

P. 577

În cel de al V-lea an de apariție (1960) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* cuprinde aceleași serii:

- I. matematică, fizică, chimie;
- II. geologie, geografie, biologie;
- III. filozofie, economie politică, psihologie, pedagogie, științe juridice;
- IV. istorie, lingvistică, literatură.

Fiecare serie apare anual în 2 fascicule.

V. (1960-as) évfolyamában a *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* változatlanul alábbi sorozatokat öleli fel:

- I. matematika, fizika, kémia;
- II. geológia, földrajz, biológia;
- III. filozófia, politikai gazdaságtan, lélektan, pedagógia, jogtudomány;
- IV. történet-, nyelv- és irodalomtudomány.

Minden sorozatban évenként két füzet jelenik meg.

На V году издания (1960), *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* выходит теми сериями:

- I. математика, физика, химия;
- II. геология, география, биология;
- III. философия, политэкономия, психология, педагогика, юридические н.
- IV. история, языкознание, литературоведение.

В каждой серии ежегодно выходят два выпуска.

Dans leur V-me année de la publication (1960) les *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* comportent les mêmes séries:

- I-e mathématiques, physique, chimie;
- II-e géologie, géographie, biologie;
- III-e philosophie, économie politique, psychologie, pédagogie, sciences juridiques;
- IV-e histoire, linguistique, littérature.

Chaque série comprend deux fascicules par année.

STUDIA

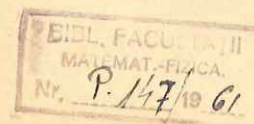
UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES I FASCICULUS 1

1960

MATHEMATICA
PHYSICA

CLUJ



BCU Cluj-Napoca



PMATE 2014 00338

Acad. Prof. C. DAICOVICIU (redactor responsabil), Conf. I. CETERCHI, Conf. V. I. CIMPIANU, Prof. J. DEMETER, Conf. Ö. FELSZEGHY, Conf. M. KALLÓS, Prof. N. LASCU, Prof. T. LÁSZLÓ, Prof. D. MACREA, Prof. GY. MARTON, Prof. T. MORARIU, membru coresp. Acad., Conf. L. NAGY, Prof. I. PÉTERFI, membru coresp. Acad. (redactor responsabil adjuncți), Acad. Prof. E. PETROVICI, Prof. Gh. PIC, Prof. T. POPOVICIU, membru coresp. Acad., Prof. E. A. PORA, membru coresp. Acad., Acad. Prof. R. RIPAN, Prof. Al. ROȘCA, Conf. I. URSU

S U M M A R

T. POPOVICIU, Opera științifică a lui J. Bolyai	9
E. KISS, Rezolvarea în numere naturale a ecuației diofantiene $x^2+y^3=z^4$	15
GH. PIC, Despre o teoremă a lui B. H. Neumann	21
G. CALUGĂREANU, Asupra izotopiei curbelor închise	27
G. CALUGĂREANU, Asupra unui sistem de invarianti de izotopie	35
F. RADO, Generalizarea feșuturilor spațiale pentru structuri algebrice	41
M. FRODA-SCHECHTER, Studiul unei proprietăți a translațiilor de mulțimi	57
I. MARUȘCIAC, Asupra polinoamelor lui Cebîșev k-restrinse pe o mulțime mărginită și închisă din planul complex	73
P. T. MOCANU, O teoremă asupra funcțiilor univale	91
D. V. IONESCU, O teoremă asupra sistemelor de ecuații liniare	97
F. MUNTEANU, Extinderea unei teoreme referitoare la sisteme de ecuații liniare	107
M. FERTIG, Despre comportarea integralelor ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți, care depind de un parametru	121
G. KALIK și P. SZILAGYI, Despre rezolvarea problemei la limită a lui Neumann	131
L. NEMETI, Tensiuni termice în prisme lungi	143
A. NEY, Despre cazul de nehotărîre al criteriului de convergență al lui D'Alembert	153
E. MOLDOVAN, Observații asupra problemei celei mai bune aproximații într-un spațiu abstract	163
F. CONSTANTINESCU, Asupra distanței a două mulțimi într-un spațiu vectorial normat	167
T. MIHAILESCU, Rețele izoterm-conjugate situate pe suprafețele riglate	169
E. GERGELY, Despre ovale pe baza ecuațiilor lor intrinseci	175
L. BAL, Asupra unor suprafețe ce intervin în nomografie	181
D. D. STANCU, Asupra calculului coeficienților unei formule generale de cuadratură	187
F. COȚIU și A. COȚIU, Delimitarea erorii procedurii de ordinul al cincilea a lui Kutta de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale	193
E. TĂTARU, Studiu asupra proprietăților de radiație ale antenelor lentile excitate de pilnii electromagnetice piramidale sau sectoriale	199
F. KELEMEN, Influența temperaturii asupra potențialului de mișcare al metalelor în apă distilată	205
V. MERCEA, Viscosimetru cu capilară inelară	217
V. MERCEA, Rezistențe la scurgere în scurgeri capilare de gaze și măsurarea lor cu viscosimetru cu capilară	239
I. MAXIM, IULIU POP și A. NICULA, O metodă sensibilă pentru determinarea relativă a susceptibilității magnetice, cu compensare în câmpul gravitațional	254
I. MAXIM, A. NICULA și IULIU POP, O metodă magnetometrică pentru măsurarea remanenței magnetice	265
KOCH F., Unele probleme legate de variația cu temperatura a efectului Procopiu	269

Ecuatii funcționale în legătură cu nomografia (F. RADÓ)	277
Mulțimi de funcții interpolatoare și noțiunea de funcție convexă (E. MOLDOVAN) : . .	279
Cursuri speciale: Curs special predat de prof. G. CALUGĂREANU	
Curs special predat de prof. T. POPOVICIU	
Curs special predat de prof. E. MOLDOVAN	285

СОДЕРЖАНИЕ

Т. ПОПОВИЧУ, Научная деятельность И. Бойан	9
Э. КИШШ, Решение в натуральных числах диофантового уравнения $x^2 + y^2 = z^4$	15
Г. ПИК, Об одной теореме Б. Х. Неймана	21
Дж. КЭЛУГЭРЯНУ, Об изотопии замкнутых кривых	27
Дж. КЭЛУГЭРЯНУ, Об одной системе инвариантов изотопии	35
Ф. РАДО, Обобщение пространственных тканей для алгебраических структур	41
М. ФРОДА-ШЕХТЕР, Исследование одного свойства переносов множеств	57
И. МАНУЩАК, О полиномах Чебышева k -условных на замкнутом и ограниченном множестве комплексной плоскости	73
П. Т. МОКАНУ, Одна теорема об однолистных функциях	91
Д. В. ИОНЕСКУ, Одна теорема о системах линейных уравнений	97
Ф. МУНТЯНУ, Расширение одной теоремы, относящейся к системе уравнений с постоянными коэффициентами, зависящими от одного параметра	107
М. ФЕРТИГ, О поведении интегралов дифференциальных линейных уравнений	121
К. КАЛИК, П. СИЛАДИ, О решении проблемы Неймана	131
Л. НЕМЕТИ, Тепловые напряжения в длинных призмах	143
А. НЕИ, О случае сомнения признака сходимости Даламбера	153
Е. МОЛДОВАН, Замечания относительно наилучшего приближения в абстрактных пространствах	163
Ф. КОНСТАНТИНЕСКУ, О расстоянии двух множеств в нормированном векторном пространстве	167
Т. МИХЭИЛЕСКУ, Изотермо-сопряженные сети на линейчатых поверхностях	169
Е. ГЕРГЕЙ, Об овалах на основании их внутренних уравнений	175
Л. БАЛ, О некоторых поверхностях, возникающих в номографии	181
Д. Д. СТАНКУ, О вычислении коэффициентов одной общей формулы квадратуры	187
Ф. КОЦИЮ, А. КОЦИЮ, Оценка ошибки способа пятой степени Кутта числового интегрирования дифференциальных уравнений	193
Э. ТЭТАРУ, Изучение излучительных свойств линзовых антенн, раздраженных электромагнитными пирамидальными или секториальными рупорами	199
Ф. КЕЛЕМЕН, Влияние температуры на потенциал движения металлов в дистиллированной воде	205
В. МЕРЧА, Вискозиметр с кольцевым капилляром	217
В. МЕРЧА, Сопротивление истечения при капиллярных истечениях газов и измерение их при помощи вискозиметра с кольцевыми капиллярами	239
И. МАКСИМ, Ю. ПОП, А. НИКУЛА, Чувствительный метод для относительного определения магнитной восприимчивости с компенсацией в гравитационном поле	259
И. МАКСИМ, А. НИКУЛА, Ю. ПОП, Магнитометрический метод для измерения остаточного магнетизма	265
Ф. КОХ, Некоторые проблемы в связи с температурной вариацией эффекта Прокопиу	269
Хроника	279

SOMMAIRE

T. POPOVICIU, L'oeuvre scientifique de J. Bolyai	9
E. KISS, Résolution en nombres naturels de l'équation diophantienne $x^2 + y^3 = z^4$	15
GH. PIC, Sur un théorème de B. H. Neumann	21
G. CALUGAREANU, Sur l'isotopie des courbes fermées	27
G. CALUGAREANU, Sur un système d'invariants d'isotopie	35
F. RADO, Généralisation des tissus spatiaux, pour certaines structures algébriques	41
M. FRODA-SCHECHTER, Etude d'une propriété des translations d'ensembles	57
I. MARUSCIAC, Sur les polynômes de Tchebychev k-restreints à un ensemble limité et fermé du plan complexe	73
P. T. MOCANU, Un théorème sur les fonctions univalentes	91
D. V. IONESCU, Un théorème sur les systèmes d'équations linéaires	97
F. MUNTEANU, Extension d'un théorème relatif à des systèmes d'équations	107
M. FERTIG, Sur le comportement des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients constants qui dépendent d'un paramètre	121
C. KALIK, P. SZILÁGYI, Sur la solution du problème de la limite de Neumann	131
L. NEMETI, Tensions thermiques dans des prises longs	143
A. NEY, Sur le cas d'indétermination du critérium de convergence de d'Alembert	153
E. MOLDOVAN, Sur la meilleure approximation dans espaces abstraits	163
F. CONSTANTINESCU, Sur la distance de deux ensembles dans un espace vectoriel normé	167
T. MIHAILESCU, Les réseaux isothermes-conjugués situés sur des surfaces réglées	169
E. GERGELY, Problèmes des ovales fondés sur leurs équations itrisèques	175
L. BAL, Sur certaines surfaces intervenant en nomographie	181
D. D. STANCU, Sur le calcul des coefficients d'une formule générale de quadrature	187
F. COȚIU et A. COȚIU, Délimitation de l'erreur du procédé de cinquième ordre de Kutta pour l'intégration numérique des équations différentielles	193
E. TATARU, Etude sur les propriétés de radiation des antennes lentilles excitées par des pavillons électromagnétiques, pyramidaux ou sectoriaux	199
F. KELEMEN, L'influence de la température sur le potentiel de mouvement des métaux dans l'eau distillée	205
V. MERCEA, Le viscosimètre à capillaire annulaire	217
V. MERCEA, Les résistances à l'écoulement dans les écoulements capillaires de gaz et leur mesure avec le viscosimètre à capillaires annulaires	238
I. MAXIM, I. POP, A. NICULA, Sur une méthode sensible pour la détermination relative de la susceptibilité magnétique, avec compensation dans le champ gravitationnel	259
I. MAXIM, A. NICULA, I. POP, Méthode magnétométrique pour la mesure de la rémanence magnétique	265
F. KOCH, Problèmes liés à la variation de l'effet Procopiu en fonction de la température	269
Chronique	297

On démontre que les fonctions

$$\Psi_i(M) = \int_{\Omega_1 - \Omega} v_i(Q) F_i(M, Q) d\Omega_Q$$

représentent un ensemble complet dans H_0 . $\{v_i(Q)\}$ sont ici les monômes $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n}$ quand α_j prend les valeurs de nombres entiers non négatifs.

On démontre ensuite que pour les équations de Laplace les fonctions sphériques seront aussi un ensemble complet de fonctions dans H_0 .

C'est dans la même partie du travail qu'on s'occupe de la méthode de Trefftz appliquée à la solution du problème de Dirichlet quand la fonction donnée sur Γ appartient à l'ensemble $U(\Gamma)$. On démontre que chaque solution de l'ensemble $U(\Omega)$ appartient à l'espace $W_2^1(\Omega)$ et que la solution approchée construite d'après Trefftz converge uniformément à l'intérieur de Ω .

TENSIUNI TERMICE ÎN PRISME LUNGI

de

LADISLAU NÉMETI

1. Punerea problemei. În lucrarea de față se caută calcularea așa numitelor tensiuni termice într-o priză lungă, adică calcularea eforturilor unitare ce se nasc într-un asemenea corp în urma unui câmp de temperatură-neuniformă. Și anume vom considera un câmp staționar al cărui divergență este nulă în interiorul corpului.

Conform problemei noastre, la suprafața laterală a prizmei nu avem forțe exterioare, iar în privința forțelor atacînd pe suprafețele de bază, vom dispune ulterior.

Prizma o presupunem foarte lungă. Câmpul de temperatură să nu depindă de coordonata z - dealungul prizmei. Atunci se poate aștepta că și tensiunile termice vor fi independente de z , cel puțin atunci, dacă forțele de pe baze sînt alese în mod corespunzător.

Vom încerca să rezolvăm problema calculării stării elastice a acestui corp cu ajutorul funcției de tensiuni a lui Airy, binecunoscută în teoria deformărilor plane.

Ecuațiile generale ale stării elastice sînt următoarele:
Ecuațiile de compatibilitate,

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \text{ etc.}, \quad (1)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \text{ etc.} \quad (2)$$

Între componenții tensorului de deformare și ai vectorului de deplasare există relațiile:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \text{ etc.}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \text{ etc.} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ecuațiile de echilibru în lipsa unor forțe de masă :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \text{ etc.} \quad (4)$$

În fine legea lui Hooke, completată cu alungirile cauzate prin temperatură :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z) + \beta\vartheta \text{ etc.,} \quad (5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}. 1)$$

Temperatura, calculată de o origine arbitrară, satisface ecuația :

$$\Delta\vartheta = 0. \quad (7)$$

2. Integrarea ecuațiilor. În condițiile problemei noastre, ecuațiile (1) — (7) se simplifică prin următoarele ipoteze :

a) Toate cantitățile sînt independente de z .

b) $w = 0$; $\varepsilon_z = 0$.

c) $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$; $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$.

Această din urmă ipoteză implică lipsa unui moment de torsiune la suprafețele de bază ale prizmei.

Ecuațiile (1) — (7) se simplifică după cum urmează :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G}(\sigma_x - \mu\sigma_y) + (1 + \mu)\beta\vartheta \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G}(\sigma_y - \mu\sigma_x) + (1 + \mu)\beta\vartheta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (11)$$

$$\sigma_z = \mu\sigma - E\beta\vartheta, \quad (12)$$

$$s = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0. \quad (13)$$

unde s-a notat

și avem

1) $2G(1 + \mu) = E$.

Dacă punem

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \tau = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (14)$$

atunci ecuațiile (9) sînt satisfăcute automat. Dacă se cunoaște ϑ din (13) atunci se calculează și starea de deformare din (10), (11) și σ_z din (12).

În fine pentru satisfacerea ecuației (8), F trebuie să verifice ecuația biarmonică

$$\Delta\Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (15)$$

Prin urmare pentru calculul tensiunilor termice, funcția lui Airy poate fi folosită, fără vre-o modificare esențială.

3. Calculul lui F . Se știe că F este determinat univoc, dacă este dat pe conturul domeniului în cauză : F și $\frac{\partial F}{\partial n}$.

Dacă conturul este neîncărcat — este cazul nostru — atunci avem pe el [1] :

$$\left. \begin{aligned} F &= A + Bx + Cy, \quad \frac{\partial F}{\partial n} = B \frac{\partial x}{\partial n} + C \frac{\partial y}{\partial n} \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= B, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = C \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Dacă secțiunea prizmei este simplu conexă, atunci cele trei constante de integrare A , B , C sînt neesențiale, întrucît ele nu au vre-o influență asupra tensiunilor și starea de tensiuni și de deformări este determinată univoc [1]. Dacă însă secțiunea prizmei reprezintă un domeniu multiplu conex (prizmă „goală”), atunci avem pentru fiecare contur 3 constante de integrare, din care numai 1×3 sînt neesențiale, restul neputînd fi ales în mod arbitrar. Condiția care ne va livra relațiile pentru determinarea acestor constante reiese din criteriul că deplasarea u și v să fie funcții monovalente la înconjurarea unei „găuri” a secțiunii.

Introducem următoarele notații : fie t funcția conjugată a funcției armonice

$$s = \sigma_x + \sigma_y = \Delta F$$

adică $s + it$ o funcție monogenă a variabilei complexe $\zeta = x + iy$. Fie mai departe

$S + iT$ o funcție primitivă a lui $s + it$.

Avem

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = s, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = - \frac{\partial T}{\partial x} = -t. \quad (17)$$

Punem analog pentru temperatură

$$\vartheta + i\psi, \quad \theta + i\Psi = \int (\vartheta + i\psi)(dx + idy).$$

Pentru calcularea lui u și v avem la dispoziție următoarele relații:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon_x, \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{G} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

avînd (10):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2G} \left[(1 - \mu)s - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] + \beta(1 + \mu)\vartheta \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2G} \left[(1 - \mu)s - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right] + \beta(1 + \mu)\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Integrarea lor (19), luînd în considerare și (18), ne dă:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2G} \left[(1 - \mu)S - \frac{\partial F}{\partial x} \right] + \beta(1 + \mu)\vartheta + cy + c_1 \\ v &= \frac{1}{2G} \left[(1 - \mu)T - \frac{\partial F}{\partial y} \right] + \beta(1 + \mu)\Psi - cx + c_2. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Noi solicităm deci ca u și v să fie funcții monovalente ale lui x și y , în speță, că la înconjurul unui contur unei „găuri” a secțiunii, ele să nu-și schimbe valoarea.

Notînd cu $[f]_Q$ schimbarea valorii unei funcții la înconjurul unui contur, desideratul nostru este deci

$$[u]_Q = [v]_Q = 0. \quad (21)$$

În formulele (20), găsim pentru derivatele lui F

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_Q = \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_Q = 0,$$

ca o consecință imediată a relațiilor (16).

Vom avea deci ca criteriu de monovalență:

$$[S + iT]_Q = -\frac{E}{1 - \mu} \beta [\vartheta + i\Psi]_Q. \quad (22)$$

Această relație — pentru fiecare contur interior al secțiunii cîte una — determină în mod univoc constantele de integrare „esențiale” ale problemei.

Înainte de a trece la un exemplu prin care se va desluși metoda de aplicare a relației (22) mai facem o remarcă: se observă că temperatura nu influențează asupra lui F decît prin criteriul de monovalență pentru deplasări. Dacă secțiunea prizmei este simplu conexă — prizma „plină” — atunci F este determinat univoc din $\Delta\Delta F = 0$ și din condițiile la limită:

cîmpul termic nu exercită nici o influență. În acest caz deci nu avem tensiuni termice în planul secțiunii:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (\sigma_z \neq 0). \quad (23)$$

4. Tensiunile termice într-un tub. Considerăm un exemplu de aplicare pentru metoda dezvoltată în punctul precedent. Prizma noastră să fie un tub, adică un cilindru al cărui secțiune este delimitată prin două cercuri concentrice cu razele r_e și $r_i < r_e$.

Folosim coordonatele polare r, φ și notăm constanta $\frac{r_a}{r_i} = \xi < 1$

și variabila $\rho = \frac{r}{r_i}$.

Soluția generală a ecuației (13) este:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [(\gamma_n \rho^n - \alpha_n \rho^{-n}) \cos n\varphi + (\delta_n \rho^n - \beta_n \rho^{-n}) \sin n\varphi]. \quad (24)$$

Avem atunci

$$\begin{aligned} \vartheta + i\psi &= K_0 + \vartheta_1 \ln \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\gamma_n - i\delta_n) \left(\frac{\zeta}{r_i} \right)^n - (\alpha_n + i\beta_n) \left(\frac{\zeta}{r_i} \right)^{-n} \right] \\ \vartheta + i\Psi &= K_1 + K_2 \zeta + \vartheta_1 \zeta \ln \zeta + \frac{\gamma_1 - i\delta_1}{2} r_i \left(\frac{\zeta}{r_i} \right)^2 - (\alpha_1 + i\beta_1) r_i \ln \zeta + \\ &+ r_i \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\gamma_n - i\delta_n}{n+1} \left(\frac{\zeta}{r_i} \right)^{n+1} + \frac{\alpha_n + i\beta_n}{n-1} \left(\frac{\zeta}{r_i} \right)^{-(n-1)} \right], \\ [\vartheta + i\Psi]_Q &= 2\pi i [\vartheta_1 \zeta - (\alpha_1 + i\beta_1) r_i]. \end{aligned} \quad (25)$$

Se vede de aici imediat că tensiunile termice $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ nu se nasc decît în urma coeficienților $\vartheta_1, \alpha_1, \beta_1$.

Pentru funcția lui Airy avem condițiile la limită:

$$\left. \begin{aligned} \text{la } r = r_i: \quad F &= 0, \quad \frac{\partial F}{\partial r} = 0; \\ \text{la } r = r_a: \quad F &= A + B \cos \varphi + C \sin \varphi \\ r_a \frac{\partial F}{\partial r} &= B \cos \varphi + C \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Pentru F vom pune:

$$\begin{aligned} F &= a_0 + a_1 \rho^2 + a_2 \ln \rho + a_3 \rho^2 \ln \rho + (b_0 \rho + b_1 \rho^3 + b_2 \rho^{-1} + b_3 \rho \ln \rho) \cos \varphi + \\ &+ (c_0 \rho + c_1 \rho^3 + c_2 \rho^{-1} + c_3 \rho \ln \rho) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Condițiile la limită (26) dau atunci pentru coeficienți următoarele ecuații :

$$\left. \begin{aligned} a_0 + a_1 &= 0 \\ b_0 + b_1 + b_2 &= 0 \\ c_0 + c_1 + c_2 &= 0 \\ &\dots \\ 2a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ b_0 + 3b_1 - b_2 + b_3 &= 0 \\ c_0 + 3c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \\ &\dots \\ a_0 + a_1 \xi^2 + a_2 \ln \xi + a_3 \xi^2 \ln \xi &= A \\ b_0 \xi + b_1 \xi^3 + b_2 \xi^{-1} + b_3 \xi \ln \xi &= B \\ c_0 \xi + c_1 \xi^3 + c_2 \xi^{-1} + c_3 \xi \ln \xi &= C \\ &\dots \\ 2a_1 \xi + a_2 \xi^{-1} + a_3 \xi (2 \ln \xi + 1) &= 0 \\ b_0 \xi + 3b_1 \xi^3 - b_2 \xi^{-1} + b_3 \xi (\ln \xi + 1) &= B \\ c_0 \xi + 3c_1 \xi^3 - c_2 \xi^{-1} + c_3 \xi (\ln \xi + 1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Mai lipsesc trei ecuații pentru calcularea tuturor necunoscutelor și le găsim acestea prin criteriul de monovalență.

Avem întâi :

$$\begin{aligned} s = \Delta F &= \frac{1}{r_i^2} [4a_1 + 4a_3(\ln \rho + 1) + (8b_1 \rho + 2b_3 \rho^{-1}) \cos \varphi + (8c_1 \rho + 2c_3 \rho^{-1}) \sin \varphi], \\ s + it &= \frac{1}{r_i^2} \left[C_1 + 4a_3 \ln \xi + 8(b_1 - ic_1) \frac{\xi}{r_i} + 2(b_3 + ic_3) \left(\frac{\xi}{r_i} \right)^{-2} \right], \\ S + iT &= \frac{1}{r_i^2} \left[C_2 + C_3 \xi + 4a_3 \xi \ln \xi + 4(b_1 - ic_1) r_i \left(\frac{\xi}{r_i} \right)^2 + 2(b_3 + ic_3) r_i \ln \xi \right], \\ [S + iT]_Q &= \frac{2\pi i}{r_i^2} [4a_3 \xi + 2(b_3 + ic_3) r_i]. \end{aligned}$$

Compararea mărimilor (25) și (28) prin relația (22) ne dă :

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= -\frac{E}{1-\mu} \beta \vartheta_1 \frac{r_i^2}{4} \\ b_3 &= \frac{E}{1-\mu} \beta \alpha_1 \frac{r_i^2}{2} \\ c_3 &= \frac{E}{1-\mu} \beta \beta_1 \frac{r_i^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

pentru celelalte constante găsim din (27) (nu ne interesează a_0, b_0, c_0 , A , B și C) :

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -a_3 \frac{\xi^2(2 \ln \xi + 1) - 1}{2(\xi^2 - 1)} \\ a_2 &= a_3 \frac{2\xi^2 \ln \xi}{\xi^2 - 1} \\ b_1 &= -\frac{1}{2} b_3 \frac{1}{\xi^2 + 1} \\ b_2 &= \frac{1}{2} b_3 \frac{\xi^2}{\xi^2 + 1} \\ c_1 &= -\frac{1}{2} c_3 \frac{1}{\xi^2 + 1} \\ c_2 &= \frac{1}{2} c_3 \frac{\xi^2}{\xi^2 + 1} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Tensiunile le găsim din funcția lui Airy :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\sigma_z = \Delta F - E\beta\vartheta. \quad (31a)$$

Găsim, ca rezultat final, formulele :

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\mu} \frac{\beta \vartheta_1}{2} \left[\frac{\xi^2 \ln \xi}{\xi^2 - 1} (1 + \rho^{-2}) - \ln \rho - 1 \right] + \\ &+ \frac{E}{1-\mu} \frac{\beta}{2} (\alpha_1 \cos \varphi + \beta_1 \sin \varphi) \left(-\frac{3}{\xi^2 + 1} \rho + \rho^{-1} + \frac{\xi^2}{\xi^2 + 1} \rho^{-3} \right), \\ \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu} \frac{\beta \vartheta_1}{2} \left[\frac{\xi^2 \ln \xi}{\xi^2 - 1} (1 - \rho^{-2}) - \ln \rho \right] + \\ &+ \frac{E}{1-\mu} \frac{\beta}{2} (\alpha_1 \cos \varphi + \beta_1 \sin \varphi) \left(-\frac{1}{\xi^2 + 1} \rho + \rho^{-1} - \frac{\xi^2}{\xi^2 + 1} \rho^{-3} \right), \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{E}{1-\mu} \frac{\beta}{2} (\alpha_1 \cos \varphi + \beta_1 \sin \varphi) \left(-\frac{1}{\xi^2 + 1} \rho + \rho^{-1} - \frac{\xi^2}{\xi^2 + 1} \rho^{-3} \right), \\ \sigma_z &= -E\beta\vartheta_0 + \frac{\mu E}{1-\mu} \beta \vartheta_1 \left(\frac{\xi^2 \ln \xi}{\xi^2 - 1} - \frac{1}{2} \right) - \frac{E}{1-\mu} \beta \vartheta_1 \ln \rho - \\ &- \frac{E}{1-\mu} \beta \left[\left((1-\mu) \gamma_1 + \frac{2\mu}{\xi^2 + 1} \alpha_1 \right) \rho - \alpha_1 \rho^{-1} \right] \cos \varphi - \\ &- \frac{E}{1-\mu} \beta \left[\left((1-\mu) \delta_1 + \frac{2\mu}{\xi^2 + 1} \beta_1 \right) \rho - \beta_1 \rho^{-1} \right] \sin \varphi - \\ &- E\beta \sum_{n=2}^{\infty} [(\gamma_n \rho^n - \alpha_n \rho^{-n}) \cos n\varphi + (\delta_n \rho^n - \beta_n \rho^{-n}) \sin n\varphi]. \end{aligned} \quad (32)$$

5. **Aplicație la țevile fierbătoare ale cazanelor.** În aceste țevi cîmpul termic se determină prin următoarele condiții: țeava primește căldură din afară, fluxul termic îl putem pune:

$$q = q_0 + q_1 \cos \varphi + q_2 \cos 2\varphi + \dots \quad (33)$$

Țeava este umplută cu apă în fierbere, de o temperatură ϑ_f , coeficientul de transmitere al căldurii între apă și țeavă să fie α , materialul țevii posedă coeficientul de conductibilitate termică λ . Atunci coeficienții din (24) vor fi:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_0 &= \vartheta_f + \frac{q_0 \xi}{\alpha} \\ \vartheta_1 &= \frac{q_0 r_a}{\lambda} \\ \alpha_n &= \frac{q_n r_a}{n\lambda} \frac{\xi^n}{k_n \xi^{2n} + 1}; \quad \beta_n = 0 \\ \gamma_n &= \frac{q_n r_a}{n\lambda} \frac{\xi^n}{k_n \xi^{2n} + 1}; \quad \delta_n = 0, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

unde

$$k_n = \frac{r_i + n \frac{\lambda}{\alpha}}{r_i - n \frac{\lambda}{\alpha}}$$

Ca esențială pentru evitarea distrugerii țevii, vom considera diferența între tensiunea principală, maximă și minimă, conform teoriei de rupere a lui de Saint-Venant. O analiză amănunțită a stării de eforturi unitare arată că maximum acestei diferențe îl găsim la $r = r_i$ și $\varphi = 0$.

Aceasta va fi:

$$\begin{aligned} \sigma &= (\sigma_\varphi - \sigma_r)_{r=r_i} = (\sigma_\varphi)_{r=r_i} = \\ &= \frac{E}{1-\mu} \frac{\beta r_a}{\lambda} \left[q_0 \left(\frac{\xi^2 \ln \xi}{\xi^2 - 1} - \frac{1}{2} \right) + q_1 \frac{\xi(\xi^2 - 1)}{(\xi^2 + 1)(k\xi^2 + 1)} \right], \end{aligned} \quad (35)$$

cu

$$k = \frac{r_i + \frac{\lambda}{\alpha}}{r_i - \frac{\lambda}{\alpha}}$$

Formula aceasta poate fi folosită pentru dimensionarea țevilor de fierbere la cazanele de aburi.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Frank—Mises, *Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*. Braunschweig, 1935.

ТЕПЛОВЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ДЛИННЫХ ПРИЗМАХ

(Краткое содержание)

Исследуются тепловые напряжения в длинных призмах, если термическое поле стационарно во времени и не изменяется вдоль образующих.

Отмечается, что в данном случае имеется состояние плоской деформации, причем функция напряжений Эри используется и здесь, так как она и в данном случае является бигармонической функцией.

Разница по отношению к случаю постоянной температуры проявляется в многочисленных сечениях призмы при установлении условия, чтобы перемещения были монотонными функциями при обращении вокруг одного „отверстия” сечения. В то же время данное условие даёт возможность вычисления напряжений.

В качестве примера приводится применение предложенного метода при вычислении напряжений в круглой трубе, и полученные результаты примеются при размерении кипятильных труб паровых котлов.

TENSIONS THERMIQUES DANS DES PRISMES LONGS

(Résumé)

On étudie les tensions thermiques dans des prismes longs, au cas où le champ thermique est stationnaire dans le temps et ne varie pas le long des générateurs.

On montre que dans ce cas nous avons affaire à un état de déformation plane et que la fonction de tensions d'Airy trouve ici son application, étant dans ce cas aussi une fonction biharmonique.

La différence par rapport au cas de la température constante se manifeste dans les sections multiples connexes du prisme par la prescription de cette condition, que les déplacements soient des fonctions monogènes sur le pourtour d'un „trou” de la section. Cette condition rend toujours possible le calcul des tensions.

A titre d'exemple on expose l'application de la méthode proposée au calcul des tensions dans un tube circulaire et l'on applique les résultats trouvés à la détermination des dimensions des tubes d'ébullition des chaudières à vapeur.