

UNE NOUVELLE EXTENSION DE LA FORMULE DE QUADRATURE DE LACROIX

PAR

D. V. IONESCU et A. COȚIU

*Communication faite au Colloque sur la théorie de la l'approximation des fonctions,
Cluj 15-20. IX. 1967. Séance du 16 septembre 1967*

Considérons les formules de quadrature de la forme

$$(1) \quad \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{i=0}^{2p} A_i [f(x_i) + f(x_{n-i})] + \\ + h [f(x_{2p+1}) + f(x_{2p+2}) + \dots + f(x_{n-2p-1})] + R,$$

où les noeuds $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont en progression arithmétique et $h = x_1 - x_0$.

La formule (1) correspondante à $p = 1$ et $A_0 = 3h/8, A_1 = 7h/6, A_2 = 23h/24$, est connue sous le nom de *la formule de quadrature de Lacroix* [3].

D. V. Ionescu [1] a montré qu'elle est caractérisée par son degré d'exactitude égal à 3, quel soit n , et en supposant que $f \in C^3[x_0, x_n]$ a déterminé son reste R sous la forme

$$(2) \quad R = \int_{x_0}^{x_n} \varphi f^{(2p+2)} dx,$$

où $p = 1$.

La fonction φ a été déterminée par un problème aux limites et on a démontré qu'elle coïncide sur les intervalles $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{j-1}, x_j], \dots$ avec certains polynômes $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_j, \dots$, qui jouissent de la propriété (P) exprimée par

$$(P) \quad \varphi_j(x) = \varphi_{j-1}(x+h),$$

pour $j = 3, 4, \dots, n-3$.

D. V. Ionescu et A. Coțiu [2] ont déterminé la formule (1) pour $p = 2$, de degré d'exactitude égal à 5, quel que soit n , où on suppose que $n \geq 8$, et ont trouvé

$$A_0 = \frac{475h}{1440}, \quad A_1 = \frac{1902h}{1440}, \quad A_2 = \frac{1164h}{1440},$$

$$A_3 = \frac{1586h}{1440}, \quad A_4 = \frac{1413h}{1440}.$$

En supposant que $f \in C^6[x_0, x_n]$, ils ont montré que le reste de cette formule a la forme (2), où $p = 2$, et que la fonction φ coïncide sur les intervalles $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots$ avec certains polynômes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ jouissant de la propriété (P), pour $j = 5, 6, \dots, n-5$.

Nous avons fait une nouvelle extension de la formule de quadrature de Lacroix, en déterminant une formule de la forme (1) pour $p = 3$, dont le degré d'exactitude soit égal à 7, quel que soit n .

1. En écrivant que le reste R de la formule (1), où $p = 3$, est nul pour $f = 1, (x-x_0)^2, (x-x_0)^4, (x-x_0)^6$, quel que soit n , on obtient les équations qui déterminent les coefficients A_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 6$): ces équations sont

$$(3) \quad \begin{aligned} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 &= \frac{13h}{2}, \\ A_1 + 2A_2 + 3A_3 + 4A_4 + 5A_5 + 6A_6 &= \frac{253h}{12}, \\ A_1 + 2^2A_2 + 3^2A_3 + 4^2A_4 + 5^2A_5 + 6^2A_6 &= 91h, \\ A_1 + 2^3A_2 + 3^3A_3 + 4^3A_4 + 5^3A_5 + 6^3A_6 &= \frac{52919h}{120}, \\ A_1 + 2^4A_2 + 3^4A_3 + 4^4A_4 + 5^4A_5 + 6^4A_6 &= 2275h, \\ A_1 + 2^5A_2 + 3^5A_3 + 4^5A_4 + 5^5A_5 + 6^5A_6 &= \frac{3074653h}{252}, \\ A_1 + 2^6A_2 + 3^6A_3 + 4^6A_4 + 5^6A_5 + 6^6A_6 &= 67171h. \end{aligned}$$

On calcule les valeurs de $A_0, A_1, A_2, \dots, A_6$, et la formule de quadrature que nous avons en vue est

$$(4) \quad \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{36799h}{120960} [f(x_0) + f(x_n)] + \frac{22081h}{15120} [f(x_1) + f(x_{n-1})] + \frac{54851h}{120960} [f(x_2) + f(x_{n-2})] + \frac{103h}{70} [f(x_3) + f(x_{n-3})] + \frac{89437h}{120960} \times$$

$$\times [f(x_4) + f(x_{n-4})] + \frac{16367h}{15120} [f(x_5) + f(x_{n-5})] + \frac{23917h}{24192} [f(x_6) + f(x_{n-6})] +$$

$$+ h[f(x_7) + f(x_8) + \dots + f(x_{n-7})] + R,$$

où nous supposons que $n \geq 12$.

La formule (4) est la nouvelle extension de la formule de quadrature de Lacroix.

2. En supposant que la fonction $f \in C^8[x_0, x_n]$, nous avons déterminé son reste R sous la forme (2), pour $p = 3$, où la fonction φ coïncide sur les intervalles $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ avec les polynômes $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, donnés par les formules

$$(5) \quad \varphi_1(x) = \frac{(x-x_0)^8}{8!} - \frac{36799h}{120960} \frac{(x-x_0)^7}{7!},$$

$$(6) \quad \varphi_2(x) = \frac{(x-x_1)^8}{8!} - \frac{92487h}{120960} \frac{(x-x_1)^7}{7!} + \frac{23681}{60480} \frac{h^2}{2} \frac{(x-x_1)^6}{6!} +$$

$$- \frac{3521}{40320} \frac{h^3}{3!} \frac{(x-x_1)^5}{5!} - \frac{6559}{30240} \frac{h^4}{4!} \frac{(x-x_1)^4}{4!} - \frac{12607}{24192} \frac{h^5}{5!} \frac{(x-x_1)^3}{3!} -$$

$$- \frac{16639}{20160} \frac{h^6}{6!} \frac{(x-x_1)^2}{2!} - \frac{19519}{17280} \frac{h^7}{7!} (x-x_1) - \frac{21679}{15120} \frac{h^8}{8!},$$

$$(7) \quad \varphi_3(x) = \frac{(x-x_2)^8}{8!} - \frac{26878h}{120960} \frac{(x-x_2)^7}{7!} - \frac{8326}{60480} \frac{h^2}{2} \frac{(x-x_2)^6}{6!} -$$

$$- \frac{1284}{40320} \frac{h^3}{3!} \frac{(x-x_2)^5}{5!} + \frac{1280}{3024} \frac{h^4}{4!} \frac{(x-x_2)^4}{4!} + \frac{8712}{24192} \frac{h^5}{5!} \frac{(x-x_2)^3}{3!} -$$

$$- \frac{63976}{20160} \frac{h^6}{6!} \frac{(x-x_2)^2}{2} - \frac{319944}{17280} \frac{h^7}{7!} (x-x_2) - \frac{101620}{1512} \frac{h^8}{8!},$$

$$(8) \quad \varphi_4(x) = \frac{(x-x_3)^8}{8!} - \frac{83402h}{120960} \frac{(x-x_3)^7}{7!} + \frac{25776}{60480} \frac{h^2}{2} \frac{(x-x_3)^6}{6!} -$$

$$- \frac{3094}{40320} \frac{h^3 (x-x_3)^3}{3! \cdot 5!} - \frac{12168}{30240} \frac{h^4 (x-x_3)^4}{4! \cdot 4!} + \frac{16718}{24192} \frac{h^5 (x-x_3)^5}{5! \cdot 3!} +$$

$$+ \frac{46896}{20160} \frac{h^6 (x-x_3)^6}{6! \cdot 2} - \frac{395434}{17280} \frac{h^7 (x-x_3)^7}{7!} - \frac{3942888}{15120} \frac{h^8 (x-x_3)^8}{8!}.$$

$$(9) \quad \varphi_3(x) = \frac{(x-x_4)^3}{8!} - \frac{51879h}{120960} \frac{(x-x_4)^5}{7!} + \frac{2854}{60480} \frac{h^2 (x-x_4)^6}{2 \cdot 6!} +$$

$$+ \frac{4476}{40320} \frac{h^3 (x-x_4)^3}{3! \cdot 5!} + \frac{16}{30240} \frac{h^4 (x-x_4)^4}{4! \cdot 4!} - \frac{12024}{24192} \frac{h^5 (x-x_4)^5}{5! \cdot 3!} +$$

$$+ \frac{34504}{20160} \frac{h^6 (x-x_4)^6}{6! \cdot 2} - \frac{78024}{17280} \frac{h^7 (x-x_4)^7}{7!} - \frac{5538584}{15120} \frac{h^8 (x-x_4)^8}{8!}.$$

$$(10) \quad \varphi_4(x) = \frac{(x-x_5)^8}{8!} - \frac{61855h}{120960} \frac{(x-x_5)^7}{7!} + \frac{11455}{60480} \frac{h^2 (x-x_5)^6}{2 \cdot 6!} -$$

$$- \frac{1375}{40320} \frac{h^3 (x-x_5)^3}{3! \cdot 5!} + \frac{367}{30240} \frac{h^4 (x-x_5)^4}{4! \cdot 4!} - \frac{1375}{24192} \frac{h^5 (x-x_5)^5}{5! \cdot 3!} +$$

$$+ \frac{1855}{20160} \frac{h^6 (x-x_5)^6}{6! \cdot 2} - \frac{1375}{17280} \frac{h^7 (x-x_5)^7}{7!} - \frac{5703233}{15120} \frac{h^8 (x-x_5)^8}{8!}.$$

$$(11) \quad \varphi_j(x) = \frac{(x-x_{j-1})^8}{8!} - \frac{h}{2} \frac{(x-x_{j-1})^7}{7!} + \frac{h^2 (x-x_{j-1})^6}{12 \cdot 6!} -$$

$$- \frac{h^4 (x-x_{j-1})^4}{6! \cdot 4!} + \frac{h^6 (x-x_{j-1})^2}{6! \cdot 84} - \frac{16978}{45} \frac{h^8 (x-x_{j-1})^8}{8!},$$

pour $j = 7, 8, \dots, n-6$ et la courbe $y = \varphi(x)$ est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{x_0 + x_n}{2}$.

La fonction $\varphi(x)$ de la formule (2), où $p = 3$, qui donne le reste de la formule de quadrature (4), jouit de la propriété exprimée par les égalités (11), qui montrent que le graphique de la fonction $\varphi(x)$ se reproduit sur les intervalles $[x_6, x_7]$, $[x_7, x_8]$, ..., $[x_{n-7}, x_{n-6}]$.

3. On démontre que la fonction $\varphi(x)$, qui coïncide sur les intervalles $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, avec les polynômes $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, donnés par les équations (5), (6), ..., (11), est négative sur l'intervalle $[x_0, x_n]$ et que

$$(12) \quad \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx = \left(-\frac{33953}{10} n + 18039 \right) \frac{h^9}{9!}.$$

Il résulte que le reste R de la formule de quadrature (4), peut s'écrire sous la forme

$$(13) \quad R = \left(-\frac{33953}{10} n + 18039 \right) \frac{h^9}{9!} f^{(9)}(\xi),$$

où $\xi \in (x_0, x_n)$ et il résulte l'évaluation du reste

$$(14) \quad |R| \leq \frac{33953 n - 180390}{10} \frac{h^9}{9!} M_8,$$

où

$$(15) \quad M_8 = \sup_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(8)}(x)|.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Ionescu D. V. - *Nouvelles formules pratiques de quadrature*, C. R. Acad. Sc. Paris 259, (1964), 504-507.
2. Ionescu D. V., Cotiu A. - *Une extension de la formule de quadrature de Lacroix*, Mathematica, 9 (32), 1, (1967), 49-52.
3. Mineur H. - *Techniques de calcul numérique*, Librairie Polytechnique Béranger, Dunod, Paris, (1966), p. 244.

O NOUĂ EXTENSIUNE A FORMULEI DE CUADRATURĂ A LUI LACROIX

Rezumat

În această lucrare se face o nouă extensiune a formulei de quadratură a lui Lacroix, determinând o formulă de forma (1) (nodurile $x_0, x_1, \dots, x_n$ sînt în progresie aritmetică și $h = x_1 - x_0$), pentru $p = 3$, al cărei grad de exactitate este egal cu 7, oricare ar fi n .