$$h_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{y_1(x)}{y_0(x)} + \ldots + \alpha_{n-1} \frac{y_{n-1}(x)}{y_0(x)} \tag{55}$$

et

$$h_1'(x) = \alpha_1 y_{1,1}(x) + \alpha_2 y_{1,2}(x) + \ldots + \alpha_{n-1} y_{1,n-1}(x) \tag{56}$$

où

$$y_{1,1}(x) = \left(\frac{y_1(x)}{y_0(x)}\right)', \quad y_{1,2}(x) = \left(\frac{y_2(x)}{y_0(x)}\right)', \ldots, \quad y_{1,n-1}(x) = \left(\frac{y_{n-1}(x)}{y_0(x)}\right)' \qquad (T_1).$$

La formule (56) montre que $h_1'(x)$ est un polynôme généralisé construit avec les fonctions (T_1) qui forment un système TCHEBYCHEFF [3].

Le polynôme généralisé $h_1(x)$ vérifient les conditions

$$\begin{array}{llll}
h_1(x_0) = 1 & h_1(x_1) = 1 & h_1(x_{l-1}) = 1 & h_1(x_l) = 0 \\
h_1'(x_0) = 0 & h_1'(x_1) = 0 & h_1'(x_{l-1}) = 0 & h_1'(x_l) = 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
h_1^{(n_0-1)}(x_0) = 0 & h_1^{(n_1-1)}(x_1) = 0 & h_1^{(n_{l-1}-1)}(x_{l-1}) = 0 & h_1^{(n_l-1)}(x_l) = 0 \\
 & h_1(x_{k-1}) = 0 & h_1(x_k) = 0 & \\
 & h_1'(x_{k-1}) = 0 & h_1'(x_k) = 0 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & h_1^{(n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) = 0 & h_1^{(n_k-2)}(x_k) = 0 &
\end{array} \tag{57}$$

et nous avons

$$h^{(n_k-1)}(x_k) = y_0(x_k)\, h^{(n_k-1)}(x_k). \tag{58}$$

Supposons d'abord $n_k > 1$ et désignons par p l'ordre le plus grand des dérivées qui figurent dans les formules (57). Considérons l'ensemble des points $x_0, x_1, \ldots, x_k$ et désignons par $m_1, m_2, \ldots, m_p$ les nombres des points de cet ensemble qui sont les zéros de $h_1'(x), h_1''(x), \ldots, h_1^{(p)}(x)$. Il est evident que d'après les conditions (57) nous avons

$$1 + k + m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n_0 + n_1 + \ldots + n_k - 1 = n,$$

de sorte que

$$k + m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n-1. \tag{59}$$

Il est facile de démontrer à l'aide du théorème de Rolle que la dérivée $h_1'(x)$ a $k + m_1 - 1$ zéros distincts sur l'intervalle $[x_0, x_k]$, que la dérivée $h_1''(x)$ a $k + m_1 + m_2 - 2$ zéros distincts sur l'intervalle $[x_0, x_k], \ldots$, et que la dérivée $h_1^{(p)}(x)$ a

$$N = k + m_1 + m_2 + \ldots + m_p - p = n - p - 1$$

zéros distincts sur l'intervalle $[x_0, x_k]$.

On peut écrire les fonctions de la suite (T_1) sous la forme

$$\begin{gathered} y_{1,1}(x) = \frac{W[y_0, y_1]}{y_0^2}, \quad y_{1,2}(x) = \frac{W[y_0, y_2]}{y_0^2}, \ldots \\ \ldots, y_{1,n-1}(x) = \frac{W[y_0, y_{n-1}]}{y_0^2}. \end{gathered} \tag{T_1}$$

En posant

$$h_1'(x) = y_{1,1}(x)\, h_2(x) = \frac{W[y_0, y_1]}{y_0^2}\, h_2(x),$$

nous avons

$$h_2(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{y_{1,2}(x)}{y_{1,1}(x)} + \alpha_3 \frac{y_{1,3}(x)}{y_{1,1}(x)} + \ldots + \alpha_{n-1} \frac{y_{1,n-1}(x)}{y_{1,1}(x)}$$

et

$$h_2'(x) = \alpha_2 y_{2,2}(x) + \alpha_3 y_{2,3}(x) + \ldots + \alpha_{n-1} y_{2,n-1}(x)$$

ce qui veut dire que $h_2'(x)$ est un polynôme généralisé construit avec les fonctions

$$\begin{gathered} y_{2,2}(x) = \left(\frac{y_{1,2}(x)}{y_{1,1}(x)}\right)' = y_0 \frac{W[y_0, y_1, y_2]}{W^2[y_0, y_1]} \\ y_{2,3}(x) = \left(\frac{y_{1,3}(x)}{y_{1,1}(x)}\right)' = y_0 \frac{W[y_0, y_1, y_3]}{W^2[y_0, y_1]} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{2,n-1}(x) = \left(\frac{y_{1,n-1}(x)}{y_{1,1}(x)}\right)' = y_0 \frac{W[y_0, y_1, y_{n-1}]}{W^2[y_0, y_1]} \end{gathered} \tag{T_2}$$

On remarque que la fonction $h_2(x)$ vérifie sur les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_k$ des conditions qu'on obtient du tableau (57) en supprimant la première ligne et en diminuant les ordres de dérivées d'une unité. Il résulte que le nombre des zéros de $h_2'(x)$ sur l'intervalle $[x_0, x_k]$ est $k + m_1 + m_2 - 2$, il est égal au nombre des zéros de $h_1''(x)$ sur le même intervalle.

On peut continuer ce procédé régulier et nous poserons finalement

$$h'_{p-1}(x) = y_{p-1,p-1}(x)\, h_p(x) = W[y_0, y_1, \ldots, y_{p-3}] \frac{W[y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}]}{W^2[y_0, y_1, \ldots, y_{p-2}]} h_p(x)$$

et nous aurons

$$h_p(x) = \alpha_{p-1} + \alpha_p \frac{y_{p-1,p}(x)}{y_{p-1,p-1}(x)} + \alpha_{p+1} \frac{y_{p-1,p+1}(x)}{y_{p-1,p-1}(x)} + \ldots + \alpha_{n-1} \frac{y_{p-1,n-1}(x)}{y_{p-1,p-1}(x)}$$

et

$$h'_p(x) = \alpha_p\, y_{p,p}(x) + \alpha_{p+1}\, y_{p,p+1}(x) + \ldots + \alpha_{n-1}\, y_{p,n-1}(x)$$

ce qui veut dire que $h'_p(x)$ est un polynôme généralisé construit avec les fonctions

$$\begin{aligned} y_{p,p}(x) &= \left(\frac{y_{p-1,p}(x)}{y_{p-1,p-1}(x)}\right)' = W[y_0, y_1, \ldots, y_{p-2}] \frac{W[y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}, y_p]}{W^2[y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}]} \\ y_{p,p+1}(x) &= \left(\frac{y_{p-1,p+1}(x)}{y_{p-1,p-1}(x)}\right)' = W[y_0, y_1, \ldots, y_{p-2}] \frac{W[y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}, y_{p+1}]}{W^2[y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}]} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (T_p) \\ y_{p,n-1}(x) &= \left(\frac{y_{p-1,n-1}(x)}{y_{p-1,p-1}(x)}\right)' = W[y_0, y_1, \ldots, y_{p-2}] \frac{W[y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}, y_{n-1}]}{W^2[y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}]} \end{aligned}$$

On remarque que la fonction $h_p(x)$ vérifie sur les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_k$ des conditions qu'on obtient du tableau (57) en supprimant les $p - 1$ premières lignes et en diminuant les ordres des dérivées de $p - 1$. Il résulte que le nombre des zéros de $h'_p(x)$ sur l'intervalle $[x_0, x_k]$ est

$$k + m_1 + m_2 + \ldots + m_p - p = N = n - p - 1 \qquad (60)$$

ce qui veut dire qu'il est égal au nombre des zéros de $h_1^{(p)}(x)$ sur l'intervalle $[x_0, x_k]$.

Les fonctions des suites (T_1), (T_2), …, (T_p) forment des systèmes TCHEBYCHEFF. Il résulte alors que le nombre maximum des zéros de la dérivée $h'_p(x)$ est justement égal au nombre N donné par la formule (60).

Une fois connu le nombre maximum des zéros de $h'_p(x)$ il est facile de démontrer que $h^{(n_k-1)}(x_k) \neq 0$. D'après la formule (58) il suffira de démontrer que $h_1^{(n_k-1)}(x_k) \neq 0$.

Nous allons considérer trois cas selon que $n_k - 2 \leqslant p - 2$, $n_k - 2 = p - 1$ $n_k - 2 = p$, c'est dire $n_k \leqslant p$, $n_k = p + 1$, $n_k = p + 2$.

1°. $n_k \leqslant p$. En supposant $h_1^{(n_k-1)}(x_k) = 0$, on est conduit a $h_{n_k}(x_k) = 0$. En appliquant le théorème de ROLLE, il résulte que les dérivées $h'_{n_k}(x)$, $h'_{n_k+1}(x), \ldots, h'_p(x)$ doivent avoir encore un zéro à droite des zéros déja mis en évidence précédemment, ce qui est impossible parceque le nombre maximum des zéros de $h'_p(x)$ est $N = n - p - 1$. Il y a donc une contradiction et par suite nous avons $h_1^{(n_k-1)}(x_k) \neq 0$.

2°. $n_k = p+1$. En supposant $h_1^{(n_k-1)}(x_k) = h_1^{(p)}(x_k) = 0$, on est conduit à $h'_p(x_k) = 0$, ce qui est impossible, parce qu'on a démontré que le nombre maximum des zéros de h'_p est $N = n - p - 1$ et que ces zéros sont tous à gauche de x_k. Il y a donc une contradiction et par suite $h_1^{(n_k-1)}(x_k) \neq 0$.

3°. $n_k = p + 2$. La dérivée $h'_p(x)$ a $N = n - p - 1$ zéros sur l'intervalle $[x_0, x_k]$, x_k étant un de ces zéros. En supposant $h_1^{(n_k-1)}(x_k) = h_1^{(p+1)}(x_k) = 0$, nous pouvons passer encore de $h'_p(x)$ à $h_{p+1}(x)$ en posant

$$h'_p(x) = W[y_0, y_1, \ldots, y_{p-2}] \frac{W[y_0, y_1, \ldots, y_p]}{W^2[y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}]} h_{p+1}(x)$$

et nous aurons

$$h'_{p+1}(x) = \alpha_{p+1} y_{p+1, p+1}(x) + \alpha_{p+2} y_{p+1, p+2}(x) + \ldots + \alpha_{n-1} y_{p+1, n-1}(x)$$

où les fonctions

$$y_{p+1\ p+1}(x),\ y_{p+1, p+2}(x), \ldots, y_{p+1, n-1}(x)$$

forment un système TCHEBYCHEFF sur l'intervalle $[a, b]$.

Le polynôme généralisé $h_{p+1}(x)$ ayant $N = n - p - 1$ zéros distincts, sa dérivée $h'_{p+1}(x)$ aura $n - p - 2$ zéros distincts à gauche de x_k. Mais en supposant $h_1^{(p+1)}(x_k) = 0$, nous avons $h'_{p+1}(x_k) = 0$ et par suite la dérivée $h'_{p+1}(x)$ a $n - p - 1$ zéros sur l'intervalle $[x_0, x_k]$. Mais cela est impossible puisqu'un polynôme généralisé formé avec les fonctions $y_{p+1, j}(x)$ a au plus $n - p - 2$ zéros. On est arrivé à une contradiction d'où, il résulte que $h_1^{(n_k-1)}(x_k) \neq 0$.

Ainsi nous avons démontré dans les trois cas que $h^{(n_k-1)}(x_k) \neq 0$.

Supposqons maintenant que $n_k = 1$, ce qui veut dire que

$$n_0 + n_1 + \ldots + n_{k-1} = n.$$

Dans ce cas considérons le polynôme généralisé d'interpolation $h(x)$ déterminé par les conditions (50) relativement aux points $x_0, x_1, \ldots, x_{l-1}, x_l, \ldots, x_{k-1}$ seulement. En remplaçant dans la formule (15) la fonction f par le polynôme généralisé h, nous avons

$$S_l + A_k^{(0)} h(x_k) = 0$$

où $A_k^{(0)} \neq 0$. Pour démontrer que $S_l \neq 0$ pour $l = 1, 2, \ldots, k$, *il nous reste à démontrer que* $h(x_k) \neq 0$.

En faisant le changement (54), le polynôme $h_1(x)$ vérifie les conditions (57) relativement aux points $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ seulement.

En procédant comme dans le cas $n_k > 1$, désignons par p l'ordre le plus grand des dérivées qui figurent dans les formules (57) relativement aux points $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$.

Désignons aussi par $m_1, m_2, \ldots, m_p$ le nombre des points de l'ensemble $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ qui sont des zéros de $h_1'(x), h_1''(x), \ldots, h_1^{(p)}(x)$. Nous avons

$$k + m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n_0 + n_1 + \ldots + n_{k-1} = n \tag{61}$$

On démontre à l'aide du théorème de Rolle que la dérivée $h_1'(x)$ a $k + m_1 - 2$ zéros distincts sur l'intervalle $[x_0, x_{k-1}]$, que la dérivée $h_1''(x)$ a $k + m_1 + m_2 - 3$ zéros sur l'intervalle $[x_0, x_{k-1}], \ldots$, et que la dérivée $h_1^{(p)}(x)$ a

$$N_1 = k + m_1 + m_2 + \ldots + m_p - (p+1) = n - p - 1$$

zéros sur l'intervalle $[x_0, x_{k-1}]$.

On démontre comme dans le cas $n_k > 1$, que

$$h_1'(x) = \alpha_1 y_{1,1}(x) + \alpha_2 y_{1,2}(x) + \ldots + \alpha_{n-1} y_{1,n-1}(x)$$

et en posant

$$h_1'(x) = \frac{W[y_0, y_1]}{y_0^2} h_2(x)$$

nous avons

$$h_2'(x) = \alpha_2 y_{2,2}(x) + \alpha_3 y_{2,3}(x) + \ldots + \alpha_{n-1} y_{2,n-1}(x).$$

On continue de la même manière jusqu'à

$$h_{p-1}'(x) = W[y_0, y_1, \ldots, y_{p-3}] \frac{W[y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}]}{W^2[y_0, y_1, \ldots, y_{p-2}]} h_p(x)$$

et nous avons

$$h_p'(x) = \alpha_p y_{p,p}(x) + \alpha_{p+1} y_{p,h+1}(x) + \ldots + \alpha_{n-1} y_{p,n-1}(x) \tag{62}$$

On remarque que la fonction $h_2(x)$ vérifie sur les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ des conditions, qu'on obtient du tableau (57), en suprimant la première ligne et en diminuant les ordres des dérivées d'une unite. Il résulte que le nombre des zéros de $h_2'(x)$ sur l'intervalle $[x_0, x_{k-1}]$ est $k + m_1 + m_2 - 3$ et on remarque que ce nombre est égal au nombre des zéros de $h_1''(x)$ sur l'intervalle $[x_0, x_{k-1}]$.

La fonction $h_p(x)$ vérifie sur les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ des conditions qu'on obtient du tableau (57) en supprimant les $p - 1$ premières lignes et en diminuant les ordres des dérivées de $p - 1$. Il résulte que le nombre des zéros de $h_p'(x)$ sur l'intervalle $[x_0, x_{k-1}]$ est

$$k + m_1 + m_2 + \ldots + m_p - (p+1) = N_1 = n - p - 1 \tag{63}$$

ce qui veut dire qu'il est égal au nombre des zéros de $h_1^{(p)}(x)$ sur l'intervalle $[x_0, x_{k-1}]$.

Les fonctions $y_{p,p}(x), y_{p,p+1}(x), \ldots, y_{p,n-1}(x)$ forment un système Tchebycheff sur l'intervalle $[a, b]$ et par suite le nombre maximum des zéros de $h_p'(x)$, d'après la formule (62), est $n - p - 1$ c'est qui veut dire, qu'il est égal au nombre N_1.

Cela étant, nous pouvons démontrer facilement que $h(x_k) \neq 0$. Pour cela supposons le contraire c'est-à-dire $h(x_k) = 0$. Nous avons aussi $h_1(x_k) = 0$ et en appliquant successivement le théorème de ROLLE, on démontre que chaque dérivée $h_1'(x)$, $h_2'(x)$, ..., $h_p'(x)$ a encore un zéro situé à droite des zéros déja mis en évidence plus haut.

On est ainsi conduit à affirmer que $h_p'(x)$ a $n-p-1+1=n-p$ zéros, ce qui est impossible puisqu'on a démontré que le nombre maximum des zéros de h_{p+1}' este $n-p-1$. Il y a donc une contradiction et par suite $h(x_k) \neq 0$.

Le théorème 3 est ainsi complétement démontré et nous avons $h^{(n_k-1)}(x_k) \neq 0$, pour $n_k \geqslant 1$.

Il résulte alors, d'après les formules (52) que $S_l \neq 0$, pour $l=1, 2, \ldots, k$ et d'après les formules (47) il résulte que *les opérateurs*

$$L_{n-1}^*[\varphi_1],\ L_{n-1}^*[\varphi_2],\ \ldots,\ L_{n-1}^*[\varphi_k]$$

ne s'annulent pas sur les intervalles (x_0, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{k-1}, x_k) *ce qui démontre le théorème 2.*

9. Désignons par $n - n_i - 1$ le plus petit nombre de la suite

$$n - n_1 - 1,\ n - n_2 - 1,\ \ldots,\ n - n_{k-1} - 1. \tag{64}$$

La fonction φ est continue sur l'intervalle $[x_0, x_k]$ ainsi que ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $n - n_i - 1$. Ses dérivées d'ordre plus grand que $n - n_i - 1$ sont encore continues sur certains sous intervalles de $[x_0, x_k]$.

En particulier la fonction φ est continue avec ses dérivées jusqu'au $n^{\text{ème}}$ ordre sur chaque intervalle $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{k-1}, x_k]$.

Il est très important pour la suite, de préciser le nombre des zéros de $L_{n-n_i-1}^*[\varphi]$, sur l'intervalle (x_0, x_k). Il est donné par le

Théorème 4. *Le nombre N des zéros de $L_{n-n_i-1}^*[\varphi]$ sur l'intervalle (x_0, x_k) est*

$$\begin{aligned}
N &= n + n_i - n_0 - n_k + 1 \quad \textit{si}\ n - n_0 - 1\ \textit{et}\ n - n_k - 1 < n - n_i - 1\\
N &= n - n_0 \quad \textit{si}\ n - n_0 - 1 < n - n_i - 1 \leqslant n - n_k - 1\\
N &= n - n_k \quad \textit{si}\ n - n_k - 1 < n - n_i - 1 \leqslant n - n_0 - 1\\
N &= n - n_i - 1 \quad \textit{si}\ n - n_0 - 1 \geqslant n - n_i - 1\ \textit{et}\ n - n_k - 1 \geqslant n - n_i - 1.
\end{aligned} \tag{65}$$

La démonstration de ce théorème résultera de plusieurs propositions auxiliaires.

1°. Considérons un intervalle $[x_j, x_{j+1})$, avec $j \neq 0$ et attachons à ses extrémités les nombres $n - n_j - 1$ et $n - n_{j+1} - 1$. Nous avons la Première proposition: *Le nombre des zéros de $L_{n-n_j-1}^*[\varphi]$ et $L_{n-n_{j+1}-1}^*[\varphi]$ sur l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ est $m = n_i$ et $m' = n_{j+1}$.*

En effet, soit m le nombre des zéros de $L_{n-n_j-1}^*[\varphi]$ sur l'intervalle $[x_j, x_{j+1})$. En appliquant successivement le théorème généralisé de ROLLE, nous déduisons que $L_{n-n_1}^*[\varphi]$ a $m - n_j$ zéros sur l'intervalle (x_j, x_{j+1}). Mais d'après le théorème 2, $L_{n-1}^*[\varphi]$ ne s'annule pas sur l'intervalle (x_j, x_{j+1}). Nous avons donc $m = n_j$.

On démontre de la même manière que le nombre des zéros de $L^*_{n-n_{j+1}-1}[\varphi]$ sur l'intervalle $[x_j, x_{j+1})$ est $m' = n_{j+1}$.

2°. Considérons un groupe de noeuds $x'_1, x'_2, \ldots, x'_r$ consécutives de l'ensemble $x_1, x_2, \ldots, x_k$ avec leurs ordres de multiplicite $n'_1, n'_2, \ldots, n'_r$. Désignons par $n - n' - 1$ le plus petit des nombres

$$n - n'_2 - 1, \quad n - n'_3 - 1, \ \ldots, \ n - n'_{r-1} - 1.$$

Nous avons la

Seconde proposition. *Le nombre des zéros de* $L^*_{n-n'_1-1}[\varphi]$ *sur l'intervalle* $[x'_1, x'_r)$ est

$$m = n'_1 + n'_2 + \ldots + n'_{r-1} \ \textit{si} \ n-n'_1-1 \leqslant n-n'-1 \ \textit{et} \ n-n'_r-1 \leqslant n-n'-1 \tag{66}$$

De même le nombre des zéros de $L^*_{n-n'_r-1}[\varphi]$ *sur l'intervalle* (x'_1, x'_r) est

$$m' = n'_2 + n'_3 + \ldots + n'_r \ \textit{si} \ n-n'_1-1 \leqslant n-n'-1 \ \textit{et} \ n-n'_r-1 \leqslant n-n'-1 \tag{67}$$

Nous démontrerons cette proposition par la méthode de l'induction complète et nous commençons par l'établir pour $r = 3$.

Supposons que $n - n'_1 - 1 \leqslant n - n'_2 - 1$ et désignons par m le nombre des zéros de $L^*_{n-n'_1-1}[\varphi]$ sur l'intervalle $[x'_1, x'_3)$. Nous pouvons appliquer le théorème de Rolle généralisé à l'opérateur $L^*_{n-n'_1-1}[\varphi]$ et nous déduisons que $L^*_{n-n'_1}[\varphi]$ a $m - 1$ zéros sur l'intervalle $[x'_1, x'_3), \ldots$, et que $L^*_{n-n'_2-1}[\varphi]$ a $m - n'_1 + n'_2$ zéros sur l'intervalle $[x'_1, x'_3)$. Mais d'après la première proposition $L^*_{n-n'_2-1}[\varphi]$ a n'_2 zéros sur l'intervalle $[x'_1, x'_2)$ et n'_2 zéros sur l'intervalle $[x'_2, x'_3)$. Nous avons donc $m - n'_1 + n'_2 = 2n'_2$, d'où il résulte que $m = n'_1 + n'_2$. La formule (66) est donc démontrée pour $r = 3$.

On démontre de la même manière que si $n - n'_3 - 1 \leqslant n - n'_2 - 1$, le nombre m' des zéros de $L^*_{n-n'_3-1}[\varphi]$ sur l'intervalle $[x'_1, x'_3)$ est $m' = n'_2 + n'_3$ et par suite la formule (67) est démontrée pour $r = 3$.

Supposons que la seconde proposition est vraie pour $r = 3, 4, \ldots, l - 1$ et démontrons la pour $r = l$.

Désignons pour cela par $n - n'_j - 1$ le plus petit des nombres

$$n - n'_2 - 1, \ n - n'_3 - 1, \ \ldots, \ n - n'_{l-1} - 1$$

et par x'_j l'un des points $x'_2, x'_3, \ldots, x'_{l-1}$ qui correspond a $n - n'_j - 1$. Nous pouvons appliquer la seconde proposition aux groupes de points $(x'_1, \ldots, x'_j)$ et $(x'_j, \ldots, x'_l)$ dont le nombre des points est plus petit que l.

Soit m le nombre des zéros de $L^*_{n-n'_1-1}[\varphi]$ sur l'intervalle $[x'_1, x'_l)$. En appliquant le théorème de Rolle généralisé, il résultera que $L^*_{n-n'_j-1}[\varphi]$

aura $m - n'_1 + n'_j$ zéros sur l'intervalle $[x'_1,\ x'_j)$. Mais en appliquant la seconde proposition à l'opérateur $L^*_{n-n'_j-1}[\varphi]$ et à l'intervalle $[x'_1,\ x'_j)$ et ensuite à l'intervalle $[x'_j,\ x'_l)$, nous déduisons que le nombre des zéros de $L^*_{n-n'_j-1}[\varphi]$ sur l'intervalle $[x'_1,\ x'_l)$ est

$$(n'_2 + \dots + n'_j) + (n'_j + \dots + n'_{l-1})$$

Nous avons donc

$$m - n'_1 + n'_j = (n'_2 + \dots + n'_j) + (n'_j + \dots + n_{l-1})$$

d'où il résulte que

$$m = n'_1 + n'_2 + \dots + n'_{l-1}$$

Ainsi nous avons démontré la formule (66).

On démontre de la même manière que le nombre des zéros de $L^*_{n-n'_l-1}[\varphi]$ sur l'intervalle $[x'_1,\ x'_l)$ est

$$m' = n'_2 + n'_3 + \dots + n'_l$$

et par suite la formule (67) est démontrée.

3° Désignons par x_h le noeud qui correspond à $n - n'_h - 1$ et supposons que les nombres

$$n - n_1 - 1,\ n - n_2 - 1,\ \dots,\ n - n_{h-1} - 1$$

sont plus grands que $n - n_h - 1$. Nous avons la

T r o i s i è m e p r o p o s i t i o n. *Le nombre des zéros de* $L^*_{n-n_h-1}[\varphi]$ *sur l'intervalle* $(x_0,\ x_h)$ *est*

$$m = n_1 + n_2 + \dots + n_h \ \textit{si}\ n - n_0 - 1 < n - n_h - 1 \tag{68}$$

$$m = n_0 - 1 + n_1 + n_2 + \dots + n_{h-1} \ \textit{si}\ n - n_0 - 1 \geqslant n - n_h - 1. \tag{69}$$

Nous démontrerons cette proposition par la méthode de l'induction complète et nous commençons par établir les formules (68) et (69) pour $h = 1$.

Supposons que $n - n_0 - 1 < n - n_1 - 1$ et désignons par m le nombre des zéros de $L^*_{n-n_1-1}[\varphi]$ sur l'intervalle $(x_0,\ x_1)$. On peut appliquer successivement le théorème de ROLLE généralisé et nous déduisons que $L^*_{n-1}[\varphi]$ a $n - n_1$ zéros sur l'intervalle (x_0, x_1). Mais d'après le théorème 2, $L^*_{n-1}[\varphi]$ ne s'annule pas sur l'intervalle $(x_0,\ x_1)$. Il résulte que $m = n_1$ et la formule (68) est démontrée.

Il en est autrement si $n - n_0 - 1 \geqslant n - n_1 - 1$. Il faudra tenir compte dans les raisonnements précédents que d'après les conditions aux limites (43) du point x_0, $L^*_{n-n_1-1}[\varphi]$, $L^*_{n-n_1}[\varphi]$, ..., $L^*_{n-n_0-1}[\varphi]$ s'annulent en x_0. En appliquant successivement le théorème de ROLLE généralisé nous déduisons que $L^*_{n-n_1}[\varphi]$ s'annule en x_0 et en m points de l'intervalle $(x_0,\ x_1)$. On continue de le même manière et on arrive à la conclusion que $L^*_{n-n_0-1}[\varphi]$ s'annule en x_0 et en m points de l'intervalle $(x_0,\ x_1)$, que $L^*_{n-n_0}[\varphi]$ s'annule en m points de l'intervalle $(x_0,\ x_1)$, que $L^*_{n-n_0+1}[\varphi]$ s'annule en $m - 1$ points de l'intervalle $(x_0,\ x_1)$, ..., et que $L^*_{n-1}[\varphi]$ s'annule en $m - n_0 + 1$ points de l'intervalle (x_0, x_1). Mais d'après le théorème 2, $L^*_{n-1}[\varphi]$ ne s'annule pas sur l'intervalle (x_0, x_1). Donc $m = n_0 - 1$ et la formule (69) est démontrée.

Supposons maintenant que la troisième proposition a été démontrée pour $h < j$ et démontrons la encore pour $h = j$.

Le nombre $n - n_j - 1$ étant plus petit que $n - n_1 - 1$, $n - n_2 - 1, \ldots$ $\ldots, n - n_{j-1} - 1$, désignons par $n - n_l - 1$ le plus petit des nombres $n - n_1 - 1, \ldots, n - n_{j-1} - 1$ et par x_l le noeud le plus approché de x_0 qui correspond a $n - n_l - 1$.

D'après les conditions aux limites (14), la fonction $\varphi(x)$ est continue sur l'intervalle $[x_0, x_j]$, ainsi que ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $n - n_l - 1$. Désignons par m le nombre des zéros de $L^*_{n-n_j-1}[\varphi]$ sur l'intervalle (x_0, x_j).

Supposons $n - n_0 - 1 < n - n_j - 1$. En appliquant successivement le théorème de ROLLE généralisé, on déduit que $L^*_{n-n_l-1}[\varphi]$ a $m - n_j + n_l$ zéros sur l'intervalle (x_0, x_j).

Mais nous avons $n - n_0 - 1 < n - n_j - 1 < n - n_l - 1$ et le nombre des points $x_0, x_1, \ldots, x_l$ étant plus petit que j, nous pouvons appliquer à l'intervalle (x_0, x_l) la troisième proposition; le nombre ses zéros de $L^*_{n-n_l-1}[\varphi]$ sur l'intervalle (x_0, x_l) est $n_1 + n_2 + \ldots + n_l$. D'autre part le nombre des zéros de $L^*_{n-n_l-1}[\varphi]$ sur l'intervalle $[x_l, x_j)$ est donné par la seconde proposition; il est égal a $n_l + \ldots + n_{j-1}$.

Nous avons donc

$$m - n_j + n_l = (n_1 + \ldots + n_l) + (n_l + \ldots + n_{j-1}),$$

d'où il résulte que

$$m = n_1 + n_2 + \ldots + n_j$$

ce qui démontre la formule (68) en général.

Supposons $n - n_0 - 1 = n - n_j - 1$, c'est-à-dire $n_0 = n_j$. Le nombre des zéros de $L^*_{n-n_j-1}[\varphi]$ sur l'intervalle $[x_0, x_j)$ est $m + 1$, parce que nous avons $L^*_{n-n_0-1}[\varphi]_{x_0} = 0$. En appliquant successivement le théorème de ROLLE généralisé nous déduisons que $L^*_{n-n_1}[\varphi]$ a m zéros sur l'intervalle (x_0, x_j), $L^*_{n-n_j+1}[\varphi]$ a $m - 1$ zéros sur l'intervalle $(x_0, x_j), \ldots$, $L^*_{n-n_l-1}[\varphi]$ a $m + 1 - n_j + n_l$ zéros sur l'intervalle (x_0, x_j).

D'autre part, ayant $n - n_0 - 1 < n - n_l - 1$ nous pouvons appliquer la formule (68) relativement à l'intervalle (x_0, x_l) et ensuite nous pouvons appliquer la seconde proposition à l'intervalle $[x_l, x_j)$. Le nombre des zéros de $L^*_{n-n_l-1}[\varphi]$ sur l'intervalle (x_0, x_j) sera égal à $(n_1 + n_2 + \ldots + n_l) + (n_l + n_{l+1} + \ldots + n_{j-1})$. Nous aurons donc

$$m + 1 - n_j + n_l = (n_1 + \ldots n_l) + (n_l + \ldots + n_{j-1})$$

et par suite

$$m = n_0 - 1 + n_1 + \ldots + n_{j-1}$$

parceque $n_j = n_0$. La formule (69) est donc démontrée pour $n - n_0 - 1 =$ $= n - n_j - 1$.

Supposons $n - n_0 - 1 > n - n_j - 1$ Nous avons trois cas à examiner selon que $n - n_0 - 1 < n - n_l - 1$ ou $n - n_0 - 1 \geqslant n - n_l - 1$.

Dans le premier cas, nous avons $L^*_{n-n_j-1}[\varphi]_{x_0} = 0$, $L^*_{n-n_j}[\varphi]_{x_0} = 0, \ldots, L_{n-n_0-1}[\varphi]_{x_0} = 0$.

En appliquant successivement le théorème de ROLLE généralisé, nous déduisons que $L^*_{n-n_j}[\varphi]$ a $m+1$ zéros sur l'intervalle $[x_0, x_j)$, $L^*_{n-n_j+1}[\varphi]$ a $m+1$ zéros sur l'intervalle $[x_0, x_j), \ldots, L^*_{n-n_0-1}[\varphi]$ a $m+1$ zéros sur l'intervalle $[x_0, x_j)$. Ensuite $L^*_{n-n_0}[\varphi]$ a m zéros sur l'intervalle $(x_0, x_j), \ldots, L^*_{n-n_l-1}[\varphi]$ a $m + 1 - n_0 + n_l$ zéros sur l'intervalle (x_0, x_j).

Mais nous pouvons appliquer à l'intervalle (x_0, x_l) la formule (68) et ensuite la seconde proposition à l'intervalle $[x_l, x_j)$. Il résultera que le nombre des zéros de $L^*_{n-n_j-1}[\varphi]$ sur l'intervalle (x_0, x_i) est $(n_1 + n_2 + \ldots + n_l) + (n_l + \ldots + n_{j-1})$. Nous aurons donc

$$m + 1 - n_0 + n_l = (n_1 + \ldots + n_l) + (n_l + \ldots + n_{j-1})$$

et par suite

$$m = n_0 - 1 + n_1 + \ldots + n_{j-1}.$$

La formule (69) est donc démontrée dans ce cas.

Dans les autres cas, nous avons $n - n_j - 1 < n - n_0 - 1$ et $n - n_0 - 1 \geqslant n - n_l - 1$.

Nous avons $L^*_{n-n_j-1}[\varphi]_{x_0} = 0$, $L^*_{n-n_j}[\varphi]_{x_0} = 0, \ldots, L^*_{n-n_l-1}[\varphi]_{x_0} = 0$. Le nombre m des zéros de $L^*_{n-n_j-1}[\varphi]$ sur l'intervalle (x_0, x_j) coïncide avec le nombre des zéros de $L^*_{n-n_l-1}[\varphi]$ sur l'intervalle (x_0, x_j).

D'autre part, pour déterminer le nombre des zéros de $L^*_{n-n_l-1}[\varphi]$ sur l'intervalle (x_0, x_j), nous pouvons appliquer à l'intervalle (x_0, x_l) la formule (69), parceque $n - n_0 - 1 \geqslant n - n_l - 1$ et nous avons supposé que cette formule est vraie pour $l < j$. Ensuite nous pouvons appliquer à l'intervalle $[x_l, x_j)$, la seconde proposition. Nous aurons

$$m = n_0 - 1 + n_1 + \ldots + n_{l-1} + n_l + \ldots + n_{j-1}.$$

La formule (69) est ainsi démontrée en général.

Remarque. Le nombre $n - n_i - 1$ étant le plus petit des nombres

$$n - n_1 - 1,\ n - n_2 - 1,\ \ldots,\ n - n_{k-1} - 1$$

désignons par $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}$ les points qui correspondent à $n - n_i - 1$, le point x_{i_1} étant le plus rapproché de x_0.

Le nombre des zéros de $L^*_{n-n_i-1}[\varphi]$ *sur l'intervalle* (x_0, x_{i_r}) *est donné par*

$$m_r = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_{i_r} \text{ si } n - n_0 - 1 < n - n_i - 1 \qquad (70)$$

ou

$$m_r = n_0 - 1 + n_1 + \ldots + n_{i_r - 1} \text{ si } n - n_0 - 1 \geqslant n - n_i - 1. \qquad (71)$$

En effet si $n - n_0 - 1 < n - n_i - 1$, le nombre des zéros de $L^*_{n-n_i-1}[\varphi]$, sur l'intervalle (x_0, x_{i_r}) est égal à la somme des zéros de $L^*_{n-n_i-1}[\varphi]$ sur les intervalles (x_0, x_{i_1}), $[x_{i_1}, x_{i_2})$, ..., $[x_{i_r-1}, x_{i_r})$ qui sont donnés par la formule (68) et la seconde proposition. Nous aurons donc

$$m_r = (n_1 + \ldots + n_{i_1}) + (n_{i_1+1} + \ldots + n_{i_2}) + \ldots + (n_{i_{r-1}+1} + \ldots + n_{i_r})$$

ce qui démontre la formule (70).

Si $n - n_0 - 1 \geqslant n - n_i - 1$, nous aurons

$$m_r = (n_0 - 1 + n_1 + \ldots + n_{i_1-1}) + (n_{i_1+1} + \ldots + n_{i_2}) + \ldots + (n_{i_{r-1}+1} + \ldots + n_{i_r})$$

et nous pouvons écrire cette formule sous la forme

$$m_r = n_0 - 1 + n_1 + \ldots + n_{i_r-1},$$

puisque $n_{i_1} = n_{i_r}$. La formule (71) est donc démontrée.

4°. Désignons par x_h le noeud qui correspond à $n - n_h - 1$ et supposons que les nombres

$$n - n_{h+1} - 1,\ n - n_{h+2} - 1,\ \ldots,\ n - n_{k-1} - 1$$

sont plus grands que $n - n_h - 1$. Nous avons la

Quatrième proposition. *Le nombre m' des zéros de $L^*_{n-n_h-1}[\varphi]$ sur l'intervalle $[x_h, x_k)$ est donné par la formule*

$$m' = n_h + n_{h+1} + \ldots + n_{k-1} \quad si \quad n - n_k - 1 < n - n_h - 1 \tag{72}$$

$$m' = n_{h+1} + n_{h+2} + \ldots + n_k - 1 \quad si \quad n - n_k - 1 \geqslant n - n_h - 1 \tag{73}$$

La démonstration est analogue à la démonstration de la troisième proposition.

On peut ajouter une remarque analogue à celle faite à propos de la troisième proposition.

La demonstration du théorème 4 résulte immédiatement. Désignons comme plus haut par $n - n_i - 1$ le plus petit des nombres

$$n - n_1 - 1,\ n - n_2 - 1,\ \ldots,\ n - n_{k-1} - 1$$

et par x_i un des points qui correspond à $n - n_i - 1$. D'après les troisième et quatrième propositions, le nombre N des zéros de $L^*_{n-n_i-1}[\varphi]$ est la somme $m + m'$ des zéros de $L^*_{n-n_i-1}[\varphi]$ sur les intervalles (x_0, x_i) et $[x_i, x_k)$. Il résulte que

$$N = (n_1 + \ldots + n_i) + (n_i + \ldots + n_{k-1}) \text{ si } n - n_0 - 1 \text{ et } n - n_k - 1 < n - n_i - 1$$

ou bien

$$N = (n_1 + \ldots + n_i) + (n_{i+1} + \ldots + n_k - 1) \text{ si } n - n_0 - 1 < n - n_i - 1 \leqslant n - n_k - 1$$

ou bien

$$N = (-1 + n_0 + \ldots + n_{i-1}) + (n_i + \ldots + n_{k-1})$$
$$\text{si } n - n_k - 1 < n - n_i - 1 \leqslant n - n_0 - 1$$

ou bien

$$N = (-1 + n_0 + \ldots + n_{i-1}) + (n_{i+1} + \ldots + n_k - 1)$$
$$\text{si } n - n_0 - 1 \geqslant n - n_i - 1 \text{ et } n - n_k - 1 \geqslant n - n_i - 1.$$

Tenant compte de la relation

$$n+1=n_0+n_1+\ldots+n_{k-1}+n_k,$$

les formules précédentes se réduisent aux formule (65) et le quatrième théorème est par suite démontré.

10. Théorème 5. *La fonction φ de la formule (15) ne s'annule pas sur l'intervalle* (x_0, x_k).

Pour démontrer ce théorème reprenons le nombre $n-n_i-1$, qui est le plus petit des nombres de la suite

$$n-n_1-1,\ n-n_2-1,\ \ldots,\ n-n_{k-1}-1.$$

La fonction φ est continue sur l'intervalle $[x_0, x_k]$ avec ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $n-n_i-1$. Elle satisfait aux conditions aux limites (14), que nous avons écrit aussi sous la forme (43).

Si la fonction s'annulerait au moins une fois sur l'intervalle (x_0, x_k), on pourrait calculer le nombre N' des zéros de $L^*_{n-n_i-1}[\varphi]$ sur l'intervalle (x_0, x_k) en appliquant successivement le théorème de Rolle généralisé à $L^*_0[\varphi]$, $L^*_1[\varphi]$, ..., $L^*_{n-n_i-1}[\varphi]$. En comparant ce nombre avec le nombre N donné par le théorème 4, nous verrons qu'il y a une contradiction, d'où résultera que la fonction φ ne s'annule pas sur l'intervalle (x_0, x_k).

Pour calculer le nombre N' nous devons tenir compte des conditions aux limites (43) relativement aux points x_0 et x_k et aussi des relations qui existent entre les nombres $n-n_0-1$, $n-n_i-1$ et $n-n_k-1$.

1°. *Supposons que* $n-n_0-1<n-n_i-1$, $n-n_k-1<n-n_i-1$ et, pour préciser, que $n-n_0-1<n-n_k-1$.

Le théorème de Rolle généralisé montre que si la fonction φ s'annule en un point de l'intervalle (x_0, x_k), alors $L^*_1[\varphi]$ s'annule en deux points de l'intervalle (x_0, x_k), ..., $L^*_{n-n_0-1}[\varphi]$ s'annule en $n-n_0$ points de l'intervalle (x_0, x_k).

Ensuite en appliquant toujours le même théorème nous déduisons que $L^*_{n-n_0}[\varphi]$ s'anulle en $n-n_0+1$ points de l'intervalle (x_0, x_k), ..., $L^*_{n-n_k-1}[\varphi]$ s'annule en $n-n_0+1$ points de l'intervale (x_0, x_k).

Nous continuons par le même raisonnement et nous déduisons que $L^*_{n-n_k}[\varphi]$ s'annule en $n-n_0+1$ points de l'intervalle (x_0, x_k), ..., et que $L^*_{n-n_i-1}[\varphi]$, s'annule en

$$N'=n-n_0+n_i-n_k+2 \tag{74}$$

points de l'intervalle (x_0, x_k).

On arrive à la même conclusion si $n-n_0-1\geqslant n-n_k-1$.

2°. *Supposons que* $n-n_0-1<n-n_i-1\leqslant n-n_k-1$. On démontre de la même manière que

$$N'=n-n_0+1. \tag{74'}$$

3°. *Supposons que* $n-n_k-1<n-n_i-1\leqslant n-n_0-1$. On démontre de la même manière que

$$N'=n-n_k+1. \tag{74''}$$

4°. *Supposons que* $n-n_0-1 \geqslant n-n_i-1$ et $n-n_k-1 \geqslant n-n_i-1$. On démontre de la même manière que

$$N' = n - n_i. \tag{74'''}$$

Le nombre N' des zéros de $L^*_{n-n_i-1}[\varphi]$ sur l'intervalle (x_0, x_k) calculé en supposant que la fonction φ s'annule au moins une fois sur l'intervalle (x_0, x_k) et qui est donné par les formules (74), (74'), (74''), (74''') dépasse d'une unité le nombre N donné par le théorème 4.

Il y a donc une contradiction, d'où il résulte que la fonction φ ne s'annule pas sur l'intervalle (x_0, x_k) et par suite le théorème 5 est demontré.

11. Désignons par R le second membre de la formule (15) c'est-à-dire

$$R = \int_{x_0}^{x_k} \varphi L_n[f]\,\mathrm{d}x. \tag{75}$$

D'après le théorème 5, la fonction φ ne s'annule pas sur l'intervalle (x_0, x_k). Nous pouvons alors appliquer le théorème de la moyenne et nous aurons

$$R = L_n[f]_\xi \int_{x_0}^{x_k} \varphi\,\mathrm{d}x \tag{76}$$

où $\xi \in (x_0, x_k)$.

Pour calculer l'intégrale du second membre de la formule (76), traitons le problème suivant.

Trouver la solution θ *de l'équation différentiellle*

$$L\,[\theta] = 1 \tag{77}$$

qui satisfait aux conditions

$$\begin{array}{llll}
\theta(x_0) = 0 & \theta(x_1) = 0 \ldots & \theta(x_{k-1}) = 0 & \theta(x_k) = 0 \\
\theta'(x_0) = 0 & \theta'(x_1) = 0 \ldots & \theta'(x_{k-1}) = 0 & \theta'(x_k) = 0 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\theta^{(n_0-1)}(x_0) = 0 & \theta^{(n_1-1)}(x_1) = 0 \ldots & \theta^{(n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) = 0 & \theta^{(n_k-2)}(x_k) = 0.
\end{array} \tag{78}$$

Cette solution est de la forme

$$\theta(x) = K_0\,y_0(x) + K_1\,y_1(x) + \ldots + K_{n-1}\,y_{n-1}(x) + \int_{x_k}^{x} G(x, s)\,\mathrm{d}s \tag{79}$$

où $G(x, s)$ est la fonction de CAUCHY donnée par la formule (17) et où $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$ sont des constantes à déterminer par les conditions

(78). On trouve sans difficulté que la fonction θ est donnée par l'équation

$$\begin{vmatrix}
y_0(x_0) & \dots & y_{n-1}(x_0) & \int_{x_0}^{x_k} G(x_0, s)\,ds \\
y_0'(x_0) & \dots & y_{n-1}'(x_0) & \int_{x_0}^{x_k} \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, s)\,ds \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
y_0^{(n_0-1)}(x_0) & \dots & y_{n-1}^{(n_0-1)}(x_0) & \int_{x_0}^{x_k} \frac{\partial^{n_0-1} G}{\partial x^{n_0-1}}(x_0, s)\,ds \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
y_0(x_{k-1}) & \dots & y_{n-1}(x_{k-1}) & \int_{x_{k-1}}^{x_k} G(x_{k-1}, s)\,ds \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
y_0^{(n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) & \dots & y_{n-1}^{(n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) & \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\partial^{n_{k-1}-1} G}{\partial x^{n_{k-1}-1}}(x_{k-1}, s)\,ds \\
y_0(x_k) & \dots & y_{n-1}(x_k) & 0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
y_0^{(n_k-2)}(x_k) & \dots & y_{n-1}^{(n_k-2)}(x_k) & 0 \\
y_0(x) & \dots & y_{n-1}(x) & \int_{x}^{x_k} G(x, s)\,ds + \theta(x)
\end{vmatrix} = 0 \qquad (80)$$

En remplaçant dans la formule (15) la fonction f par θ, nous aurons

$$\int_{x_0}^{x_k} \varphi(x)\,dx = A_k^{(n_k-1)}\,\theta^{(n_k-1)}(x_k) \qquad (81)$$

où

$$A_k^{(n_k-1)} = \frac{D(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{n_0}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{x_{k-1}, \dots, x_{k-1}}_{n_{k-1}}, \underbrace{x_k, \dots, x_k}_{n_k-1})}{D(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{n_0}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{x_{k-1}, \dots, x_{k-1}}_{n_{k-1}}, \underbrace{x_k, \dots, x_k}_{n_k})} \qquad (82)$$

La dérivée $\theta^{(n_k-1)}$ se déduit de la formule (80). Nous aurons finalement

$$\int_{x_0}^{x_k} \varphi(x)\,dx = P_k \qquad (83)$$

où

$$- P_k = D^{-1}(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{n_0}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{n_k}) \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix}
y_0(x_0) & \ldots & y_{n-1}(x_0) & \displaystyle\int_{x_0}^{x_k} G(x_0, s)\, ds \\
y_0'(x_0) & \ldots & y_{n-1}'(x_0) & \displaystyle\int_{x_0}^{x_k} \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, s)\, ds \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_0^{(n_0-1)}(x_0) & \ldots & y_{n-1}^{(n_0-1)}(x_0) & \displaystyle\int_{x_0}^{x_k} \frac{\partial^{n_0-1} G}{\partial x^{n_0-1}}(x_0, s)\, ds \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_0(x_{k-1}) & \ldots & y_{n-1}(x_{k-1}) & \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} G(x_{k-1}, s)\, ds \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_0^{(n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) & \ldots & y_{n-1}^{(n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) & \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\partial^{n_{k-1}-1} G}{\partial x^{n_{k-1}-1}}(x_{k-1}, s)\, ds \\
y_0(x_k) & \ldots & y_{n-1}(x_k) & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_0^{(n_k-1)}(x_k) & \ldots & y_{n-1}^{(n_k-1)}(x_k) & 0
\end{vmatrix} \qquad (84)$$

Tenant compte du théorème 5 et de la formule (83) il résulte que *le signe de la fonction* φ *sur l'intervalle* (x_0, x_k) *est le signe du nombre* P_k *donné par la formule (84).*

En revenant à la formule (76) nous pouvons écrire

$$R = P_k L_n [f]_\xi \qquad (85)$$

où P_k est donné par le formule (84) et $\xi \in (x_0, x_k)$.

Il résulte alors que

$$|R| \leqslant P_k M_n, \quad M_n = \sup_{(x_0, x_k)} |L_n[f]| \qquad (86)$$

Prochainement nous donnerons des applications importantes de la représentation de la différence divisée généralisée par une intégrale définie.

Reçu le 2 mai 1965

BIBLIOGRAPHIE

[1] LIA ARAMĂ, Asupra unei teoreme a lui G. Mammana, Analele Universităţii Bucureşti, Mat.-Fiz. X, 63—69 (1961).

[2] D. V. IONESCU, Cuadraturi numerice, Editura tehnică Bucureşti, 1957, cap. III.

[3] D. V. IONESCU, La représentation de la différence divisée généralisée par une intégrale définie dans le cas des nœuds simples (I) (sous presse).

[4] G. PÓLYA, On the Mean-Value Theorem corresponding to a given Homogeneous Differential Equation, Amer. Math. S. Bull. 24. 312—324 (1922).

[5] L. TCHAKALOFF, Über eine Darstellung des Newtonschen Difcrenzen-Quotienten und ihre Anwendung, Congrès International des Mathématiciens, Oslo (1936).