Hommage au Professeur
N. Teodorescu
à l'occasion de son 60e anniversaire

APPLICATION DES FORMULES DE QUADRATURE À L'ÉTUDE DE CERTAINES FORMULES DE DÉRIVATION NUMÉRIQUE ET DE LEURS RESTES

PAR

D. V. IONESCU
(Cluj)

L'académicien T. Popoviciu [3] a publié un important Mémoire sur les formules de dérivation numérique et a donné de nombreux exemples de telles formules dont le degré d'exactitude soit maximum.
Dans ce travail nous donnons des procédés généraux pour former des formules de dérivation numérique avec leurs restes à l'aide des formules de quadrature et nous retrouvons de cette manière, comme cas particuliers des exemples donnés par T. Popoviciu.

§ 1. APPLICATION DE LA FORMULE DE QUADRATURE DE GAUSS

1. Considérons la formule de quadrature de Gauss

$$(1)\quad \int_a^b p(s)Q(s)\,\mathrm{d}s = C_1 Qx_1 + C_2 Q(x_2) + \ldots + C_m Q(x_m) + \int_a^b \varphi(s) Q^{(2m)}(s)\,\mathrm{d}s$$

pour une fonction $Q \in C^{2n}[a, b]$, avec le poids $p(s)$. Nous supposons que $p(s)$ soit un polynôme de degré plus petit que n, et qui est positif sur l'intervalle (a, b). Les nœuds correspondants $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont distincts et compris entre a et b et les coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_m$ sont positifs. Nous avons mis le reste de la formule de quadrature (1) sous la forme d'une intégrale définie et nous avons démontré que la fonction φ ne s'annule pas sur l'intervalle (a, b) [1].

A l'aide de la formule de quadrature de Gauss nous déduisons, pour obtenir une formule de dérivation numérique et son reste, le procédé suivant :

I. *Si dans la formule de quadrature (1), où $p(s)$ est un polynôme de degré plus petit que n et ne s'annule pas sur l'intervalle (a, b), on remplace* *la fonction Q par $f^{(n)}$, où $f \in C^{n+2m}[a, b]$ et on applique à l'intégrale du premier membre la formule généralisée d'intégration par parties, on obtient une formule de dérivation numérique*

$$(2)\quad C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_m f(x_m) = [p(s) f^{(n-1)}(s) - p'(s) f^{(n-2)}(s) + \\ + \ldots + (-1)^{n-1} p^{(n-1)}(s) f(s)]_a^b - \int_a^b \varphi(s) f^{(n+2m)}(s)\, ds$$

avec son reste mis sous la forme d'une intégrale définie, où la fonction φ ne s'annule pas sur l'intervalle (a, b), ce qui veut dire que le degré d'exactitude de la formule (2) est $n + 2m - 1$.

2. Nous pouvons appliquer le procédé I, en donnant des cas particuliers, correspondant à $m = 1$, qui sont cités dans le Mémoire de T. Popoviciu, avec le n^o de la formule qui figure dans ce Mémoire.

1°. Pour $a = -h$, $b = h$, $p(s) = 1$, $n = 2$, on obtient la formule (49).

2°. Pour $a = -2h$, $b = h$, $p(s) = s + 2h$, $n = 2$ on obtient la formule (24).

Dans ce cas, lorsque $f \in c^4[a, b]$, le reste de ces formules peut être mis sous la forme

$$(3)\qquad R = \int_a^b \varphi(s) f^{(4)}(s)\, ds$$

où la fonction φ ne s'annule pas sur l'intervalle (a, b).

3°. Pour $a = -2h$, $b = h$, $p(s) = s + 2h$, $n = 3$, on obtient la formule (51).

4°. Pour $a = -3h$, $b = h$, $p(s) = \dfrac{(s + 3h)^2}{2}$, $n = 3$, on obtient la formule (29).

5°. Pour $a = -h$, $b = h$, $p(s) = \dfrac{h^2 - s^2}{2}$, $n = 3$, on obtient la formule (30).

Lorsque $f \in C^5[a, b]$, les restes de ces formules peuvent être mis sous la forme d'une intégrale définie

$$(4)\qquad R = \int_a^b \varphi(s) f^{(5)}(s)\, ds$$

où la fonction φ ne s'annule pas sur l'intervalle (a, b).

6°. Pour $a = -h$, $b = h$, $p(s) = h^2 - s^2$, $n = 4$ on obtient la formule (57).

7°. Pour $a = -4h$, $b = h$, $p(s) = \dfrac{(s + 4h)^3}{6}$, $n = 4$, on obtient la formule (39).

8°. Pour $a = -2h$, $b = 3h$, $p(s) = \dfrac{(s - 3h)^2 (s + 2h)}{6}$, $n = 4$, on obtient la formule (40).

9°. Pour $a = -3h$, $b = h$, $p(s) = \dfrac{(s + 2h)^2}{2}$, $n = 4$, on obtient la formule (56).

Lorsque $f \in C^6[a, b]$, les restes de ces formules peuvent être mis sous la forme d'une intégrale définie

$$(5)\qquad R = \int_a^b \varphi(s) f^{(6)}(s)\, ds$$

où la fonction φ ne s'annule pas sur l'intervalle $[a, b)$.

La détermination de la fonction φ, dans les formules (3), (4), ou (5) se réduit à la détermination de la fonction φ du reste d'une formule de quadrature de Gauss avec le poids $p(s)$. Ces fonctions ne s'annulent pas sur l'intervalle (a, b).

§ 2. APPLICATION DE LA FORMULE DE QUADRATURE DE TYPE GAUSS

3. Considérons la formule de quadrature de type Gauss

$$(6)\quad \int_a^b p(s) Q(s)\, ds = A_0 Q(a) + A_1 Q'(a) + \ldots + A_{i-1} Q^{(i-1)}(a) + \\ + B_0 Q(b) + B_1 Q'(b) + \ldots + B_{k-1} Q^{(k-1)}(b) + \\ + C_1 Q(x_1) + C_2 Q(x_2) + \ldots + C_m Q(x_m) + \\ + \int_a^b \varphi(s) Q^{(i+k+2m)}(s)\, ds$$

pour une fonction $Q \in C^{i+k+2m}[a, b]$, avec le poids $p(s)$. Nous supposons comme dans le § 1, que $p(s)$ soit un polynôme de degré plus petit que n, positif sur l'intervalle (a, b). Comme dans le cas de la formule de quadrature de Gauss, les nœuds $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont distincts et compris entre a et b et les coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_m$ sont positifs. Le reste de cette formule a été mis sous la forme d'une intégrale définie et nous avons démontré que la fonction φ ne s'annule pas sur l'intervalle (a, b) [2].

A l'aide de la formule de quadrature (6) de type Gauss nous déduisons, pour obtenir des formules de dérivation numérique et leurs restes, le procédé suivant :

II. *Si dans la formule de quadrature (6), où $p(s)$ est un polynôme de degré plus petit que n et ne s'annule pas sur l'intervalle (a, b), on remplace la fonction Q par $f^{(n)}$, où $f \in C^{n+i+k+2m}[a, b]$, et on applique à l'intégrale du* *premier membre la formule généralisée d'intégration par parties, on obtient la formule de dérivation numérique*

$$\begin{aligned}
& C_1 f^{(n)}(x_1) + C_2 f^{(n)}(x_2) + \ldots + C_m f^{(n)}(x_m) = \\
& = [p(s) f^{(n-1)}(s) - p'(s) f^{(n-2)}(s) + \ldots + (-1)^{n-1} p^{(n-1)}(s) f(s)]_a^b - \\
(7) \quad & - [A_0 f^{(n)}(a) + A_1 f^{(n+1)}(a) + \ldots + A_{i-1} f^{(n+i-1)}(a)] - \\
& - [B_0 f^{(n)}(b) + B_1 f^{(n+1)}(b) + \ldots + B_{k-1} f^{(n+k-1)}(b)] - \\
& - \int_a^b \varphi(s) f^{(n+i+k+2m)}(s)\, ds
\end{aligned}$$

avec son reste mis sous la forme d'une intégrale définie où la fonction φ ne s'annule pas sur l'intervalle (a, b) ce qui veut dire que le degré d'exactitude de la formule (7) est $n + i + k + 2m - 1$.

4. Comme application du procédé II nous donnons des cas particuliers correspondant à $m = 1$ et nous retrouvons de cette manière certains exemples de formules de dérivation numérique qui se trouvent dans le Mémoire de T. Popoviciu.

1° Pour $a = -2h$, $b = h$, $i = 0$, $k = 0$, $p(s) = 1$, $n = 1$ on obtient la formule (23). Lorsque $f \in C^4[a, b]$, le reste de cette formule peut être mis sous la forme (3).

2° Pour $a = -h$, $b = h$, $i = 1$, $k = 0$, $p(s) = h - s$, $n = 2$ on obtient la formule (27).

3° Pour $a = -3h$, $b = h$, $i = 2$, $k = 0$, $p(s) = 1$, $n = 1$ on obtient la formule (25).

4° Pour $a = -h$, $b = h$, $i = 1$, $k = 1$, $p(s) = 1$, $n = 1$ on obtient la formule (26).

5° Pour $a = -2h$, $b = h$, $i = 1$, $k = 0$, $p(s) = 1$, $n = 2$ on obtient la formule (50).

Lorsque $f \in C^5[a, b]$, les restes des formules citées (27), (25), (26), (50) peuvent être mis sous la forme (4).

6° Pour $a = -4h$, $b = h$, $i = 3$, $k = 0$, $p(s) = 1$, $n = 1$ on obtient la formule (33).

7° Pour $a = -3h$, $b = 2h$, $i = 2$, $k = 1$, $p(s) = 1$, $n = 1$ on obtient la formule (34).

8° Pour $a = -3h$, $b = 2h$, $i = 2$, $k = 0$, $p(s) = 2h - s$, $n = 2$ on obtient la formule (35).

9° Pour $a = -3h$, $b = h$, $i = 2$, $k = 0$, $p(s) = 1$, $n = 2$ on obtient la formule (52).

10° Pour $a = -h$, $b = h$, $i = 1$, $k = 1$, $p(s) = 1$, $n = 2$ on obtient la formule (53).

11° Pour $a = -h$, $b = h$, $i = 1$, $k = 0$, $p(s) = h - s$, $n = 3$ on obtient la formule (54).

12° Pour $a = -2h$, $b = 3h$, $i = 1$, $k = 0$, $p(s) = \dfrac{(s-3h)^2}{2}$, $n = 3$ on obtient la formule (37).

Lorsque $f \in C^6[a, b]$ les restes des formules citées (33), (34), (35), (52), (53), (54), (37) peuvent être mis sous la forme (5).

Les fonctions φ correspondant à toutes ces formules ne s'annulent pas sur l'intervalle (a, b), parce qu'elles sont identiques aux fonctions qui figurent dans les restes des formules de quadrature (6) de type Gauss.

§ 3. EXTENSIONS DES PROCÉDÉS I ET II

5. Nous avons donné les procédés I et II pour former les formules de dérivation numérique et leurs restes pour montrer la source naturelle des formules citées dans les alinéas 2 et 4. On peut étendre ces procédés en considérant une formule de quadrature quelconque

$$(8) \qquad \int_a^b p(s) Q(s)\, ds = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=0}^{k_i} A_{ij} Q^{(j)}(x_i) + \int_a^b \varphi(s) Q^{(m)}(s)\, ds$$

pour une fonction $Q \in C^m[a, b]$ avec le poids $p(s)$ polynôme de degré plus petit que n et avec les nœuds $x_1, x_2, \ldots, x_q$ multiples d'ordres $k_1, k_2, \ldots, k_q$. Cette formule conduit au procédé suivant pour obtenir une formule de dérivation numérique et son reste.

III. *Si dans la formule de quadrature (8), où $p(s)$ est un polynôme de degré plus petit que n, on remplace la fonction Q par $f^{(n)}$ où $f \in C^{n+m}[a, b]$, et on applique à l'intégrale du premier membre la formule généralisée d'intégration par parties, on obtient la formule de dérivation numérique*

$$\begin{aligned}
(9) \qquad \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=0}^{k_i} A_{ij} f^{(n+j)}(x_i) = [p(s) f^{(n-1)}(s) - p'(s) f^{(n-2)}(s) + \ldots + \\
+ (-1)^{n-1} p^{(n-1)}(s) f(s)]_a^b - \int_a^b \varphi(s) f^{(n+m)}(s)\, ds
\end{aligned}$$

avec son reste mis sous la forme d'une intégrale définie.

Le degré d'exactitude de la formule (9) est moins égal à $n + m - 1$.

Considérons comme exemple, la formule de quadrature pour la fonction au

$$\begin{aligned}
(10) \qquad \int_a^b p(s) Q(s)\, ds = \frac{(b-a)^3}{480}\left[7Q(a) - 4Q\left(\frac{a+b}{2}\right) + 7Q(b)\right] \\
+ \int_a^b \varphi(s) Q^{(4)}(s)\, ds
\end{aligned}$$

avec le poids

$$(11) \qquad p(s) = \left(s - \frac{3a+b}{4}\right)\left(s - \frac{a+3b}{4}\right).$$

La fonction φ du reste de la forme (10) coïncide sur les intervalles $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ avec les polynômes

$$
(12) \qquad
\begin{aligned}
\varphi_1(s) &= \frac{(s-a)^5}{60} - (b-a)\frac{(s-a)^4}{24} + \\
&\quad + 3\frac{(b-a)^2}{16}\frac{(s-a)^3}{16} - 7\frac{(b-a)^3}{480}\frac{(s-a)^2}{2} \\
\varphi_2(s) &= \frac{(s-b)^5}{60} + (b-a)\frac{(s-b)^4}{24} + \\
&\quad + 3\frac{(b-a)^2}{16}\frac{(s-b)^3}{16} + 7\frac{(b-a)^3}{480}\frac{(s-b)^2}{2}
\end{aligned}
$$

Si nous remplaçons dans la formule (10) la fonction Q par f''', où $f \in C^7[a, b]$, on obtient la formule de dérivation numérique

$$
(13) \qquad
\begin{aligned}
&\frac{3(b-a)^2}{16}[f''(b) - f''(a)] - (b-a)[f'(b) - f'(a)] + 2[f(b) - f(a)] = \\
&= \frac{(b-a)^3}{480}\left[7f'''(a) - 4f'''\left(\frac{a+b}{2}\right) + 7f'''(b)\right] + \int_a^b \varphi(s) f^{(7)}(s)\, ds
\end{aligned}
$$

avec son reste mis sous la forme d'une intégrale définie.

Reçu le 7 mai 1968

Université Babeş-Bolyai
Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. D.V. Ionescu, *Cuadraturi numerice*, Ed. tehnică, Bucarest, 1957, chap. V.
2. — *Cîteva formule de cuadratură mecanică*, St. cerc. şti., 1951, 16—37.
3. T. Popoviciu, *Asupra restului în unele formule de derivare numerică*. St. Cerc. Mat., 1952, 53—122.