Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" — Iaşi
Secţia I a. Matematică, tom XX, 1974

LA FORMULE DE QUADRATURE GÉNÉRALISÉE DE NEWTON

PAR

D. V. IONESCU

Dans le présent travail nous généralisons la formule de quadrature classique de Newton, à des intégrales définies de la forme

$$\int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta} f(x)\, dx,$$

où $\alpha > -1$, $\beta > -1$, la formule de quadrature ayant les noeuds a, b multiples d'ordres p, q.

§1. Une formule auxiliaire de quadrature. 1.1. Considérons une formule de quadrature de la forme

$$\begin{aligned}(1.1)\quad \int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta} f(x)\, dx &= A_0 f(a) + A_1 f^1(a) + \ldots + A_{p-1} f^{(p-1)}(a) + \\ &+ B_0 f(b) + B_1 f^1(b) + \ldots + B_{q-1} f^{(q-1)}(b)\; Cf(x_1) + R[f]\end{aligned}$$

où $\alpha > -1$, $\beta > -1$, les noeuds a, b sont multiples d'ordres p, q et le noeud $x_1 \in (a, b)$. Les coefficients de cette formule se déterminent de manière que $R[x^k] = 0$, pour $k = 0, 1, \ldots, p + q$. Il est facile de démontrer que ces coefficients sont parfaitement déterminés par ces conditions; ils dépendent de x_1.

Il est important pour ce travail de déterminer les coefficients C, A_{p-1} et B_{q-1}.

Pour cela remplaçons dans la formule (1.1) la fonction f par le produit $(x-a)^p (b-x)^q$ et dans ce cas le reste de la formule est nul. Nous aurons

$$(1.2)\qquad C(x_1-a)^p(b-x_1)^q = I_{\alpha+p,\, \beta+q},$$

où

$$I_{\alpha+p,\beta+q} = \int_a^b (x-a)^{\alpha+p} (b-x)^{\beta+q}\, dx. \tag{1.3}$$

En désignant par

$$P = \int_a^b (x-a)^{\alpha} (b-x)^{\beta}\, dx. \tag{1.4}$$

on a

$$I_{\alpha+p,\beta+q} = P\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+p)(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+q)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)\dots(\alpha+\beta+p+q+1)}(b-a)^{p+q} \tag{1.5}$$

et par suite

$$C = \frac{P}{(x_1-a)^p(b-x_1)^q}\,\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+p)(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+q)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)\dots(\alpha+\beta+p+q+1)}(b-a)^{p+q}. \tag{1.6}$$

De même en remplaçant dans la formule (1.1) la fonction f par le produit $(x-a)^{p-1}(b-x)^q(x-x_1)$ et ensuite par le produit $(x-a)^p(b-x)^{q-1}$ $(x-x_1)$, on trouve

$$A_{p-1} = \frac{P}{x_1-a}\,\frac{(b-a)^{p-1}}{(p-1)!}\,\frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1)(\beta+1)\dots(\beta+q)}{(\alpha+\beta+2)\dots(\alpha+\beta+p+q)}\times \left[x_1 - \frac{(\beta+q+1)a+(\alpha+p)b}{\alpha+\beta+p+q+1}\right], \tag{1.7}$$

$$B_{q-1} = \frac{(-1)^qP}{b-x_1}\,\frac{(b-a)^{q-1}}{(q-1)!}\,\frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p)(\beta+1)\dots(\beta+q-1)}{(\alpha+\beta+2)\dots(\alpha+\beta+p+q)}\times \left|x_1 - \frac{(\beta+q)a+(\alpha+p+1)b}{\alpha+\beta+p+q+1}\right|. \tag{1.8}$$

Lorsque $f \in C^{p+q+1}[a, b]$, on peut mettre le reste $R[f]$ de la formule (1.1), par la méthode de la fonction φ, [1], sous la forme

$$R[f] = \int_a^b \varphi f^{(p+q+1)} ds. \tag{1.9}$$

Pour préciser le degré d'exactitude de la formule de quadrature (1.1), il est nécessaire de calculer $\int_a^b \varphi ds$. En remplaçant dans la formule (1.1) la

fonction f par le produit $(x-a)^p(b-x)^q(x-x_1)$, on trouve

$$\int_a^b \varphi ds = (-1)^{q-1}\frac{P(b-a)^{p+q}}{(p+q+1)!}\,\frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p)(\beta+1)\dots(\beta+q)}{(\alpha+\beta+2)\dots(\alpha+\beta+p+q+1)}\times \left|x_1 - \frac{(\beta+q+1)a+(\alpha+p+1)b}{\alpha+\beta+p+q+2}\right|. \tag{1.10}$$

Cette formule montre que *si*

$$x_1 \neq \frac{(\beta+q+1)a+(\alpha+p+1)b}{\alpha+\beta+p+q+2}, \tag{1.11}$$

e degré d'exactitude de la formule (1.1) est $p+q$.

§2. La formule de quadrature généralisée de Simpson

2.1. *Si*

$$x_1 = \frac{(\beta+q+1)a+(\alpha+p+1)b}{\alpha+\beta+p+q+2}; \tag{2.1}$$

on a d'après la formule (1.10), $\int_a^b \varphi ds = 0$, et *le degré d'exactitude de la formule (1.1) augmente.*

Les coefficients de la formule de quadrature (1.1) se changent en $A'_0, \dots, A'_{p-2}, A'_{p-1}, B'_0, \dots, B'_{q-2}, B'_{q-1}, C'$ et notamment les coefficients C', A'_{p-1}, B'_{q-1} sont

$$C' = P\frac{(\alpha+\beta+p+q+2)^{p+q}}{(\alpha+p+1)^p(\beta+q+1)^q}\,\frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p)(\beta+1)\dots(\beta+q)}{(\alpha+\beta+2)\dots(\alpha+\beta+p+q+1)}. \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} A'_{p-1} &= P\frac{\beta+q+1}{\alpha+p+1}\cdot\frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1)(\beta+1)\dots(\beta+q)}{(\alpha+\beta+2)\dots(\alpha+\beta+p+q+1)}\,\frac{(b-a)^{p-1}}{(p-1)!}, \\ B'_{q-1} &= (-1)^{q-1}P\frac{\alpha+p+1}{\beta+q+1}\,\frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p)(\beta+1)\dots(\beta+q-1)}{(\alpha+\beta+2)\dots(\alpha+\beta+p+q+1)}\,\frac{(b-a)^{q-1}}{(q-1)!}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

La formule de quadrature (1.1) devient

$$\begin{aligned} \int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta} f(x)\, dx &= A'_0 f(a) + A'_1 f'(a) + \dots + A'_{p-2} f^{(p-2)}(a) + \\ &+ B'_0 f(b) + B'_1 f'(b) + \dots + B'_{q-2} f^{(q-2)}(b) + \\ &+ P\frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p)(\beta+1)\dots(\beta+q)}{(\alpha+\beta+2)\dots(\alpha+\beta+p+q+1)}\left[\frac{\beta+q+1}{(\alpha+p)(\alpha+p+1)}\,\frac{(b-a)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(a) + \right. \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$+\frac{(\alpha+\beta+p+q+2)^{p+q}}{(\alpha+p+1)^{p}(\beta+p+1)^{q}}f\left(\frac{(\beta+q+1)a+(\alpha+p+1)b}{\alpha+\beta+p+q+2}\right)$$
$$+(-1)^{q-1}\frac{\alpha+p+1}{(\beta+q)(\beta+p+1)}\frac{(b-a)^{q-1}}{(q-1)!}f^{(q-1)}(b)\Big|+R[f].$$

Dans la formule (2.4) on a $R[x^k]=0$, pour $k=0,1,\dots,p+q$ et $p+q+1$.

Lorsque $f\in C^{p+q+2}[a,b]$, on peut mettre le reste $R[f]$ de la formule (2.4) sous la forme

$$R[f]=\int_a^b \psi f^{(p+q+2)}\,ds.$$

La formule (2.4) fait partie de la classe des formules de quadrature de *type Gauss* [2].

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx=A_0f(a)+A_1f'(a)+\dots+A_{p-1}f^{(p-1)}(a)+ \tag{2.5}$$
$$+B_0f(b)+B_1f'(b)+\dots+B_{q-1}f^{(q-1)}(b)+$$
$$+C_1f(x_1)+C_2f(x_2)+\dots+C_nf(x_n)+R[f],$$

où p est un poids positif sur l'intervalle (a,b) et où les noeuds $x_1,x_2,\dots,x_n$ et les coefficients $A_0, A_1,\dots,A_{p-1}, B_0, B_1, B_{q-1}, C_1, C_2,\dots,C_n$ se déterminent de manière que $R[x^k]$, pour $k=0,1,\dots,2n+p+q-1$. Nous avons étudié la formule de type Gauss (2.5) dans notre travail [2]. La formule (2.4) correspond à $n=1$. Nous avons montré que la fonction ψ a le signe de $(-1)^q$ sur l'intervalle (a,b).

La formule (2.4) est *la généralisation de la formule de quadrature de Simpson, au cas des noeuds, a, b multiples d'ordres p, q* et se réduit à la formule de Simpson lorsque $p=q=1$.

Il résulte alors que la formule généralisée de Simpson (2.4), a le degré d'exactitude $p+q+1$.

D'ailleurs on peut calculer $\int_a^b \psi ds$. On trouve

$$\int_a^b \psi\,ds=(-1)^q\frac{P}{\alpha+\beta+p+q+2}\,\frac{(b-a)^{p+q+2}}{(p+q+2)!}\times \tag{2.6}$$
$$\times\frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p+1)\,(\beta+1)\dots(\beta+q+1)}{(\alpha+\beta+2)\dots(\alpha+\beta+p+q+3)}.$$

§3. La formule de quadrature généralisée de Newton. 3.1. Considérons la formule générale de quadrature (1.1) et supposons que le noeud x_1, annule le coefficient de $f^{(q-1)}(b)$, ce qui veut dire que

$$x=\overline{x}_1=\frac{(\beta+q)a+(\alpha+p+1)b}{\alpha+\beta+p+q+1}. \tag{3.1}$$

Nous dirons que $\overline{x}_1$ est un *noeud exceptionnel.*

Dans ce cas les coefficients de $f^{(p-1)}(a)$ et de $f(\overline{x}_1)$ deviennent

$$A_{p-1}=\frac{P}{\alpha+p+1}\,\frac{(b-a)^{p-1}}{(p-1)!}\,\frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1)(\beta+1)\dots(\beta+q)}{(\alpha+\beta+2)\dots(\alpha+\beta+p+q)}; \tag{3.2}$$

$$C=P\frac{(\alpha+\beta+p+q+1)^{p+q}}{(\alpha+p+1)^{p}(\beta+q)^{q}}\,\frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p)(\beta+1)\dots(\beta+q)}{(\alpha+\beta+2)\dots(\alpha+\beta+p+q+1)}, \tag{3.3}$$

et la formule de quadrature (1.1) se réduit à une formule de la forme

$$\int_a^b (x-a)^\alpha(b-x)^\beta f(x)dx=A'_0f(a)+A'_1f'(a)+\dots+A'_{p-2}f^{(p-2)}(a)+ \tag{3.4}$$
$$+B'_0f(b)+B'_1f'(b)+\dots+B'_{q-2}f^{(q-2)}(b)+$$
$$+A_{p-1}f^{(p-1)}(a)+Cf(\overline{x}_1)+R[f].$$

Les coefficients $A'_0,\dots,A'_{p-2}, B'_0,\dots,B'_{q-2}$ se déduisent des conditions imposées à la formule de quadrature (3.4), telles que le reste $R[f]$ soit nul pour $f(x)=x^k$, $K=0,1,\dots,p+q$.

La formule (3.4) peut s'écrire

$$\int_a^b (x-a)^\alpha(b-x)^\beta f(x)\,dx=A'_0f(a)+A'_1f(a)+\dots+A'_{p-2}f^{(p-2)}(a)+$$
$$+B'_0f(b)+B'_1f'(b)+\dots+B'_{q-2}f^{(q-2)}(b)+$$
$$+P\frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1)(\beta+1)\dots(\beta+q-1)}{(\alpha+p+1)(\alpha+\beta+2)\dots(\alpha+\beta+p+q)}\Big|(\beta+q)\frac{(b-a)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(a)+ \tag{3.5}$$
$$+\frac{(\alpha+p)(\alpha+\beta+p+q+1)^{p+q-1}}{(\alpha+p+1)^{p-1}(\beta+q)^{q-1}}f(\overline{x}_1)\Big|+R[f].$$

C'est une formule de *type Gauss* avec les noeuds a, b multiples d'ordres p, $q-1$ et le noeud $\overline{x}_1$.

Le reste de la formule (3.5), lorsque $f\in C^{(p+q+1)}[a,b]$, est de la forme

$$\overline{R}[f]=\int_a^b \overline{\varphi}f^{(p+q+1)}\,ds \tag{3.6}$$

où *la fonction* $\bar{\varphi}$ *a la signe de* $(-1)^{q-1}$ *sur l'intervalle* (a, b). Pour la suite de ce travail il est nécessaire de calculer $\int_a^b \bar{\varphi} ds$. On trouve

$$
\int_a^b \bar{\varphi} ds = (-1)^{q-1} \frac{P(b-a)^{p+q+1}}{(p+q+1)!(\alpha+\beta+p+q+1)} \tag{3.7}
$$

$$
\frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p+1)(\beta+1)\dots(\beta+q)}{(\alpha+\beta+2)\dots(\alpha+\beta+p+q+2)}.
$$

3.2. Reprenons la formule de quadrature (1.1) et supposons que x_1 soit un *noeud exceptionnel* qui annule le coefficient de $f^{(p-1)}_{(a)}$, c'est à dire

$$
x_1 = \bar{\bar{x}}_1 = \frac{(\beta+q+1)a+(\alpha+p)b}{\alpha+\beta+p+q+1}. \tag{3.8}
$$

Dans ce cas, on a

$$
B_{q-1} = (-1)^{q-1} \frac{P}{\beta+q+1} \frac{(b-a)^{q-1}}{(q-1)!} \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p)(\beta+1)\dots(\beta+q-1)}{(\alpha+\beta+2)\dots(\alpha+\beta+p+q)}, \tag{3.9}
$$

$$
C = P\frac{(\alpha+\beta+p+q+1)^{p+q}}{(\alpha+p)^p(\beta+q+1)^q} \cdot \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p)(\beta+1)\dots(\beta+q)}{(\alpha+\beta+2)\dots(\alpha+\beta+p+q+1)}, \tag{3.10}
$$

et la formule (1.1) devient

$$
\begin{aligned}
\int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta f(x)\,dx &= A_0'' f(a) + A_1'' f'(a) + \dots + A''_{p-2} f^{(p-2)}(a) + \\
&+ B_0'' f(b) + B_1'' f'(b) + \dots + B''_{q-2} f^{(q-2)}(b) + \\
&+ P\frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1)(\beta+1)\dots(\beta+q-1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)\dots(\alpha+\beta+p+q)} \times \\
&\times \left[(-1)^{q-1}(\alpha+p)\frac{(b-a)^{q-1}}{(q-1)!} f^{(q-1)}_{(b)} + \frac{(\alpha+p)(\alpha+\beta+p+q)^{p+q-1}}{(\beta+q+1)^{p-1}(\alpha+p)^{p-1}} f(\bar{\bar{x}}_1)\right] + R[f].
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

Dans la formule (3.11) les coefficients $A_0'', \dots, A''_{p-2}$, $B_0'', \dots, B''_{q-2}$ se déduisent des conditions imposées à cette formule, telles que $R[x^k] = 0$, pour $k = 0, 1, \dots, p+q$.

La formule (3.11) est une formule de *type Gauss* avec les noeuds a, b multiples d'ordres $p-1$, q et le noeud $\bar{\bar{x}}_1$.

Lorsque $f \in C^{p+q+1}[a, b]$, on peut mettre le reste $R[f]$ sous la forme

$$
\bar{\bar{R}}[f] = \int_a^b \bar{\bar{\varphi}} f^{(p+q+1)} ds, \tag{3.12}
$$

où *la fonction* $\bar{\bar{\varphi}}$ *a le signe de* $(-1)^q$ *sur l'intervalle* (a, b). Pour $\bar{\bar{\varphi}}$, nous avons

$$
\int_a^b \bar{\bar{\varphi}}\, ds = (-1)^q \frac{P(b-a)^{p+q+1}}{(p+q+1)!(\alpha+\beta+p+q+1)} \times \tag{3.13}
$$

$$
\times \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p)(\beta+1)\dots(\beta+q+1)}{(\alpha+\beta+2)\dots(\alpha+\beta+p+q+2)}
$$

3.3. Multiplions les deux membres des formules (3.5), (3.11) avec

$$
\frac{\beta+q+1}{\alpha+\beta+p+q+2}, \quad \frac{\alpha+p+1}{\alpha+\beta+p+q+2}, \tag{3.14}
$$

et ajoutons membre à membre. Nous aurons la formule de quadrature

$$
\begin{aligned}
\int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta f(x)\,dx &= A_0 f(a) + A_1 f'(a) + \dots + A_{p-2} f^{(p-2)}(a) + \\
&+ B_0 f(b) + B_1 f'(b) + \dots + B_{q-2} f^{(q-2)}(b) + \\
&+ P\frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1)(\beta+1)\dots(\beta+q-1)}{(\alpha+\beta+2)\dots(\alpha+\beta+p+q)(\alpha+\beta+p+q+2)} \times \\
&\times \left[\frac{(b-a)^{p-1}}{(p-1)!} \frac{(\beta+q)(\beta+q+1)}{\alpha+p+1} f^{(p-1)}(a) + \right. \\
&+ \frac{(\alpha+p)(\beta+q+1)(\alpha+\beta+p+q+1)^{p+q-1}}{(\alpha+p+1)^p(\beta+q)^{q-1}} f(\bar{x}_1) + \\
&+ \frac{(\beta+q)(\alpha+p+1)(\alpha+\beta+p+q+1)^{p+q-1}}{(\beta+q+1)^q(\alpha+p)^{p-1}} f(\bar{\bar{x}}_1) + \\
&\left. + (-1)^{q-1}\frac{(\alpha+p)(\alpha+p+1)}{\beta+q+1} \frac{(b-a)^{q-1}}{(q-1)!} f^{(q-1)}(b)\right] + R[f].
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

où les coefficients A_i et B_k sont donnés par les formules

$$
A_i = \frac{(\beta+q+1)A_i' + (\alpha+p+1)A_i''}{\alpha+\beta+p+q+2}, \tag{3.16}
$$

$$B_k = \frac{(\beta+q+1)\,B_k' + (\alpha+p+1)\,B_k''}{\alpha+\beta+p+q+2}, \tag{3.16}$$

et

$$R[f] = \int_a^b \psi f^{(p+q+1)}\, ds, \tag{3.17}$$

où

$$\psi = \frac{(\beta+q+1)\bar{\varphi}+(\alpha+p+1)\bar{\bar{\varphi}}}{\alpha+\beta+p+q+2}. \tag{3.18}$$

Les formules (3.7) et (3.12) montrent que

$$\int_a^b \psi\, ds = 0, \tag{3.19}$$

et par suite, dans la formule (3.15) nous avons $R[x^k] = 0$, pour $k = 0, 1, \ldots$ $p+q$ et $p+q+1$. Le degré d'exactitude de la formule (3.15) est donc au moins $p+q+1$. Nous allons prouver qu'il est $p+q+1$.

Si $f \in C^{p+q+2}[a,b]$ on démontre par la méthode de la fonction φ que le reste $R[f]$, de la formule (3.15) peut se mettre sous la forme

$$R[f] = \int_a^b \theta f^{(p+q+2)}\, ds. \tag{3.20}$$

Pour la fonction θ, nous avons

$$\int_a^b \theta\, ds = (-1)^q\, P\, \frac{(\alpha+\beta+p+q-1)}{(\alpha+\beta+p+q+1)^2}\, \frac{(b-a)^{p+q+2}}{(p+q+2)!} \cdot \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+p+1)\;(\beta+1)\ldots(\beta+q+1)}{(\alpha+\beta+2)\ldots(\alpha+\beta+p+q+3)}, \tag{3.21}$$

ce qui montre que *le degré d'exactitude de la formule (3.15) est $p+q+1$.*

La formule (3.15) est *la généralisation de la formule de quadrature de Newton pour des intégrales de la forme* $\int_a^b (x-a)^\alpha\,(b-x)^\beta f(x)\,dx$, *où* $\alpha > -1$, $\beta > -1$, *et avec les noeuds* a, b, *multiples d'ordres* p, q.

C'est la formule (3.15) qui a fait l'objet du présent travail.

Pour $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $p = 1$, $q = 1$, les noeuds $\bar{x}_1$ et $\bar{\bar{x}}_1$ partagent en trois parties égales l'intervalle (a, b) et la formule (3.15) se réduit à la formule classique de quadrature de Newton.

BIBLIOGRAPHIE

1. Ionescu D. V. — *Cuadraturi numerice*. Editura tehnică, Bucureşti, 1957.
2. Ionescu D. V. — *Cîteva formule de cuadratură mecanică*. Studii şi cerc. ştiinţ., Cluj, (1951), p. 16—37.

FORMULA DE CUADRATURĂ GENERALIZATĂ A LUI NEWTON

Rezumat

În această lucrare se generalizează formula de cuadratură clasică a lui Newton pentru integrale definite de forma

$$\int_a^b (x-a)^\alpha\,(b-x)^\beta f(x)\,dx$$

unde $\alpha > 1-$, $\beta > -1$, formula de cuadratură avînd nodurile a, b multiple de ordine p, q.