BULL. MATH. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de Roumanie
Tome 12 (60), nr. 2, 1968

SUR QUELQUES FORMULES DE DÉRIVATION NUMÉRIQUE

PAR

D. V. IONESCU (Cluj)

Considérons les fonctions

$$y_0(x),\ y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x) \tag{1}$$

définies et dérivables sur l'intervalle $[a, b]$, autant de fois qu'il sera necessaire dans ce travail et telles que les déterminants de Wronski

$$W[y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_r] \tag{2}$$

soient différents de zéro sur l'intervalle $[a, b]$, pour $r = 0, 1, \ldots, n$.

Aux fonctions f et ψ de la classe $C^n[a, b]$, associons l'opérateur différentiel

$$L_n[f] = \frac{W[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, f]}{W[y_0,\ y_1,\ \ldots, y_{n-1}]} = f^{(n)} + a_1(x) f^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) f \tag{3}$$

et l'opérateur différentiel adjoint

$$L_n^*[\psi] = (-1)^n [\psi^{(n)} - (a_1\psi)^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n a_n \psi]. \tag{4}$$

On sait qu'il existe l'identité

$$\psi L_n[f] - f L_n^*[\psi] = (H(f,\ \psi))' \tag{5}$$

où

$$\begin{aligned} H(f, \psi) = \psi f^{(n-1)} - [\psi' - (a_1 \psi)'] f^{(n-2)} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-1} [\psi^{(n-1)} - (a_1 \psi)^{(n-2)} + \ldots + (-1)^n (a_{n-1} \psi)] f \end{aligned} \tag{6}$$

Cela étant rappelé, prenons sur l'intervalle (a, b) les noeuds x_0, $x_1, \ldots, x_k$ multiples d'ordres $n_0, n_1, \ldots, n_k$, où

$$n_0 + n_1 + \ldots + n_k = n + 1 \tag{7}$$

et attachons aux intervalles $[x_0, x_1]$, $[x_1,\ x_2], \ldots, [x_{k-1}, x_k]$ les fonctions $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_k$ solutions des équations différentielles

$$L_n^*[\varphi_1] = 0,\ \ L_n^*[\varphi_2] = 0,\ \ldots, L_n^*[\varphi_k] = 0. \tag{8}$$

Si dans l'identité (5), nous remplaçons la fonction ψ par φ_j et nous intégrons les deux membres de x_{j-1} à x_j nous avons

$$H(f, \varphi_j)\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_j L_n[f]\, ds \tag{9}$$

En prenant $j = 1, 2, \ldots, k$ et en faisant la somme des formules obtenues membre à membre, nous aurons la formule

$$\sum_{j=1}^{k} H(f, \varphi_j)\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} = \int_{x_0}^{x_k} \varphi L_n[f]\, ds \tag{10}$$

où la fonction φ, coïncide sur les intervalles $[x_0, x_1], \ldots, [x_{k-1}, x_k]$ avec les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$.

La formule (10) dépend de kn constantes quelconques.

On peut déterminer ces constantes, par des conditions aux limites imposées aux fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, relativement aux noeuds x_0, $x_1, \ldots, x_k$, de manière que dans la formule (10), ne figure que

$$\begin{array}{c} f(x_0),\ f'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n_0-1)}(x_0) \\ f(x_1),\ f'(x_1),\ \ldots,\ f^{(n_1-1)}(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_k),\ f'(x_k),\ \ldots,\ f^{(n_k-1)}(x_k) \end{array}$$

Nous désignons ces conditions par (C). On démontre que l'intégration des équations différentielles (8) avec les conditions aux limites (C) est possible et conduit à la représentation de la différence divisée généralisée de la fonction f

$$\{\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{n_0}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots x_k}_{n_k}; f\} \tag{11}$$

par une intégrale définie [1], par la formule

$$\{\underbrace{x_0, \ldots x_0}_{n_0}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{n_k}; f\} = \int_{x_0}^{x_k} \varphi L_n[f]\, ds \tag{12}$$

Mais si les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ ne vérifient pas les conditions aux limites (C), la formule (10) est différente de la formule (12). En intégrant les équations différentielles (8), avec des conditions aux limites convenablement choisies, nous mettrons en évidence dans ce travail, certaines classes de formules de dérivation numérique, que nous désignerons par (P).

Lorsque la suite de fonction (1) est $1, x, \ldots, x^n$, parmi les formules de dérivation numérique de la classe (P), on trouve certaines formules que nous avons appelées *formules fondamentales*, qui ont été étudiées aussi par l'Acad. T. POPOVICIU [4].

Dans le § 1 de ce travail nous faisons la théorie des formules de la classe (P) et de leurs restes.

Dans le § 2 nous faisons des applications de ces formules et nous généralisons de cette manière certaines formules qui ont été données par l'Acad. T. POPOVICIU [4].

Les principaux résultats de ce travail ont été donnés dans deux communications, au IV^{ème} Congrès interbalkanique de mathématiciens de Bucarest 1966 [2] et au Colloque sur les techniques de calcul de Bucarest 1967 [3].

§ 1. LES FORMULES DE DÉRIVATION NUMÉRIQUE DE LA CLASSE (P)

1. Les formules de dérivation numérique de la classe (P) sont caractérisées par un problème aux limites relativement aux équations différentielles (8), avec des conditions aux limites que nous préciserons plus loin.

Nous poserons $x_l = x$ et le noeud x appartiendra à l'intervalle (a, x_1), ou (x_0, x_2), $\ldots$, ou (x_{k-2}, x_k), ou $[x_{k-1}, b]$ selon que $l = 0$, ou $l = 1$, $\ldots$, ou $l = k - 1$, ou $l = k$.

Nous désignerons par (A_l) les conditions aux limites imposées aux fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ relativement aux noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_k$, le noeud x_l étant exclu, identiques aux conditions (C), relativement aux mêmes neuds.

Les conditions A_l seront donc les suivantes :

$$(A_0)\begin{cases} \varphi_2(x_1)=\varphi_1(x_1),\ \varphi_2'(x_1)=\varphi_1'(x_1),\ \ldots,\ \varphi_2^{(n-n_1-1)}(x_1)=\varphi_1^{(n-n_1-1)}(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_k(x_{k-1})=\varphi_{k-1}(x_{k-1}),\ \varphi_k'(x_{k-1})=\varphi_{k-1}'(x_{k-1}),\ \ldots,\ \varphi_k^{(n-n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) = \\ \qquad = \varphi_{k-1}^{(n-n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) \\ \varphi_k(x_k)=0,\ \ \varphi_k'(x_k)=0,\ \ldots,\ \varphi_k^{(n-n_k-1)}(x_k)=0 \end{cases}$$

si $l = 0$. Ensuite nous poserons

$$(A_1)\begin{cases} \varphi_1(x_0)=0,\ \ \varphi_1'(x_0)=0,\ \ldots,\ \varphi_1^{(n-n_0-1)}(x_0)=0 \\ \varphi_3(x_2)=\varphi_2(x_2),\ \varphi_3'(x_2)=\varphi_2'(x_2),\ \ldots,\ \varphi_3^{(n-n_2-1)}(x_2)=\varphi_2^{(n-n_2-1)}(x_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_k(x_{k-1})=\varphi_{k-1}(x_{k-1}),\ \varphi_k'(x_{k-1})=\varphi_{k-1}'(x_{k-1}),\ \ldots,\ \varphi_k^{(n-n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) = \\ \qquad = \varphi_{k-1}^{(n-n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) \\ \varphi_k(x_k)=0,\ \ \varphi_k'(x_k)=0,\ \ldots,\ \varphi_k^{(n-n_k-1)}(x_k)=0 \end{cases}$$

si $l = 1$. Ensuite nous poserons

$$(A_l)\begin{cases} \varphi_1(x_0)=0\ \ \varphi_1'(x_0)=0,\ \ldots,\ \varphi_1^{(n-n_0-1)}(x_0)=0 \\ \varphi_2(x_1)=\varphi_1(x_1),\ \varphi_2'(x_1)=\varphi_1'(x_1),\ \ldots,\ \varphi_2^{(n-n_1-1)}(x_1)=\varphi_1^{(n-n_1-1)}(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_l(x_{l-1})=\varphi_{l-1}(x_{l-1}),\ \varphi_l'(x_{l-1})=\varphi_{l-1}'(x_{l-1}),\ \ldots,\ \varphi_l^{(n-n_{l-1}-1)}(x_{l-1}) = \\ \qquad = \varphi_{l-1}^{(n-n_{l-1}-1)}(x_{l-1}) \\ \varphi_{l+2}(x_{l+1})=\varphi_{l+1}(x_{l+1}),\ \varphi_{l+2}'(x_{l+1})=\varphi_{l+1}'(x_{l+1}),\ \ldots,\ \varphi_{l+2}^{(n-n_{l+1}-1)}(x_{l+1})= \\ \qquad = \varphi_{l+1}^{(n-n_{l+1}-1)}(x_{l+1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_k(x_{k-1})=\varphi_{k-1}(x_{k-1}),\ \varphi_k'(x_{k-1})=\varphi_{k-1}'(x_{k-1}),\ \ldots,\ \varphi_k^{(n-n_k-1)}(x_{k-1}) = \\ \qquad = \varphi_{k-1}^{(n-n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) \\ \varphi_k(x_k)=0,\ \ \varphi_k'(x_k)=0,\ \ldots,\ \varphi_k^{(n-n_k-1)}(x_k)=0 \end{cases}$$

si $l = 2$, ou $l = 3$, ..., ou $l = k - 2$. Ensuite nous poserons

$$(A_{k-1})\begin{cases} \varphi_1(x_0) = 0, \ \varphi_1'(x_0) = 0, \ldots, \varphi_1^{(n-n_0-1)}(x_0) = 0 \\ \varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1), \ \varphi_2'(x_1) = \varphi_1'(x_1), \ \ldots, \ \varphi_2^{(n-n_1-1)}(x_1) = \varphi_1^{(n-n_1-1)}(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{k-1}(x_{k-2}) = \varphi_{k-2}(x_{k-2}), \ \varphi_{k-1}'(x_{k-1}) = \varphi_{k-2}'(x_{k-2}), \ldots, \varphi_{k-1}^{(n-n_{k-2}-1)}(x_{k-2}) = \\ \quad = \varphi_{k-2}^{(n-n_{k-2}-1)}(x_{k-2}) \\ \varphi_k(x_k) = 0, \ \varphi_k'(x_k) = 0, \ \ldots, \ \varphi_k^{(n-n_k-1)}(x_k) = 0. \end{cases}$$

si $l = k - 1$. Ensuite nous poserons

$$(A_k)\begin{cases} \varphi_1(x_0) = 0, \ \varphi_1'(x_0) = 0, \ \ldots, \ \varphi_1^{(n-n_0-1)}(x_0) = 0. \\ \varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1), \ \varphi_2'(x_1) = \varphi_1'(x_1), \ldots, \varphi_2^{(n-n_1-1)}(x_1) = \varphi_1^{(n-n_1-1)}(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_k(x_{k-1}) = \varphi_{k-1}(x_{k-1}), \ \varphi_k'(x_{k-1}) = \varphi_{k-1}'(x_{k-1}), \ldots, \varphi_k^{(n-n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) = \\ \quad = \varphi_{k-1}^{(n-n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) \end{cases}$$

si $l = k$.

Nous désignerons par (A_l') les conditions aux limites relativement au noeud $x_l = x$. Ces conditions seront telles que dans la somme

$$H(f, \varphi_1)\Big|_x^{x_1}$$

correspondant à $l = 0$, ou dans la somme

$$H(f, \varphi_l)\Big|_{x_{l-1}}^{x} + H(f, \varphi_{l+1})\Big|_x^{x_{l+1}}$$

correspondant à $l = 1$, ou $l = 2$, ..., ou $l = k - 1$, ou dans la somme

$$H(f, \varphi_k)\Big|_{x_{k-1}}^{x}$$

correspondant à $l = k$, les coefficients de $f^{(n-1)}(x), f^{(n-2)}(x), \ldots, f^{(n_l-1)}(x)$ dans la formule (10), soient égaux aux valeurs des fonctions données $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-a_l}$ au point x, supposées non toutes nulles.

Il résulte que nous pouvons écrire

$$(A_0')\begin{cases} \varphi_1(x) = -\lambda_0(x) \\ \varphi_1'(x) - (a_1\varphi_1)_x' = \lambda_1(x) \\ \varphi_1''(x) - (a_1\varphi_1)_x' + (a_2\varphi_1)_x = -\lambda_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_1^{(n-n_0)}(x) - (a_1\varphi_1)_x^{(n-n_0-1)} + \ \ldots \ + (-1)^{n-n_0}(a_{n-n_0}\varphi_1)_x = \\ \quad = (-1)^{n-n_0-1}\lambda_{n-n_0}(x) \end{cases}$$

Ensuite pour $l-1$, ou $2, \ldots,$ ou $k-1$, nous pouvons écrire

$$(A'_l)\quad \begin{cases} \varphi_l(x) - \varphi_{l+1}(x) = \lambda_0(x) \\ [\varphi'_l(x) - (a_1\varphi_l)'_x] - [\varphi'_{l+1}(x) - (a_1\varphi_{l+1})_x] = -\lambda_1(x) \\ [\varphi''_l(x) - (a_1\varphi_l)'_x + (a_2\varphi_l)_x] - [\varphi''_{l+1}(x) - (a_1\varphi_{l+1})'_x + (a_2\varphi_{l+1})_x] = \lambda_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [\varphi_l^{(n-n_l)}(x) - (a_1\varphi_l)_x^{(n-n_l-1)} + \ldots + (-1)^{n-n_l}(a_{n-n_l}\varphi_l)_x] - \\ -[\varphi_{l+1}^{(n-n_l)}(x) - (a_1\varphi_{l+1})_x^{(n-n_l-1)} + \ldots + (-1)^{n-n_0}(a_{n-n_l}\varphi_{l+1})_x] = \\ = (-1)^{n-n_l}\lambda_{n-n_l}(x) \end{cases}$$

Ensuite pour $l = k$, nous pouvons écrire

$$(A'_k)\quad \begin{cases} \varphi_k(x) = \lambda_0(x) \\ \varphi'_k(x) - (a_1\varphi_k)_x = -\lambda_1(x) \\ \varphi''_k(x) - (a_1\varphi_k)'_x + (a_2\varphi_k)_x = \lambda_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_k^{(n-n_k)}(x) - (a_1\varphi_k)_x^{(n-n_k-1)} + \ldots + (-1)^{n-n_k}(a_{n-n_k}\varphi_k)_x = \\ \qquad = (-1)^{n-n_k}\lambda_{n-n_k}(x) \end{cases}$$

Les conditions aux limites (A'_0), ou (A'_l), ou (A'_k) donnent les valeurs de

$$\varphi_1,\ \varphi'_1,\ \ldots,\ \varphi_1^{(n-n_0)} \text{ ou de } \varphi_l - \varphi_{l+1},\ \varphi'_l - \varphi'_{l+1},\ \ldots,\ \varphi_l^{(n-n_l)} - \varphi_{l+1}^{(n-n_l)}$$

ou de $\varphi_k, \varphi'_k, \ldots, \varphi_k^{(n-n_k)}$ au point x. Nous pouvons donc écrire les conditions (A'_0), ou (A'_l), ou (A'_k) encore sous la forme

$$(A'_0)\qquad \varphi_1(x) = \mu_0(x),\quad \varphi'_1(x) = \mu_1(x),\ \ldots,\ \varphi_1^{(n-n_0)}(x) = \mu_{n-n_0}(x)$$

ou bien pour $l = 1$, ou $2, \ldots,$ ou $k-1$

$$(A'_l)\qquad \varphi_l(x) - \varphi_{l+1}(x) = \mu_0(x),\ \varphi'_l(x) - \varphi'_{l+1}(x) = \mu_1(x),\ \ldots \\ \ldots,\ \varphi_l^{(n-n_l)}(x) - \varphi_{l+1}^{(n-n_l)}(x) = \mu_{n-n_l}(x)$$

ou bien pour $l = k$.

$$(A'_k)\qquad \varphi_k(x) = \mu_0(x),\quad \varphi'_k(x) = \mu_1(x),\ \ldots,\ \varphi_k^{(n-n_k)}(x) = \mu_{n-n_k}(x)$$

Relativement à la formule générale (10) nous traiterons le

Problème aux limites. Déterminer la solution des équations différentielles (8) *qui satisfait aux conditions aux limites* (A_l) *et* (A'_l).

Nous démontrerons plus loin que ce problème a une solution unique. Alors en remplaçant dans la formule (10) les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ $\ldots, \varphi_k$ par la solution de ce problème, on est conduit à la formule de dérivation numérique, de la classe (P), que nous avons en vue.

Lorsque $l = 0$, cette formule a la forme suivante

$$(13_0)\qquad \sum_{k=0}^{n-n_0} \lambda_k(x) f^{(n-k-1)}(x) = \sum_{j=0}^{n_0-2} \alpha_j(x) f^{(j)}(x) + \\ + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{n_i-1} A_{ij}(x) f^{(j)}(x_i) + R_0(x)$$

où

$$(14_0) \qquad \alpha_j(x) = (-1)^{n-j-1}[\varphi_1^{(n-j-1)}(x) - (a_1\,\varphi_1)_x^{(n-j-2)} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-j-1}(a_{n-j-1}\,\varphi_1)_x]$$

pour $j = 0, 1, \ldots, n_0 - 2$ et

$$(15_0) \qquad A_{ij}(x) = (-1)^{n-j}\{[\varphi_i^{(n-j-1)}(x) - (a_1\,\varphi_i)_x^{(n-j-2)} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-j-1}(a_{n-j-1}\,\varphi_i)_x] - [\varphi_{i+1}^{(n-j-1)}(x) - (a_1\,\varphi_{i+1})_x^{(n-j-2)} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-j-1}(a_{n-j-1}\,\varphi_{i+1})_x]\}$$

pour $j = 0, 1, \ldots, n_i - 1$ et $i = 1, 2, \ldots, k$.

Dans la formule (13_0) le reste $R_0(x)$ est donné par la formule

$$(16_0) \qquad R_0(x) = \int_x^{x_k} \varphi_0(x, s)\, L_n[f]\, ds$$

où la fonction $\varphi_0(x, s)$ coïncide pour le noeud x donné, avec les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ sur les intervalles $[x, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{k-1}, x_k]$.

Lorsque $l = 1$, ou $2, \ldots,$ ou $k - 1$ la formule de dérivation numérique de la classe (P) a la forme

$$(13_l) \quad \sum_{k=0}^{n-n_l} \lambda_k(x) f^{(n-k-1)}(x) = \sum_{j=0}^{n_l-2} \alpha_j(x) f^{(j)}(x) + \sum_{i=0}^{k}{}' \sum_{j=0}^{n_i-} A_{ij}(x) f^{(j)}(x_i) + R_l(x)$$

où

$$(14_l) \quad \alpha_j(x) = (-)^{n-j}\{[\varphi_l^{(n-j-1)}(x) - (a_1\,\varphi_l)_x^{(n-j-2)} + \ldots + (-1)^{n-j-1}[a_{n-j-1}\varphi_l)_x] -$$
$$- [\varphi_{l+1}^{(n-j-1)}(x) - (a_1\,\varphi_{l+1})_x^{(n-j-2)} + \ldots + (-1)^{n-j-1}(a_{n-j-1}\,\varphi_{l+1})_x]\}$$

pour $j = 0, 1, \ldots, n_l - 2$, et

$$(15_l) \quad A_{ij}(x) = (-1)^{n-j}\{[\varphi_i^{(n-j-1)}(x) - (a_1\,\varphi_i)_x^{(n-j-2)} + \ldots + (-1)^{n-j-1}(a_{n-j-1}\varphi_i)_x] -$$
$$- [\varphi_{i+1}^{(n-j-1)}(x) - (a_1\,\varphi_{i+1})_x^{(n-j-2)} + \ldots + (-1)^{n-j-1}(a_{n-j-1}\,\varphi_{i+1})_x]\}$$

pour $j = 0, 1, \ldots, n_i - 1$ et $i = 0, 1, \ldots, l - 1, l + 1, \ldots, k$.

La notation $\sum\limits_{i=0}^{k_l}{}'$ dans la formule (13_l) signifie que i prend toutes les valeurs de 0 à k, la valeur l étant exclue.

Le reste $R_l(x)$ est donné par la formule

$$(16_l) \qquad R_l(x) = \int_{x_0}^{x_k} \varphi_l(x, s)\, L_n[f]\, ds$$

où la fonction $\varphi_l(x, s)$ coïncide pour le noeud x donné, avec les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ sur les intervalles $[x_0, x_1]$, $\ldots$, $[x_{l-1}, x]$, $[x, x_{l+1}]$, $\ldots$ $\ldots, [x_{k-1}, x_k]$.

Enfin lorsque $l = k$, la formule de dérivation numérique de la classe (P) a la forme

$$(13_k) \quad \sum_{k=0}^{n-n_k} \lambda_k(x) f^{(n-k-1)}(x) = \sum_{j=0}^{n_k-2} \alpha_j(x) f^{(j)}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{n_i-1} A_{ij}(x) f^{(j)}(x_i) + R_k(x)$$

où

(14_k) $\alpha_j(x) = (-1)^{n-j}[\varphi_k^{(n-j-1)}(x)-(a_1\varphi_k)_x^{(n-j-2)}+\ldots+(-1)^{n-j-1}a_{n-j-1}\varphi_k)_x]$

pour $j=0, 1, \ldots, n_k-2$, et

(15_k) $A_{ij}(x)=(-1)^{n-j}\{[\varphi_i^{(n-j-1)}(x)-(a_1\varphi_i)_x^{(n-j-2)}+\ldots+(-1)^{n-j-1}(a_{n-j-1}\varphi_i)_x]-$
$-[\varphi_{i+1}^{(n-j-1)}(x)-(a_1\varphi_{i+1})_x^{(n-j-2)}+\ldots+(-1)^{n-j-1}(a_{n-j-1}\varphi_{i+1})_x]$

pour $j=0, 1, \ldots, n_i-1$ et $i=0, 1, \ldots, k-1$.

Le reste $R_k(x)$ est donné par la formule

$$R_k(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi_k(x, s)\, L_n[f]\, ds \tag{16_k}$$

où la fonction $\varphi_k(x, s)$ coïncide pour le noeud x donné, avec les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ sur les intervalles $[x_0, x_1], \ldots, [x_{k-2}, x_{k-1}], [x_{k-1}, x]$.

Lorsque les fonctions $\lambda_0(x), \lambda_1(x), \ldots, \lambda_{n-n_l}(x)$ sont données par

$$\lambda_h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = p-1 \\ 0 & \text{si } h \neq p-1 \end{cases} \tag{17}$$

la formule de dérivation numérique (13_0), ou (13_l), ou (13_k) devient

$$f^{(n-p)}(x) = \sum_{j=0}^{n_l-1} \alpha_j(x) f^{(j)}(x) + \sum_{1=0}^{k}{}' \sum_{j=0}^{n_i-1} A_{ij}(x) f^{(j)}(x_i) + R_l(x) \tag{18}$$

et nous dirons que c'est une *formule fondamentale de la classe* (P), parce qu'on peut remontrer à la formule (13_0), ou (13_l), ou (13_k), à l'aide des formules (18) correspondant à $p = 1, 2, \ldots, (n - (n_l - 1))$.

2. Dans le cas particulier lorsque la suite des fonctions (1) est la suite

$$1, x, x^2, \ldots, x^n \tag{19}$$

nous avons

$$L_n[f] = f^{(n)}, \quad L_n^*[\psi] = (-1)^n \psi^{(n)} \tag{20}$$

et

$$H(f, \psi) = \psi f^{(n-1)} - \psi' f^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-1} \psi^{(n-1)} f \tag{21}$$

Dans ce cas les conditions aux limites (A_0'), ou (A_l') pour $l=1, 2, \ldots$ $\ldots, k-1$, ou (A_k') sont

(22_0) $\varphi_1(x) = -\lambda_0(x), \quad \varphi_1'(x) = \lambda_1(x), \ldots, \varphi_1^{(n-n_0)}(x) = (-1)^{(n-n_0-1)} \lambda_{n-n_0}(x)$

ou bien

(22_l) $\varphi_l(x) - \varphi_{l+1}(x) = \lambda_0(x), \varphi_l'(x) - \varphi_{l+1}'(x) = -\lambda_1(x), \ldots$
$\ldots, \varphi_l^{(n-n_l)}(x) - \varphi_{l+1}^{(n-n_l)}(x) = (-1)^{n-n_l} \lambda_{n-n_l}(x)$

pour $l = 1$, ou $2, \ldots$, ou $k-1$, ou bien

$$(22_k) \quad \varphi_k(x) = \lambda_0(x), \quad \varphi_k'(x) = -\lambda_1(x), \ldots, \varphi_k^{(n-n_k)}(x) = (-1)^{n-n_k}\lambda_k(x)$$

Le problème aux limites se pose sur les équations différentielles

$$(23) \qquad \varphi_1^{(n)} = 0, \quad \varphi_2^{(n)} = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_k^{(n)} = 0$$

avec les conditions (A_l) et (A_l').

On démontre que le problème aux limites a une solution unique qui conduit à la formule de dérivation numérique de la forme (13_0), ou (13_l) pour $l = 1$, ou $2, \ldots$, ou $k-1$, ou (13_k) avec le reste de la forme

$$(24_0) \qquad R_0(x) = \int_x^{x_k} \varphi_0(x, s) f^{(n)}(s)\, ds$$

ou bien

$$(24_l) \qquad R_l(x) = \int_{x_0}^{x_k} \varphi_l(x, s) f^{(n)}(s)\, ds$$

pour $l = 1, 2, \ldots, k-1$, ou bien

$$(24_k) \qquad R_k(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi_k(x, s) f^{(n)}(s)\, ds$$

Les formules fondamentales de la classe (P), formules (18), correspondant à la suite (19), coïncident avec certaines formules de dérivation numérique, etudiées par l'Acad. T. Popoviciu [4].

3. Nous avons donné la méthode d'intégration du système d'équations différentielles (8) avec les conditions aux limites (C), dans notre travail [1], ce qui nous à conduit à la représentation de la différence divisée généralisée d'une fonction sur des noeuds multiples par une intégrale définie. La méthode d'intégration du système d'équations différentielles (8) avec les conditions aux limites (A_l) et (A_l') est analogue, et nous allons l'expliquer d'abord pour $l = k$.

La solution du système (8) qui satisfait aux conditions (A_k) est donnée par les formules

$$\varphi_1(s) = \sum_{j_1=0}^{n_0-1} (-1)^{n-j_1-1} C_0^{(j_1)} \theta_{1,j_1}(s)$$

$$(25) \qquad \varphi_2(s) = \sum_{j_1=0}^{n_0-1} (-1)^{n-j_1-1} C_0^{(j_1)} \theta_{1,j_1}(s) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} (-1)^{n-j_2-1} C_1^{(j_2)} \theta_{2,j_2}(s)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(25) \qquad \varphi_k(s) = \sum_{j_1=0}^{n_0-1} (-1)^{n-j_1-1} C_0^{(j_1)} \theta_{1,j_1}(s) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} (-1)^{n-j_2-1} C_1^{(j_2)} \theta_{2,j_2}(s) + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{j_k=0}^{n_{k-1}-1} (-1)^{n-j_k-1} C_{k-1}^{(j_k)} \theta_{k,j_k}(s).$$

quelques soient les constantes $C_0^{(j_1)}, C_1^{(j_2)}, \ldots, C_{k-1}^{(j_k)}$ dont le nombre est

$$n_0 + n_1 + \ldots + n_{k-1} = n - n_k + 1.$$

Dans les équations (25), $\theta_{i,h}(s)$ est une solution de l'équation adjointe $L_n^*[z] = 0$, qui vérifie les conditions

$$(26)\quad \theta_{i,h}(x_{i-1}) = 0,\ \theta'_{i,h}(x_{i-1}) = 0,\ \ldots,\ \theta_{i,h}^{(n-h-2)}(x_{i-1}) = 0,\ \theta_{i,h}^{(n-h-1)}(x_{i-1}) = 1$$

et nous avons

$$(27)\quad \theta_{i,h}(s) = \frac{(-1)^{n-h-1}}{W[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]} \begin{vmatrix} y_0^{(h)}(x_{i-1}) & y_1^{(h)}(x_{i-1}) & \ldots & y_{n-1}^{(h)}(x_{i-1}) \\ y_0(s) & y_1(s) & \ldots & y_{n-1}(s) \\ y_0'(s) & y_1'(s) & \ldots & y_{n-1}'(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0^{(n-2)}(s) & y_1^{(n-2)}(s), & \ldots, & y_{n-1}^{(n-2)}(s) \end{vmatrix}$$

On peut encore écrire la fonction $\varphi_k(s)$, sous la forme

$$(28)\quad \varphi_k(s) = \frac{1}{W[y_0, \ldots, y_{n-1}]} \begin{vmatrix} C_0' & C_1' & \ldots & C_{n-1}' \\ y_0(s), & y_1(s), & \ldots, & y_{n-1}(s) \\ y_0'(s), & y_1'(s), & \ldots, & y_{n-1}'(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0^{(n-2)}(s), & y_1^{(n-2)}(s), & \ldots, & y_{n-1}^{(n-2)}(s) \end{vmatrix}$$

où

$$(29)\quad \begin{aligned} C_0' &= \sum_{j_1=0}^{n_0-1} C_0^{(j_1)} y_0^{(j_1)}(x_0) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} C_1^{(j_2)} y_0^{(j_2)}(x_1) + \ldots + \sum_{j_k=0}^{n_{k-1}-1} C_{k-1}^{(j_k)} y_0^{(j_k)}(x_{k-1}) \\ C_1' &= \sum_{j_1=0}^{n_0-1} C_0^{(j_1)} y_1^{(j_1)}(x_0) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} C_1^{(j_2)} y_1^{(j_2)}(x_1) + \ldots + \sum_{j_k=0}^{n_{k-1}-1} C_{k-1}^{(j_k)} y_1^{(j_k)}(x_{k-1}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{n-1}' &= \sum_{j_1=0}^{n_0-1} C_0^{(j_1)} y_{n-1}^{(j_1)}(x_0) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} C_1^{(j_2)} y_{n-1}^{(j_2)}(x_1) + \ldots + \sum_{j_k=0}^{n_{k-1}-1} C_{k-1}^{(j_k)} y_{n-1}^{(j_k)}(x_{k-1}) \end{aligned}$$

La formule (28) montre que

$$(30)\quad \varphi_k(s) = C_0' z_0(s) + C_1' z_1(s) + \ldots + C_{n-1}' z_{n-1}(s)$$

où $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ sont des solutions de l'équation adjointe $L_n^*[z] = 0$, qui forment un système fondamentale.

En écrivant que les conditions (A_k'), sont satisfaites, nous avons le sytème d'équations en $C_0', C_1', \ldots, C_{n-1}'$

$$(31)\quad \begin{aligned} &C_0' z_0(x) + C_1' z_1(x) + \ldots + C_{n-1}' z_{n-1}(x) = \mu_0(x) \\ &C_0' z_0'(x) + C_1' z_1'(x) + \ldots + C_{n-1}' z_{n-1}'(x) = \mu_1(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &C_0' z_0^{(n-n_k)}(x) + C_1' z_1^{(n-n_k)}(x) + \ldots + C_{n-1}' z_{n-1}^{(n-n_k)}(x) = \mu_{n-n_k}(x). \end{aligned}$$

En remplaçant les $C'_0, C'_1, \ldots, C'_{n-1}$ par les formules (29), ce système devient

$$
(32)\quad
\begin{aligned}
&\sum_{j_1=0}^{n_0-1}[y_0^{(j_1)}(x_0)\,z_0(x)+\ldots+y_{n-1}^{(j_1)}(x_0)\,z_{n-1}(x)]\,C_0^{(j_1)}+\\
&+\sum_{j_2=0}^{n_1-1}[y_0^{(j_2)}(x_1)z_0(x)+\ldots+y_{n-1}^{(j_2)}(x_1)\,z_{n-1}(x)]\,C_1^{(j_2)}+\ldots+\\
&+\sum_{j_k=0}^{n_{k-1}-1}[y_0^{(j_k)}(x_{k-1})\,z_0(x)+\ldots+y_{n-1}^{(j_k)}(x_{k-1})\,z_{n-1}(x)]\,C_{k-1}^{(j_k)}=\mu_0(x)\\
&\sum_{j_1=0}^{n_0-1}[y_0^{(j_1)}(x_0)\,z'_0(x)+\ldots+y_{n-1}^{(j_1)}(x_0)\,z'_{n-1}(x)]\,C_0^{(j_1)}+\\
&+\sum_{j_2=0}^{n_1-1}[y_0^{(j_2)}(x_1)z'_0(x)+\ldots+y_{n-1}^{(j_2)}(x_1)\,z'_{n-1}(x)]\,C_1^{(j_2)}+\ldots+\\
&+\sum_{j_k=0}^{n_k-1}[y_0^{(k)}(x_{k-1})\,z'_0(x)+\ldots+y_{n-1}^{(j_k)}(x_{k-1})\,z'_{n-1}(x)]\,C_{k-1}^{(j_k)}=\mu_1(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{j_1=0}^{n_0-1}[y_0^{(j_1)}(x_0)\,z_0^{(n-n_k)}(x)+\ldots+y_{n-1}^{(j_1)}(x_0)\,z_{n-1}^{(n-n_k)}(x)]\,C_0^{(j_1)}+\\
&+\sum_{j_2=2}^{n_1-1}[y_0^{(j_2)}(x_1)\,z_0^{(n-n_k)}(x)+\ldots+y_{n-1}^{(j_k)}(x_1)\,z_{n-1}^{(n-n_k)}(x)]\,C_1^{(j_2)}+\ldots+\\
&+\sum_{j_k=0}^{n_k-1}[y_0^{(j_k)}(x_{k-1})\,z_0^{(n-n_k)}(x)+\ldots+y_{n-1}^{(j_k)}(x_{k-1})\,z_{n-1}^{(n-n_k)}(x)]=\mu_{n-n_k}(x)
\end{aligned}
$$

La détermination des fonction $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ est ainsi liée au système d'équations (32). La matrice du système (32) est le produit des matrices

$$
(33)\quad
\left\|\begin{matrix}
y_0(x_0) & y_1(x_0) & \ldots y_{n-1}(x_0)\\
y'_0(x_0) & y'_1(x_0) & \ldots y'_{n-1}(x_0)\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
y_0^{(n_0-1)}(x_0) & y_1^{(n_0-1)}(x_0) & \ldots y_{n-1}^{(n_0-1)}(x_0)\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
y_0(x_{k-1}) & y_1(x_{k-1}) & \ldots y_{n-1}(x_{k-1})\\
y'_0(x_{k-1}) & y'_1(x_{k-1}) & \ldots y'_{n-1}(x_{k-1})\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
y_0^{(n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) & y_1^{(n_{k-1}-1)}(x_{k-1}) & \ldots y_{n-1}^{(n_{k-1}-1)}(x_{k-1})
\end{matrix}\right\|
$$

$$
\left\|\begin{matrix}
z_0(x) & z'_0(x), & \ldots, & z_0^{(n-n_k)}(x)\\
z_1(x) & z'_1(x), & \ldots, & z_0^{(n-n_k)}(x)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
z_{n-1}(x) & z'_{n-1}(x), & \ldots, & z_{n-1}^{(n-n_k)}(x)
\end{matrix}\right\|
$$

dont la première matrice a $m = n - n_k + 1$ lignes et n colonnes, et la seconde a n lignes et m colonnes. On peut écrire encore ces matrices sous la forme

$$(33') \qquad \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mn} \end{matrix}\right\| \; ; \; \left\|\begin{matrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{m,1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{m,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1,n} & b_{2,n} & \dots & b_{m,n} \end{matrix}\right\|$$

Le déterminant Δ du système (32) est, avec ces nouvelles notations,

$$\Delta = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)} \begin{vmatrix} a_{1,\alpha_1} & a_{1,\alpha_2} & \dots & a_{1,\alpha_m} \\ a_{2,\alpha_1} & a_{2,\alpha_2} & \dots & a_{2,\alpha_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,\alpha_1} & a_{m,\alpha_2} & \dots & a_{m,\alpha_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,\alpha_1} & b_{2,\alpha_1} & \dots & b_{m,\alpha_1} \\ b_{1,\alpha_2} & b_{2,\alpha_2} & \dots & b_{m,\alpha_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1,\alpha_m} & b_{2,\alpha_m} & \dots & b_{m,\alpha_m} \end{vmatrix}.$$

Mais

$$\begin{vmatrix} b_{1,\alpha_1} & b_{2,\alpha_1} & \dots & b_{m,\alpha_1} \\ b_{1,\alpha_2} & b_{2,\alpha_2} & \dots & b_{m,\alpha_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1,\alpha_m} & b_{2,\alpha_m} & \dots & b_{m,\alpha_m} \end{vmatrix} = W\,[z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, \dots, z_{\alpha_m}]$$

et on connait la formule

$$W\,[z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, \dots, z_{\alpha_m}] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-m-1)(n-m)}{2} + \alpha_1 + \dots \alpha_m} W[y_{\alpha'_0}, y_{\alpha'_1}, \dots, y_{\alpha'_{n-m-1}}]$$

où les indices $\alpha'_0, \alpha'_1, \dots, \alpha'_{n-m-1}$ s'obtiennent en suprimant dans la suite $0, 1, 2, \dots, n-1$ les indices $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. On a donc

$$\Delta = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-m-1)(n-m)}{2} + \alpha_1 + \dots + \alpha_m} \begin{vmatrix} a_{1,\alpha_1} \dots a_{1,\alpha_m} \\ a_{2,\alpha_1} \dots a_{2,\alpha_m} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{m,\alpha_1} \dots a_{m,\alpha_m} \end{vmatrix} W[y_{\alpha'_0}, \dots, y_{\alpha'_{n-m-1}}]$$

et cette formule montre que

$$(34) \qquad \Delta = D\,(\underbrace{x_0, \dots x_0}_{n_0}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{x_{k-1}, \dots, x_{k-1}}_{n_{k-1}}, \underbrace{x, \dots, x}_{n_k - 1}).$$

Il résulte des hypothèses faites sur les fonctions de la suite (1) que

$$(35) \qquad D\,(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{n_0}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{x_{k-1}, \dots, x_{k-1}}_{n_{k-1}}, \underbrace{x, \dots, x}_{n_k - 1}) \neq 0$$

et par suite

$$(36) \qquad \Delta \neq 0\,.$$

Le système (32) a donc une solution unique et par suite les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ sont parfaitement déterminées.

Ainsi pour $l = k$, nous avons résolu le problème aux limites et de cette manière nous avons démontré l'existence de la formule de dérivation numérique (13_k) de la classe (P) et nous avons donné les moyens de calculer les coefficients et le reste de cette formule.

Nous remarquons encore qu'il n'est pas possible que la solution du système d'équations, linéaire (32) soit $C_0^{(j_1)} = 0$, $C_0^{(j_2)} = 0, \ldots, C_{k-1}^{(j_k)} = 0$ pour toutes les valeurs des indices $j_1, j_2, \ldots, j_k$. On devrait avoir dans ce cas $\mu_0(x) = 0$, $\mu_1(x) = 0$, $\ldots$ $\mu_{n-n_k}(x) = 0$, ou bien d'après les conditions (A'_k), $\lambda_0(x) = 0$, $\lambda_1(x) = 0, \ldots, \lambda_{n-n_k}(x) = 0$, ce qui est impossible parce qu'on a supposé que les valeurs des functieons $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \ldots, \lambda_{n-n_k}$ au point x ne sont pas toutes nulles.

Il nous reste encore à traiter le problème aux limites pour $l = 0$, $l = 1, \ldots, l = k-1$.

4. Considérons le cas $l = 0$, ce qui veut dire qu'on doit intégrer les équations différentielles (8), avec les conditions aux limites (A_0) et (A'_0).

La solution du système (8), qui satisfait aux conditions (A_0) est donnée par les formules

$$\varphi_k(s) = -\sum_{j_k=0}^{n_k-1}(-1)^{n-j_k-1}C_k^{(j_k)}\chi_{k,j_k}(s)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_1(s) = -\sum_{j_k=0}^{n_k-1}(-1)^{n-j_k-1}C_k^{(j_k)}\chi_{k,j_k}(s) - \ldots - \sum_{j_1=0}^{n_1-1}(-1)^{n-j_1-1}C_1^{(j_1)}\chi_{1,j_1}(s). \tag{37}$$

Dans ces équations la fonction $\chi_{i,h}(s)$ est une solution de l'équation adjointe $L_n^*[z] = 0$ qui satisfait aux conditions

$$\chi_{i,h}(x_i) = 0,\ \chi'_{i,h}(x_i) = 0, \ldots, \chi_{i,h}^{(n-h-2)}(x_i) = 0,\ \chi_{i,h}^{(n-h-1)}(x_i) = 1 \tag{38}$$

et nous avons

$$\chi_{i,h}(s) = \frac{(-1)^{n-h-1}}{W[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]}\begin{vmatrix} y_0^{(h)}(x_i) & y_1^{(h)}(x_i), & \ldots, & y_{n-1}^{(h)}(x_i) \\ y_0(s) & y_1(s), & \ldots, & y_{n-1}(s) \\ y'_0(s) & y'_1(s), & \ldots, & y'_{n-1}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_0^{(n-2)}(s) & y_1^{(n-2)}(s), & \ldots, & y_{n-1}^{(n-2)}(s) \end{vmatrix} \tag{39}$$

Nous pouvons encore écrire

$$\chi_{i,h}(s) = (-1)^{n-h-1}[y_0^{(h)}(x_i)z_0(s) + y_1^{(h)}(x_i)z_1(s) + \ldots + y_{n-1}^{(h)}(x_i)\cdot z_{n-1}(s)]. \tag{40}$$

Il reste à determiner les coefficients $C_1^{(j_1)}, C_2^{(j_2)}, \ldots, C_k^{(j_k)}$ par les conditions aux limites (A'_0). Nous pouvons écrire $\varphi_1(s)$ sous la forme

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{W[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]}\begin{vmatrix} C'_0 & C'_1 & \ldots & C'_{n-1} \\ y_0(s) & y_1(s) & \ldots & y_{n-1}(s) \\ y'_0(s) & y'_1(s) & \ldots & y'_{n-1}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_0^{(n-2)}(s) & y_1^{(n-2)}(s) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(s) \end{vmatrix} \tag{41}$$

où

$$
(42)\quad
\begin{aligned}
-C'_0 &= \sum_{j_k=0}^{n_k-1} C_k^{(j_k)} y_0^{(j_k)}(x_k) + \sum_{j_{k-1}=0}^{n_{k-1}-1} C_{k-1}^{(j_{k-1})} y_0^{(j_{k-1})}(x_{k-1}) + \ldots + \sum_{j_1=0}^{n_1-1} C_1^{(j_1)} y_0^{(j_1)}(x_1)\\
-C'_1 &= \sum_{j_k=0}^{n_k-1} C_k^{(j_k)} y_1^{(j_k)}(x_k) + \sum_{j_{k-1}=0}^{n_{k-1}-1} C_{k-1}^{(j_{k-1})} y_1^{(j_{k-1})}(x_{k-1}) + \ldots + \sum_{j_1=0}^{n_1-1} C_1^{(j_1)} y_1(x_1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-C'_{n-1} &= \sum_{j_k=0}^{n_k-1} C_k^{(j_k)} y_{n-1}^{(j_k)}(x_k) + \sum_{j_{k-1}=0}^{n_{k-1}-1} C_{k-1}^{(j_{k-1})} y_{n-1}^{(j_{k-1})}(x_{k-1}) + \ldots + \sum_{j_1=0}^{n_1-1} C_1^{(j_1)} y_{n-1}^{(j_1)}(x_1).
\end{aligned}
$$

En écrivant que les conditions (A'_0) sont satisfaites, nous avons les équations

$$
(43)\quad
\begin{aligned}
&C'_0\, z_0(x) + C'_1 z_1(x) + \ldots + C'_{n-1} z_{n-1}(x) = \mu_0(x)\\
&C'_0\, z'_0(x) + C'_1 z'_1(x) + \ldots + C'_{n-1} z'_{n-1}(x) = \mu_1(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C'_0 z^{(n-n_0)}(x) + C'_1 z_1^{(n-n_0)}(x) + \ldots + C'_{n-1} z_{n-1}^{(n-n_0)}(x) = \mu_{n-n_0}(x)
\end{aligned}
$$

qui déterminent avec les équations (42) les coefficients $C_k^{(j_k)}$, $C_{k-1}^{(j_{k-1})}, \ldots$ $\ldots, C_1^{(j_1)}$. On démontre comme dans l'alinéa 3 que le système d'équations en $C_k^{(j_k)}, \ldots, C_1^{(j_1)}$ qui est analoque au système (32), a une solution unique parce que son déterminant est égal à

$$D\,(\underbrace{x, \ldots x}_{n_0-1}, \underbrace{x_1, \ldots x_1}_{n_1}, \ldots \underbrace{x_k, \ldots x_k}_{n_k})$$

qui d'aprés les hypothèses sur les fonctions de la suite (1), est différent de zero.

Ainsi le problème aux limites sur les équations différentielles (8) avec les conditions aux limites (A_0) et (A'_0) est résolu. De cette manière nous avons démontré l'existence de la formule de dérivation numérique (13_0) de la classe (P) et nous avons donné les moyens de calculer ses coefficients et son reste.

5. Considérons maintenat le cas du noeud $x = x_l$, où l est un des nombres $1, 2, 3, \ldots, k-1$. On peut déterminer les fonctions φ_1, $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_l$ en intégrant les premières équations différentielles(8), avec les conditions aux limites des points $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}$. En procédant comme dans l'alinéa 3, nous avons

$$
(44)\quad
\begin{aligned}
\varphi_1(s) &= \sum_{j_1=0}^{n_l-1} (-1)^{n-j_1-1} C_0^{(j_1)} \theta_{1,j_1}(s)\\
\varphi_2(s) &= \sum_{j_1=0}^{n_0-1} (-1)^{n-j_1-1} C_0^{(j_1)} \theta_{1,j_1}(s) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} (-1)^{n-j_2-1} C_1^{(j_2)} \theta_{2,j_2}(s)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_l(s) &= \sum_{j_0=1}^{n_0-1} (-1)^{n-j_1-1} C_0^{(j_1)} \theta_{1,j_1}(s) + \sum_{j_2=0}^{n_1-1} (-1)^{n-j_2-1} C_1^{(j_2)} \theta_{2,j_2}(s) + \ldots\\
&\ldots + \sum_{j_{l-1}=0}^{nl-1} (-1)^{n-j_l-1} C_{l-1}^{(j_l)}\, \theta_{l,j_l}^{(j_l)}(s).
\end{aligned}
$$

De même on peut déterminer les fonctions $\varphi_k, \varphi_{k-1}, \ldots, \varphi_{l+1}$, en intégrant les dernières $k - l$ équations différentielles (8) avec les conditions aux limites des points $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_{l+1}$. En procédant comme dans l'alinéa 4, nous avons

$$\varphi_k(s) = -\sum_{j_k=0}^{n_k-1} (-1)^{n-j_k-1} C_k^{(j_k)} \chi_{k,j_k}(s)$$

$$(45)\quad \varphi_{k-1}(s) = -\sum_{j_k=0}^{n_k-1} (-1)^{n-j_k-1} C_k^{(j_k)} \chi_{k,j_k}(s) - \sum_{j_{k-1}=0}^{n_{k-1}-1} (-1)^{n-j_{k-1}-1} C_{k-1}^{(j_{k-1})} \chi_{k-1,j_{k-1}}(s)$$

. . . .

$$\varphi_{l+1}(s) = -\sum_{j_k=0}^{n_k-1} (-1)^{n-j_k-1} C_k^{(j_k)} \chi_{k,j_k}(s) - \sum_{j_{k-1}=0}^{n_{k-1}-1} (-1)^{n-j_{k-1}-1} C_{k-1}^{(j_{k-1})} \chi_{k-1,j_{k-1}}(s) - \ldots - \sum_{j_{l+1}=0}^{n_{l+1}-1} (-1)^{n-j_{l+1}-1} C_{l+1}^{(j_{l+1})} \chi_{l+1,j_{l+1}}(s).$$

Nous avons

$$(46)\quad \varphi_l(s) - \varphi_{l+1}(s) = \frac{1}{W[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]} \begin{vmatrix} C_0' & C_1' & \ldots & C_{n-1}' \\ y_0(s) & y_1(s) & \ldots & y_{n-1}(s) \\ y_0'(s) & y_1'(s) & \ldots & y_{n-1}'(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_0^{(n-2)}(s) & y_1^{(n-2)}(s) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(s) \end{vmatrix}$$

ou bien

$$(47)\quad \varphi_l(s) - \varphi_{l+1}(s) = C_0' z_0(s) + C_1' z_1(s) + \ldots + C_{n-1}' z_{n-1}(s).$$

ou

$$(48)\quad \begin{aligned} C_0' &= \sum_{j_1=0}^{n_0-1} C_0^{(j_1)} y_0^{(j_1)}(x_0) + \ldots + \sum_{j_l=0}^{n_{l-1}-1} C_{l-1}^{(j_l)} y_0^{(j_l)}(x_{l-1}) + \\ &+ \sum_{j_{l+1}=0}^{n_{l+1}-1} C_{l+1}^{(j_{l+1})} y_0^{(j_{l+1})}(x_{l+2}) + \ldots + \sum_{j_k=0}^{n_k-1} C_k^{(j_k)} y_0^{(j_k)}(x_k) \\ C_1' &= \sum_{j_1=0}^{n_0-1} C_0^{(j_1)} y_1^{(j_1)}(x_0) + \ldots + \sum_{j_l=0}^{n_{l-1}-1} C_{l-1}^{(j_l)} y_1^{(j_l)}(x_{l-1}) + \\ &+ \sum_{j_{l+1}=0}^{n_{l+1}-1} C_{l+1}^{(j_{l+1})} y_1^{(j_{l+1})}(x_{l+1}) + \ldots + \sum_{j_k=0}^{n_k-1} C_k^{(j_k)} y_1^{(j_k)}(x_k) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{n-1}' &= \sum_{j_1=0}^{n_0-1} C_0^{(j_1)} y_{n-1}^{(j_1)}(x_0) + \ldots + \sum_{j_l=0}^{n_{l-1}-1} C_{l-1}^{(j_l)} y_{n-1}^{(j_l)}(x_{l-1}) + \\ &+ \sum_{j_{l+1}=0}^{n_{l+1}-1} C_{l+1}^{(j_{l+1})} y_{n-1}^{(j_{l+1})}(x_{l+1}) + \ldots + \sum_{j_k=0}^{n_k-1} C_k^{(j_k)} y_{n-1}^{(j_k)}(x_k). \end{aligned}$$

En écrivant que les conditions (A'_l) sont satisfaites, nous avons le système d'équations linéaires

$$
(49)\quad
\begin{aligned}
&C'_0\, z_0(x) + C'_1\, z_1(x) + \ldots + C'_{n-1}\, z_{n-1}(x) = \mu_0(x)\\
&C'_0\, z'_0(x) + C'_1\, z'_1(x) + \ldots + C'_{n-1}\, z'_{n-1}(x) = \mu_1(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C'_0\, z^{(n-n_l)}(x) + C'_1\, z_1^{(n-n_l)}(x) + \ldots + C'_{n-1}\, z_{n-1}^{(n-n_l)}(x) = \mu_{n-n_l}(x)
\end{aligned}
$$

qui déterminent les constantes $C_0^{(j_1)}, \ldots, C_{l-1}^{(j_l)}, C_{l+1}^{(j_{l+1})}, \ldots, C_k^{(j_k)}$.

On démontre comme dans l'alinéa 3, que le système d'équations en $C_0^{(j_1)}, \ldots, C_{l-1}^{(j_l)}, C_{l+1}^{(j_{l+1})}, \ldots, C_k^{(j_k)}$ qui est analogue au système (32), a une solution unique, parce que son déterminant est égal à

$$
D\,(\underbrace{x_0, \ldots x_0}_{n_0}, \ldots, \underbrace{x_{l-1}, \ldots x_{l-1}}_{n_{l-1}}, \underbrace{x, \ldots x}_{n_l-1}, \underbrace{x_{l+1}, \ldots x_{l+1}}_{n_{l+1}}, \ldots \underbrace{x_k \ldots, x_k}_{n_k})
$$

qui d'après les hypothèses faites sur les fonctions de la suite (1), est différent de zéro.

Ainsi le probléme aux limites sur les équations différentielles (8) avec les conditions aux limites (A_l) et (A'_l) est résolu. De cette manière nous avons démontré l'existence de la formule de dérivation numérique (13_l) de la classe (P), et nous avons donné les moyens de calculer ses coefficients et son reste.

Le problème aux limites posé dans l'alinéa 1 étant résolu pour $l = 0$, ou $l = 1, \ldots,$ ou $l = k$, l'existence de la formule de dérivation numérique de la classe (P) est démontrée dans tous les cas et nous avons donné les moyens de calculer les coefficients et le reste de cette formule.

Dans le paragraphe suivant nous donnons un exemple correspondent au cas où la suite des fonctions (1) est la suite (19).

§ 2. DISCUSSION DU RESTE D'UNE FORMULE DE DÉRIVATION NUMÉRIQUE

6. Nous allons étudier la formule de dérivation numérique de la classe (P), de la forme

$$
(50)\quad f^{(n-2)}(x) = \sum_{j=0}^{n-4} \alpha_j(x) f^{(j)}(x) + A_0(x) f(x_1) + A_1(x) f'(x_1) + B_0(x) f(x_2) + R(x)
$$

avec le noeud x_1 double et x_2 simple. Nous distinguerons conformément à la théorie générale trois cas, selon que $x < x_1$ ou $x > x_2$, ou $x_1 < x < x_2$. Nous supposerons que $n \geqslant 4$.

Nous examinons d'abord *le cas* $x < x_1$. Nous attachons aux intervalles $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ les polynômes φ_1 et φ_2 solutions des équations différentielles

$$
(51)\qquad \varphi_1^{(n)} = 0, \qquad \varphi_2^{(n)} = 0
$$

et nous aurons les formules

$$
(52)\quad
\begin{aligned}
&(\varphi_1^{(n-1)} f - \varphi_1^{(n-2)} f' + \ldots + (-1)^{n-1} \varphi_1 f^{(n-1)})_x^{x_1} = (-1)^{n-1} \int_x^{x_1} \varphi_1 f^{(n)}\, ds \\
&(\varphi_2^{(n-1)} f - \varphi_2^{(n-2)} f' + \ldots + (-1)^{n-1} \varphi_2 f^{(n-1)})_{x_1}^{x_2} = (-1)^{n-1} \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2 f^{(n)}\, ds.
\end{aligned}
$$

Si nous introduisons les conditions aux limites

$$
(53)\quad
\begin{array}{lll}
\varphi_1(x) = 0 & \varphi_1'(x) = (-1)^{n-1} & \varphi_1''(x) = 0 \\
\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1) & \varphi_1'(x_1) = \varphi_2'(x_1), \ldots & \varphi_1^{(n-3)}(x_1) = \varphi_2^{(n-3)}(x_1) \\
\varphi_2(x_2) = 0 & \varphi_2'(x_2) = 0, \quad \ldots & \varphi_2^{(n-2)}(x_2) = 0.
\end{array}
$$

et si nous ajoutons membre à membre les formules (52), nous obtenons une formule de dérivation numérique de la forme (50) dans laquelle

$$
(54)\qquad \alpha_j(x) = (-1)^j \varphi_1^{(n-j-1)}(x)
$$

pour $j = 0, 1, \ldots, n-4$ et

$$
(55)\quad
\begin{aligned}
A_0(x) &= -\,[\varphi_1^{(n-1)}(x_1) - \varphi_2^{(n-1)}(x_1)] \\
A_1(x) &= \,[\varphi_1^{(n-2)}(x_1) - \varphi_2^{(n-2)}(x_1)] \\
B_0(x) &= -\,\varphi_1^{(n-1)}(x_2).
\end{aligned}
$$

L'intégration des équations différentielles (51) avec les conditions aux limites (53) se fait de la manière suivante :

Nous remarquons que les polynômes

$$
(56)\quad
\begin{aligned}
\varphi_2(s) &= \nu \frac{(s-x_2)^{n-1}}{(n-1)!} \\
\varphi_1(s) &= \nu \frac{(s-x_2)^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda \frac{(s-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} + \mu \frac{(s-x_1)^{n-2}}{(n-2)!}
\end{aligned}
$$

vérifient les équations différentielles (51) et les conditions aux limites des points x_1 et x_2, quels que soient les constantes λ, μ, ν.

En écrivant que les conditions aux limites, du point x, sont également vérifiées, nous avons le système d'équations

$$
(57)\quad
\begin{aligned}
&\lambda \frac{(x-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} + \mu \frac{(x-x_1)^{n-2}}{(n-2)!} + \nu \frac{(x-x_2)^{n-1}}{(n-1)!} = 0 \\
&\lambda \frac{(x-x_1)^{n-2}}{(n-2)!} + \mu \frac{(x-x_1)^{n-3}}{(n-3)!} + \nu \frac{(x-x_2)^{n-2}}{(n-2)!} \qquad ' \;\; -1)^{n-1} \\
&\lambda \frac{(x-x_1)^{n-3}}{(n-3)!} + \mu \frac{(x-x_1)^{n-4}}{(n-4)!} + \nu \frac{(x-x_2)^{n-3}}{(n-3)!} = 0
\end{aligned}
$$

dont la solution est

$$(58)\quad \begin{aligned} \lambda &= (-1)^n \frac{(n-2)\,!}{(x_2-x_1)^2(x-x_1)} \cdot \frac{(n-3)(x-x_2)^2-(n-1)(x-x_1)^2}{(x-x_1)^{n-3}} \\ \mu &= (-1)^n \frac{(n-2)\,!}{(x_2-x_1)^2(x-x_1)} \cdot \frac{(x_2-x_1)[(x-x_1)+(x-x_2)]}{(x-x_1)^{n-4}} \\ \nu &= (-1)^n \frac{(n-2)\,!}{(x_2-x_1)^2(x-x_1)} \cdot \frac{2(x-x_1)^2}{(x-x_2)^{n-3}}. \end{aligned}$$

Les polynômes φ_1, φ_2 sont ainsi complètement déterminés.

Les formules (54) et (55) montrent, que dans la formule de dérivation numérique (50), nous avons

$$(59)\qquad \alpha_0(x) = \lambda + \nu$$

$$\alpha_j(x) = (-1)^j \left[\lambda \frac{(x-x_1)^j}{j\,!} + \mu \frac{(x-x_1)^{j-1}}{(j-1)\,!} + \nu \frac{(x-x_2)^j}{j\,!} \right]$$

pour $j = 1, 2, \ldots, n-4$, et

$$(60)\qquad A_0(x) = -\lambda, \quad A_1(x) = \mu, \quad B_0(x) = -\nu.$$

La reste de la formule de dérivation numérique (50) pour $x < x_1$ est

$$(61)\qquad R_0(x) = (-1)^{n-1} \int_x^{x_2} \varphi_0(x, s) f^{(n)}(s)\, ds$$

où le noyau $\varphi_0(x, s)$, coïncide pour le point x considéré, sur les intervalles $[x, x_1]$, $[x_1, x_2]$, avec les polynômes $\varphi_1(s)$ et $\varphi_2(s)$.

Pour l'étude du reste $R_0(x)$, sont très utiles les théorèmes 1 et 2, que nous donnons dans l'alinéa suivant.

7. Théorème 1. *Dans la formule de dérivation numérique (50) le coefficient $\alpha_0(x)$ de $f(x)$ est positif.*

En effet, d'après les formules (59) et (58), nous avons

$$\alpha_0(x) = (-1)^n \frac{(n-2)\,!}{(x_2-x_1)^2(x-x_1)} \left[\frac{(n-3)(x-x_2)^2-(n-1)(x-x_1)^2}{(x-x_1)^{n-3}} + \right.$$
$$\left. + 2\frac{(x-x_1)^2}{(x-x_2)^{n-3}} \right]$$

ou bien

$$\alpha_0(x) = (-1)^n \frac{(n-2)\,!}{(x_2-x_1)^2(x-x_1)} \left[(n-1)\frac{(x-x_2)^2-(x-x_1)^2}{(x-x_1)^{n-3}} - \right.$$
$$\left. -2\frac{(x-x_2)^{n-1}-(x-x_1)^{n-1}}{(x-x_1)^{n-3}\cdot(x-x_2)^{n-3}} \right]$$

où encore

$$\alpha_0(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-2)!}{(x_2-x_1)(x-x_1)^{n-2}\cdot(x-x_2)^{n-3}} \sum_{k=2}^{n} \beta_k(x), \tag{62}$$

où nous avons posé

$$\beta_k(x) = (x-x_2)^{n-3}[(x-x_2)+(x-x_1)] - 2(x-x_2)^{n-k}(x-x_1)^{k-2} \tag{63}$$

Nous remarquons que

$$\beta_2(x) + \beta_3(x) = 2(x-x_2)^{n-3}[(x-x_2)+(x-x_1)] - 2(x-x_2)^{n-2} - \\ - 2(x-x_2)^{n-3}(x-x_1) = 0$$

de sorte que la formule (62) devient

$$\alpha_0(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-2)!}{(x_2-x_1)^{n-2}(x_2-x_2)^{n-3}} \sum_{k=4}^{n} \beta_k(x). \tag{62'}$$

Mais d'après la formule (63), nous avons

$$\beta_4(x) = -(x_2-x_1)\{(x-x_2)^{n-4}[(x-x_2)+(x-x_1)] + \\ + (x-x_2)^{n-4}\cdot(x-x_1)\} \tag{62''}$$

et

$$\beta_k(x) = -(x_2-x_1)\{(x-x_2)^{n-k}[(x-x_2)^{k-3}+(x-x_2)^{k-4}(x-x_1)+\ldots \\ \ldots+(x-x_1)^{k-3}] + (x-x_2)^{n-k}(x-x_1)[(x-x_2)^{k-4} + \\ + (x-x_2)^{k-5}(x-x_1) + \ldots + (x-x_1)^{k-4}]\} \tag{62'''}$$

pour $k = 5, 6, \ldots, n$.

Les coefficients $\beta_4(x)$, $\beta_5(x), \ldots, \beta_n(x)$ ont le signe de $(-1)^{n-2}$ parceque $x < x_1 < x_2$. Il résulte alors d'après la formule (62) que $\alpha_0(x) > 0$ et par suite le théorème 1 est démontré.

T h é o r è m e 2. *Le noyau $\varphi_0(x, s)$, pour le point x donné, où $x < x_1 < x_2$ considéré comme fonction de s, et qui coïncide sur les intervalles $[x, x_1]$, $[x_1, x_2]$, avec les polynômes φ_1 et φ_2, ne s'anule pas sur l'intervalle (x, x_2) et a la signe de $(-1)^{n-1}$ sur cet intervalle.*

En effet d'après les conditions aux limites (53), la fonction de s, $\varphi_0(x, s)$ est continue sur l'intervalle $[x, x_2]$, avec ses dérivées succesives jusqu'à la dérivée d'ordre $n-3$. La fonction $\varphi_0(x, s)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[x_1, x_2]$. Supposons alors qu'elle s'annule en un point x' de l'intervalle (x, x_1). En tenant compte des conditions aux limites (53) des points x et x_2 on peut appliquer le théorème de Rolle successivement et déduire de cette manière que φ_0' s'annule en deux points de l'intervalle (x, x_2), ensuite que φ_0'' s'annule en deux points de l'intervalle (x, x_2), et aussi que φ_0''', $\varphi_0^{(4)}, \ldots, \varphi_0^{(n-3)}$ s'annulent en trois points de l'intervalle (x, x_2). Mais $\varphi_2^{(n-3)}(s)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[x_1, x_2)$. Donc les trois zéros de $\varphi_0^{(n-3)}$ doivent être des zéros de $\varphi_1^{(n-3)}(s)$. En appliquant à $\varphi_1^{(n-3)}(s)$ le théorème de Rolle, on déduit que la dérivée $\varphi_1^{(n-2)}(s)$ doit s'annuler en deux points de l'intervalle (x, x_1) et que la dérivée

$\varphi_1^{(n-1)}(s)$ doit s'annuler en un point de l'intervalle (x, x_1). Mais cela est lmpossible parceque, d'après le théorème 1, nous avons

$$\varphi_1^{(n-1)}(s) = \lambda + \nu = \alpha_0(x) > 0.$$

Nous sommes donc arrivé à une contradiction, d'où il résulte que la fonction $\varphi_0(x, s)$ ne s'annule pas sur l'intervalle (x, x_2). D'après la dernière formule (58), le coefficient ν est positif et la première formule (56) montre que $\varphi_2(s)$ a le signe de $(-1)^{n-1}$ sur l'intervalle $[x_1, x_2)$. Donc la fonction $\varphi_0(x, s)$ a le signe de $(-1)^{n-1}$ sur l'intervalle (x, x_2).

Il résulte du théorème 2, que *la formule de dérivation numérique* (50) *a la degré d'exactitude égal à* $n-1$, *lorsque* $x < x_1 < x_2$ et on peut mettre alors le reste $R_0(x)$, aussi sous la forme

$$R_0(x) = (-1)^{n-1} f^{(n)}(\xi) \int_x^{x_2} \varphi_0(x, s)\, ds \tag{64}$$

où $\xi \in (x, x_2)$.

On démontre facilement à l'aide de la formule (50) que

$$(-1)^{n-1} \int_x^{x_2} \varphi_0(x, s)\, ds = \frac{(x - x_1)\,[2(x - x_2) + (x - x_1)]}{n(n-1)}$$

et la formule (64) devient

$$R_0(x) = \frac{(x - x_1)\,[2(x - x_2) + (x - x_1)]}{n(n-1)} f^{(n)}(\xi) \tag{65}$$

d'où résulte l'évaluation

$$|R_0(x)| \leqslant \frac{(x - x_1)\,[2(x - x_2) + (x - x_1)]}{n(n-1)} M_n; \quad M_n = \sup |f^{(n)}(s)| \tag{66}$$

8. Considérons *le cas* $x > x_2$ et attachons aux intervalles $[x_1, x_2]$, $[x_2, x]$, les polynômes φ_1, φ_2 solutions des équations différentielles

$$\varphi_1^{(n)} = 0, \qquad \varphi_2^{(n)} = 0. \tag{67}$$

Nous aurons les formules

$$\begin{aligned} &(\varphi_1^{(n-1)} f - \varphi_1^{(n-2)} f' + \dots + (-1)^{n-1} \varphi_1 f^{(n-1)})_{x_1}^{x_2} = (-1)^{n-1} \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1 f^{(n)}\, ds \\ &(\varphi_2^{(n-1)} f - \varphi_2^{(n-2)} f' + \dots + (-1)^{n-1} \varphi_2 f^{(n-1)})_{x_2}^{x} = (-1)^{n-1} \int_{x_2}^{x} \varphi_2 f^{(n)}\, ds. \end{aligned} \tag{68}$$

Si nous introduisons les conditions aux limites

$$\begin{array}{lll} \varphi_1(x_1) = 0, & \varphi_1'(x_1) = 0, \dots, & \varphi_1^{(n-3)}(x_1) = 0 \\ \varphi_1(x_2) = \varphi_2(x_2), & \varphi_1'(x_2) = \varphi_2'(x_2), \dots, & \varphi_1^{(n-2)}(x_2) = \varphi_2^{(n-2)}(x_2) \\ \varphi_2(x) = 0, & \varphi_2'(x) = (-1)^{n-2}, & \varphi_2''(x) = 0 \end{array} \tag{69}$$

et si nous ajoutons membre à membre les formules (68) nous aurons la formule de dérivation numérique de la forme (50), dans laquelle

$$\alpha_j(x) = (-1)^{j+1} \varphi_2^{(n-j-1)}(x) \tag{70}$$

pour $j = 0, 1, \ldots, n-4$, et

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \varphi_1^{(n-1)}(x_1) \\ A_1(x) &= -\varphi_1^{(n-2)}(x_1) \\ B_0(x) &= \varphi_2^{(n-1)}(x_2) - \varphi_1^{(n-1)}(x_2). \end{aligned} \tag{71}$$

La solution du système d'équations (67) qui satisfait aux conditions (69) est donnée par les formules

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= -\lambda \frac{(s-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} - \mu \frac{(s-x_1)^{n-2}}{(n-2)!} \\ \varphi_2(s) &= -\lambda \frac{(s-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} - \mu \frac{(s-x_1)^{n-2}}{(n-2)!} - \nu \frac{(s-x_2)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned} \tag{72}$$

En écrivant que les conditions aux limites du point x sont vérifiées, nous aurons les équations (57), avec la différence que $x > x_2$, qui déterminent λ, μ, ν et nous aurons les formules (58).

Les formules (70) et (71) deviennent alors

$$\begin{aligned} \alpha_0(x) &= \lambda + \nu \\ \alpha_j(x) &= (-1)^j \left[\lambda \frac{(x-x_1)^j}{j!} + \mu \frac{(x-x_1)^{j-1}}{(j-1)!} + \nu \frac{(x-x_2)^j}{j!} \right] \end{aligned} \tag{73}$$

pour $j = 1, 2, \ldots, n-4$ et

$$A_0(x) = -\lambda, \quad A(x) = \mu, \quad B_0(x) = -\nu. \tag{74}$$

Le reste de la formule de dérivation numérique (50) pour $x > x_2$, est

$$R_2(x) = (-1)^{n-1} \int_{x_1}^{x} \varphi_2(x, s) f^{(n)}(s) \, ds \tag{75}$$

où le noyau $\varphi_2(x, s)$ coïncide pour le point x considéré, sur les intervalles $[x_1, x_2]$, $[x_2, x]$, avec les polynômes φ_1, φ_2 donnés par les formules (72).

Pour l'étude du reste $R_2(x)$, nous utiliserons des théorèmes 1′ et 2′ que nous donnons dans l'alinéa suivant.

9. Théorème 1′. *Dans la formule de dérivation numérique (50) le coefficient $\alpha_0(x)$ de $f(x)$ est différent de zéro et a le signe de $(-1)^n$.*

Le coefficient $A_0(x)$ est également différent de zéro et a le signe de $(-1)^n$.

En effet comme dans le cas du théorème 1, on a la formule (62′) et les formules (62″) et (62‴) montrent que pour $x > x_2 > x_1$, les $\beta_k(x)$ sont négatifs pour $k = 4, 5, \ldots, n$. Il résulte que $\alpha_0(x) \neq 0$ et a le signe de $(-1)^n$.

En ce qui concerne $A_0(x)$, d'après les formules (74) et (58) nous avons

$$A_0(x) = -\lambda = (-1)^{n+1} \frac{(n-2)\,!}{(x_2-x_1)^2(x-x_1)} \frac{(n-3)(x-x_2)^2-(n-1)(x-x_1)^2}{(x-x_1)^{n-3}}$$

et nous pouvons écrire

$$A_0(x) = (-1)^n \frac{(n-2)\,!}{(x_2-x_1)^2(x-x_1)} \cdot \frac{(n-1)(x_2-x_1)\,[(x-x_2)+(x-x_1)]+2(x-x_2)^2}{(x-x_1)^{n-3}}$$

d'où il résulte que $A_0(x) \neq 0$ et a le signe de $(-1)^n$.

Théorème 2'. *Le noyau $\varphi_2(x, s)$ pour le point x donné, où $x_1 < x_2 < x$, considéré comme fonction de s, et qui coïncide sur les intervalles $[x_1, x_2]$, $[x_2, x]$ avec les polynômes φ_1 et φ_2 ne s'annule pas sur l'intervalle (x_1, x) et a le signe de $(-1)^{n-1}$ sur cet intervalle.*

Supposons le contraire, que la fonction $\varphi_2(x, s)$ s'annule en un point $s = x'$ de l'intervalle (x_1, x). Alors en apliquant successivement le théorème de Rolle, on déduit que la dérivée φ_2' s'annule en deux points de l'intervalle (x_1, x), ensuite que la dérivée φ_2'' s'annule en deux points de l'intervalle (x_1, x) et que les dérivées φ_2''', $\varphi_2^{(4)}$, $\ldots$, $\varphi_2^{(n-2)}$ s'annulent, chaqu'une, en trois points de l'intervalle (x_1, x). Désignons par ξ_1, ξ_2, ξ_3 les zéros de $\varphi_2^{(n-2)}$ sur l'intervalle (x_1, x). Sur chaque intervalle $(x_1, x_2]$, (x_2, x) on ne peut placer qu'un point de la suite ξ_1, ξ_2, ξ_3.

En effet supposons que ξ_1 et ξ_2 $(x_1, x_2]$. Alors, en appliquant de nouveau le théorème de Rolle on en déduit que $\varphi_1^{(n-1)}(s)$ doit s'annuler sur l'intervalle (x_1, x_2). Mais on a

$$\varphi_1^{(n-1)}(s) = -\lambda = A_0(x)$$

et d'après le théorème 1', $A_0(x) \neq 0$. Cela montre que sur l'intervalle $(x_1, x_2]$ ne peut se trouver qu'un seul point ξ disons ξ_1.

Supposons que les points ξ_2 et $\xi_3 \in (x_2, x)$. Alors, en appliquant le théorème de Rolle on en déduit que la dérivée $\varphi_2^{(n-1)}(s)$ doit s'annuler en un point de l'intervalle (x_2, x). Mais

$$\varphi_2^{(n-1)}(s) = -(\lambda + \nu) = -\alpha_0(x)$$

et d'après le théorème 1', $\alpha_0(x) \neq 0$. Cela montre que sur l'intervalle (x_2, x) ne peut se trouver qu'un seul point de ξ_2 et ξ_3.

Ainsi nous sommes arrivé à une contradiction, d'où résulte que la fonction $\varphi_2(x, s)$ ne s'annule pas sur l'intervalle (x_1, x).

On a :

$$\varphi_1(x_2) = (-1)^{n-1} \frac{(x_2-x_1)^{n-3}}{(n-1)(x-x_1)^{n-2}} [(n-3)(x-x_2)^2+(n-1)(x-x_1)(x-x_2)]$$

ce qui montre que $\varphi_2(x, s)$ a le signe de $(-1)^{n-1}$ sur l'intervalle (x_1, x).

Il résulte du théorème 2' que *la formule de dérivation numérique* (50), *a le degré d'exactitude égal à $n-1$, lorsque $x_1 < x_2 < x$.*

On peut mettre alors le reste, donné par la formule (75), sous la forme

$$R_2(x) = (-1)^{n-1} f^{(n)}(\xi) \int_{x_1}^{x} \varphi_2(x, s)\, ds$$

où $\xi \in (x_1, x)$.

Il est facile de voir que

$$(-1)^{n-1} \int_{x_1}^{x} \varphi_2(x, s) ds = \frac{(x-x_1)[2(x-x_2) + (x-x_1)]}{n(n-1)}.$$

Nous pouvons donc écrire

$$R_2(x) = \frac{(x-x_1)[2(x-x_2) + (x-x_1)]}{n(n-1)} f^{(n)}(\xi) \tag{76}$$

où $\xi \in (x_1, x)$ est de cette formule il résulte l'évaluation

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{(x-x_1)\,[2\,(x-x_2) + (x-x_1)]}{n\,(n-1)} M_n ; \quad M_n = \sup_{(x_1,\, x)} |f^{(n)}(x)|. \tag{77}$$

10. Considérons enfin *le cas* $x_1 < x < x_2$. Comme dans les cas précédents, attachons aux intervalles $[x_1, x]$, $[x, x_2]$ les polynômes φ_1, φ_2 solutions des équations différentielles

$$\varphi_1^{(n)} = 0, \quad \varphi_2^{(n)} = 0. \tag{78}$$

Nous aurons les formules

$$\begin{gathered}(\varphi_1^{(n-1)} f - \varphi_1^{(n-2)} f' + \ldots + (-1)^{n-1} \varphi_1 f^{(n-1)})_{x_1}^{x} = (-1)^{n-1} \int_{x_1}^{x} \varphi_1 f^{(n)} ds \\ (\varphi_2^{(n-1)} f - \varphi_2^{(n-2)} f' + \ldots + (-1)^{n-1} \varphi_2 f^{(n-1)})_{x}^{x_2} = (-1)^{n-1} \int_{x}^{x_2} \varphi_2 f^{(n)}\, ds \,.\end{gathered} \tag{79}$$

Introduisons les conditions aux limites

$$\begin{gathered}\varphi_1(x_1) = 0 \quad \varphi_1'(x_1) = 0, \ldots, \varphi_1^{(n-3)}(x_1) = 0. \\ \varphi_1(x) = \varphi_2(x), \quad \varphi_1'(x) - \varphi_2'(x) = (-1)^{n-2}, \quad \varphi_1''(x) = \varphi_2''(x) \\ \varphi_2(x_2) = 0, \; \varphi_2'(x_2) = 0, \ldots, \; \varphi_2^{(n-3)}(x_2) = 0, \; \varphi_2^{(n-2)}(x_2) = 0\end{gathered} \tag{80}$$

et ajoutons membre à membre les formules (79). Nous aurons la formule de dérivation numérique (50), avec

$$\alpha_j(x) = (-1)^{j+1} \, [\varphi_1^{(n-j-1)}(x) - \varphi_2^{(n-j-1)}(x)] \tag{81}$$

pour $j = 0, 1, \ldots, n-4$ et

$$\begin{gathered}A_0(x) = \varphi_1^{(n-1)}(x_1) \\ A_1(x) = -\varphi_1^{(n-2)}(x_1). \\ B_0 = -\varphi_2^{(n-1)}(x_2).\end{gathered} \tag{82}$$

La solution des équations différentielles (78) qui vérifient les conditions aux limites (80) des points x_1 et x_2 est

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= -\lambda \frac{(s-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} - \mu \frac{(s-x_1)^{n-2}}{(n-2)!} \\ \varphi_2(s) &= \nu \frac{(s-x_2)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned} \tag{83}$$

En écrivant que les conditions aux limites du point x sont vérifiées, nous avons les équations (57) pour déterminer λ, μ, ν, avec la différence que $x_1 < x < x_2$. Les valeurs de λ, μ, ν sont données par les formules (58).

Les formules (81) et (82) montrent que

$$\begin{aligned} \alpha_0(x) &= \lambda + \nu \\ \alpha_j(x) &= (-1)^j \left[\lambda \frac{(x-x_1)^j}{j!} + \mu \frac{(x-x_1)^{j-1}}{(j-1)!} + \nu \frac{(x-x_2)^j}{j!} \right] \end{aligned} \tag{84}$$

et que

$$A_0(x) = -\lambda, \quad A_1(x) = \mu, \quad B_0(x) = -\nu. \tag{84'}$$

Le reste de la formule de dérivation numérique (50) pour $x_1 < < x < x_2$ est

$$R_1(x) = (-1)^{n-1} \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1(x, s) f^{(n)}(s) \, ds \tag{85}$$

où le noyau $\varphi_1(x, s)$ coïncide pour le point x considéré, sur les intervalles $[x_1, x]$, $[x, x_2]$, avec les polynômes φ_1, φ_2 donnés par les formules (83).

Le polynôme φ_2 ne s'annule pas sur l'intervalle $[x, x_2]$ et nous avons

$$\varphi_2(x) = (-1)^n \frac{2(x-x_1)(x-x_2)^2}{(n-1)\cdot(x_2-x_1)^2} \tag{86}$$

ce qui prouve que $\varphi_2(s)$ *a le signe de* $(-1)^n$ *sur l'intervalle* $[x, x_2]$.

Dans l'alinéa suivant nous allons étudier le signe du polynôme $\varphi_1(s)$, pour toutes les valeurs de $s \in (x_1, x)$.

11. Nous pouvons écrire

$$\varphi_1(s) = -\frac{(s-x_1)^{n-2}}{(n-1)!} [\lambda(s-x_1) + (n-1)\mu]$$

ou bien

$$\varphi_1(s) = -\frac{(s-x_1)^{n-2}}{(n-1)!} \psi_1(s) \tag{87}$$

en posant

$$\psi_1(s) = \lambda(s-x_1) + (n-1)\mu. \tag{88}$$

Nous avons

$$(89) \qquad \psi_1(x_1) = (-1)^n \frac{(n-1)!}{(x_2-x_1)} \frac{2\left(x - \dfrac{x_1+x_2}{2}\right)}{(x-x_1)^{n-3}}.$$

D'après les conditions aux limites (80) du point x, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ et la formule (86), on a

$$-\frac{(x-x_1)^{n-2}}{(n-1)!} \psi_1(x) = (-1)^n \frac{2(x-x_1)(x-x_2)^2}{(n-1)(x_2-x_1)^2}$$

d'où il résulte que

$$\psi_1(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-2)!}{(x_2-x_1)^2} \frac{2(x-x_2)^2}{(x-x_1)^{n-3}}$$

et par suite

$$(90) \qquad (-1)^{n-1} \psi_1(x) > 0.$$

Les formule (89) et (90) montrent que pour $x < \dfrac{x_1+x_2}{2}$, $\psi_1(x_1)$ et $\psi_1(x)$ ont le même signe et par suite $\psi_1(s)$ et $\varphi_1(s)$ ne s'annulent pas sur l'intervalle $(x_1, x]$. Le signe de $\varphi_1(s)$ est dans ce cas le signe de $(-1)^n$.

Pour $x = \dfrac{x_1+x_2}{2}$, nous avons, d'après les formules (58)

$$\lambda = (-1)^{n-1} \frac{(n-2)!}{2\left(\dfrac{x_2-x_1}{2}\right)^{n-2}}, \quad \mu = 0, \quad \nu = -\frac{(n-2)!}{2\left(\dfrac{x_2-x_1}{2}\right)^{n-2}}$$

et par suite, d'après les formules (83),

$$\varphi_1(s) = (-1)^n \frac{(n-2)!}{2\left(\dfrac{x_2-x_1}{2}\right)^{n-2}} \frac{(s-x_1)^{n-1}}{(n-1)!};$$

$$\varphi_2(s) = (-1)^n \frac{(n-2)!}{2\left(\dfrac{x_2-x_1}{2}\right)^{n-2}} \cdot \frac{(x_2-s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Les fonctions $\varphi_1(s)$ et $\varphi_2(s)$ ne s'annulent pas sur l'intervalle (x_1, x_2) et ont le signe de $(-1)^n$.

Donc, *pour* $x \in \left(x_1, \dfrac{x_1+x_2}{2}\right]$, *la fonction de s*, $\varphi_1(x, s)$, *ne s'annule pas sur l'intervalle* (x_1, x_2) *et a la signe de* $(-1)^n$.

La formule de dérivation numérique a dans ce cas le degré d'exactitude égal à n — 1.

Lorsque $x \in \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right)$, les formules (89) et (90) montrent que

$$(-1)^n \psi_1(x) > 0, \quad (-1)^n \psi_1(x) < 0.$$

Le polynôme $\varphi_1(s)$ s'annule donc en un point $x' \in (x_1, x)$ et a le signe de $(-1)^{n-1}$ sur l'intervalle $(x_1, x']$ et le signe de $(-1)^n$ sur l'intervalle (x', x).

Donc pour $x \in \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right)$ le noyau $\varphi_1(x, s)$, considéré comme fonction de s, s'annule en un point x' de l'intervalle (x_1, x_2) et a le signe de $(-1)^{n-1}$ sur l'intervalle (x_1, x') et le signe de $(-1)^n$ sur l'intervalle (x', x_2).

Le reste $R_1(x)$ de la formule de dérivation numérique, donné par la formule (85), montre que le degré d'exactitude de la formule, dépend de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi_1(x, s)\, ds.$$

Nous avons

$$(-1)^{n-1} \int_{n_1}^{n_2} \varphi_1(x, s)\, ds = \frac{3(x - x_1)(x - x^*)}{n(n-1)}$$

où

(91) $$x^* = \frac{x_1 + 2x_2}{3}.$$

Il résulte que *pour les points de l'intervalle* $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right)$ *différents de* x^*, *le degré d'exactitude de la formule de dérivation numérique* (50) *est* $n - 1$. Si $x = x^*$, le degré d'exactitude de la formule (50) est plus grand que $n - 1$.

Nous dirons que le noeud x^* est un *noeud exceptionnel* et que la formule de dérivation numérique (50), correspondante est une *formule exceptionnelle.*

12. *Cas du noeud exceptionnel.* Nous avons vu dans l'alinéa précédent que la formule de dérivation numérique (50), exceptionnelle, a le degré d'exactitude au moins égal à n, ce qu'on peut d'ailleurs vérifier directement.

Mais c'est dans l'exprit de notre travail de déduire ce résultat de l'expression du reste R de la formule (50) exceptionnelle que nous obtiendrons par un problème aux limites, en supposant que $f \in C^{n+1}[x_1, x_2]$.

A cet effet, attachons aux intervalles $[x_1, x]$, $[x, x_2]$ les polynômes φ_1, φ_2 solutions des équations différentielles

(92) $$\varphi_1^{(n+1)} = 0, \quad \varphi_2^{(n+1)} = 0.$$

Nous avons les formules

$$
(93) \quad
\begin{aligned}
&(\varphi_1^{(n)}f - \varphi_1^{(n-1)}f' + \ldots + (-1)^n \varphi_1 f^{(n)})_{x_1}^{x} = (-1)^n \int_{x_1}^{x} \varphi_1(s) f^{(n+1)}(s)\, ds \\
&(\varphi_2^{(n)}f - \varphi_2^{(n-1)}f' + \ldots + (-1)^n \varphi_2 f^{(n)})_{x}^{x_2} = (-1)^n \int_{x}^{x_2} \varphi_2(s) f^{(n+1)}(s)\, ds.
\end{aligned}
$$

Relativement à ces formules posons nous le

Problème aux limites. Déterminer la solution des équations différentielles (92), qui satisfait aux conditions aux limites

$$
(94) \quad
\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1) = 0 \quad \varphi_1'(x_1) = 0, \ldots, \varphi_1^{(n-2)}(x_1) = 0 \\
&\varphi_1(x) = \varphi_2(x), \quad \varphi_1'(x) = \varphi_2'(x), \quad \varphi_1''(x) - \varphi_2''(x) = (-1)^{n-2}, \ \varphi_1'''(x) = \varphi_2'''(x) \\
&\varphi_2(x_2) = 0, \quad \varphi_2'(x_2) = 0, \ldots, \varphi_2^{(n-1)}(x_2) = 0.
\end{aligned}
$$

Le noeud x sera déterminé de manière que ce problème soit possible et nous verrons que x est précisément le noeud exceptionnel.

En effet, la solution des équations différentielles (92) qui satisfait aux conditions aux limites des noeuds x_1 et x_2 est

$$
(95) \quad
\begin{aligned}
&\varphi_1(s) = -\lambda \frac{(s - x_1)^n}{n!} - \mu \frac{(s - x_1)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\varphi_2(s) = \nu \frac{(s - x_2)^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

En écrivant que les conditions du point x sont également satisfaites, nous avons les équations

$$
(96) \quad
\begin{aligned}
&\lambda \frac{(x - x_1)^n}{n!} + \mu \frac{(x - x_1)^{n-1}}{(n-1)!} + \nu \frac{(x - x_2)^n}{n!} = 0. \\
&\lambda \frac{(x - x_1)^{n-1}}{(n-1!} + \mu \frac{(n - x_1)^{n-2}}{(n-2)!} + \nu \frac{(x - x_2)^{n-1}}{(n-1)!} = 0. \\
&\lambda \frac{(x - x_1)^{n-2}}{(n-2)!} + \mu \frac{(x - x_1)^{n-3}}{(n-3)!} + \nu \frac{(x - x_2)^{n-2}}{(n-2)!} = (-1)^{n-1} \\
&\lambda \frac{(x - x_1)^{n-3}}{(n-3)!} + \mu \frac{(x - x_1)^{n-4}}{(n-4)!} + \nu \frac{(x - x_2)^{n-3}}{(n-3)!} = 0.
\end{aligned}
$$

pour déterminer λ, μ, ν et x.

Les trois dernières équations (96) sont identiques aux équations (57) dont la solution est donnée par les formules (58). En écrivant que la première équation (96) est aussi vérifiée, nous avons l'équation

$$
(97) \quad 3x - x_1 - 2x_2 = 0
$$

pour déterminer le noeud x, ce qui montre que x est le noeud exceptionnel

En remplaçant dans les formules (93) les polynômes φ_1 et φ_2 par la solution du problème aux limites et en ajoutant membre à membre ces formules, on trouve la formule de dérivation numérique

$$f^{(n-2)}(x^*) = \sum_{j=0}^{n-4} \alpha_j f^{(j)}(x^*) + A_0 f(x_1) + A_1 f'(x_1) + B_0 f(x_2) + R \tag{98}$$

où

$$\alpha_j = (-1)^{j+1} [\varphi_1^{(n-j)}(x^*) - \varphi_2^{(n-j)}(x^*)] \tag{99}$$

pour $j = 0, 1, \ldots, n-4$, est

$$A_0 = \varphi_1^{(n)}(x_1), \quad A_1 = -\varphi_1^{(n-1)}(x_1), \quad B_0 = -\varphi_2^{(n)}(x_2). \tag{100}$$

D'après les formules (95) nous avons

$$\alpha_0 = \lambda + \nu \tag{101}$$

$$\alpha_j = (-1)^j \left[\lambda \frac{(x^* - x_1)^j}{j!} + \mu \frac{(x^* - x_1)^{j-1}}{(j-1)!} + \nu \frac{(x^* - x_2)^j}{j!}\right]$$

pour $j = 1, 2, \ldots, n-4$, et

$$A_0 = -\lambda, \quad A_1 = \mu, \quad B_0 = -\nu \tag{102}$$

ce qui prouve que la formule (98) coïncide avec la formule exceptionnelle (50).

Le reste de la formule exceptionnelle est

$$R = \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1(s) f^{(n+1)}(s)\, ds \tag{103}$$

où la function φ coïncide avec les polynômes φ_1 et φ_2 sur les intervalles $[x_1, x]$, $[x, x_2]$, et il nous reste à étudier la fonction φ.

Théorème 3. *Dans l'expression (103) du reste de la formule exceptionnelle (98), la fonction φ ne s'annule pas sur l'intervalle (x_1, x_2) et a le signe de $(-1)^{n-1}$.*

En effet, d'après les formules (95), la fonction $\varphi_2(s)$, ne s'annule pas sur l'intervalle (x^*, x_2) et a le signe de $(-1)^{n-1}$.

D'autre part, nous pouvons écrire

$$\varphi_1(s) = -\frac{(s - x_1)^{n-1}}{n!} [\lambda(s - x_1) + n\mu] = -\frac{(s - x_1)^{n-1}}{n!} \psi_1(s)$$

où

$$\psi_1(s) = \lambda(s - x_1) + n\mu.$$

Nous remarquons d'après les formules (58) que $\psi_1(x_1) = n\mu$ et a le signe de $(-1)^n$, et que de l'égalité $\varphi_1(x^*) = \varphi_2(x^*)$, il résulte que $\psi_1(x^*)$ a aussi le signe de $(-1)^n$. Donc $\psi_1(s)$ ne s'annule pas sur l'intervalle (x_1, x^*) et par suite le polynôme $\varphi_1(s)$ a le signe de $(-1)^{n-1}$ sur l'intervalle (x_1, x^*).

Le théorème 3 est ainsi démontré et il résulte que la formule de dérivation numérique exceptionnelle (98) a le degré d'exactitude égal à n.

Nous pouvons alors écrire

$$R = (-1)^n f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_1}^{x_2} \varphi(s)\, ds$$

où $\xi \in (x_1, x_2)$, et il est facile de voir que

$$(-1)^n \int_{x_1}^{x_2} \varphi(s)\, ds = -\frac{4(x_2 - x_1)^3}{27(n-1)n(n+1)}$$

de sortie que la formule précédente devient

$$R = -\frac{4(x_2 - x_1)^3}{27(n-1)(n+1)n} f^{(n+1)}(\xi) \tag{104}$$

et il résulte l'evaluation

$$|R| \leqslant \frac{4(x_2 - x_1)^3}{27(n-1)n(n+1)} M_{n+1}, \quad M_{n+1} = \sup_{(x_1, x_2)} |f^{(n+1)}(s)|. \tag{105}$$

En général les formules de dérivation numérique de la forme (50) ont le degré d'exactitude égal à $n - 1$. La formule exceptionnelle (98) apparait comme une formule spéciale de la forme (50), dont le degré d'exactitude est égal à n.

Des cas particuliers de la formule (98), $n = 4$ et $n = 5$, sont donnés comme exemples dans le Mémoire de T. Popoviciu [4] où sont données aussi les évaluations (105), correspondant à $n = 4$ et $n = 5$. (formules (31) et (32) p. 106 et 107).

Reçu le 15.VI.1968

BIBLIOGRAPHIE

1. D. V. Ionescu, *La représentation de la différence divisée généralisée d'une fonction par une intégrale définie, dans le cas des noeuds multiples* (II. Bull. Math. de la Soc. des Sc. Math. de la R. S. de Roumanie, Tome 9, 1965, p. 31–57.

2. D. V. Ionescu, *Sur quelques formules de dérivation numérique.* Al IV-lea Congres interbalcanic al matematicienilor, Bucureşti, 15 sept. 1966.

3. D. V. Ionescu, *Asupra formulelor de derivare numerică.* Colocviul de tehnici de Calcul şi Calculatoare, Bucureşti, 27 sept. 1967.

4. T. Popoviciu, *Asupra restului în unele formule de derivare numerică* (I). Cîteva proprietăţi ale formulelor de derivare numerică de exactitate maximă. Studii şi Cercetări Mat. Tomul III, 1–2, 1952, p. 53–122.