

COMUNICĂRILE

ACADEMIEI

REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Nr. 9

TOMUL XIII

1963

E X T R A S



EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMUNICĂRILE

ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Tomul XIII

1963

Nr. 9

COMITETUL DE REDACȚIE: Academician I. S. Gheorghiu; academician Gh. Macovei;
academician I. Murgulescu; academician Șt. S. Nicolau; academician M. Nicolescu;
academician Gh. Ionescu-Șișești; academician N. Sălăgeanu;
academician Șt.-M. Milcu — redactor responsabil

MATEMATICĂ

ASUPRA UNOR SISTEME DE INEGALITĂȚI LINIARE CU SOLUȚII NENEGATIVE APLICAȚII LA PROGRAMAREA LINIARĂ

DE

L. NEGRESCU

Comunicare prezentată de academician T. POPOVICIU în ședința din 7 mai 1963

În nota de față vom da condiții suficiente pentru ca un sistem de inegalități liniare să aibă toate soluțiile nenegative.

Cu probleme legate de existența soluțiilor pozitive ale sistemelor de inegalități sau ecuații liniare s-au ocupat mai mulți matematicieni printre care putem aminti pe E. Stiemke [1], L. L. Dines [2], C. F. Gummer [3], V. S. Mihelson [4], S. N. Cernikov [5].

În lucrarea [6] s-a dat o condiție suficientă pentru ca un sistem de ecuații liniare să aibă o soluție pozitivă.

1. Fie sistemul de inegalități liniare

$$Ax \geq 0, \quad (1)$$

unde $A = (a_{ij})$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) și $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Dacă din matricea A suprimăm linia și coloana a i -a, atunci notăm noua matrice cu A_i , iar dacă din x scoatem elementul x_i , vom nota noua matrice coloană de ordinul $n - 1$, cu x^i .

Relativ la sistemul (1) se poate demonstra

TEOREMA 1. Dacă

a) sistemul $Ax > 0$ are cel puțin o soluție $\bar{x} \geq 0$,

b) $a_{ii} > 0$, $a_{ij} \leq 0$ pentru $i, j = 1, 2, \dots, n$ și $i \neq j$, atunci orice soluție x_0 a sistemului (1) este nenegativă ($x_0 \geq 0$).

Demonstrația teoremei se poate face prin inducție completă. Din teoremă rezultă imediat că matricea A care satisface condițiile a) și b) are rangul chiar n .

Aplicând lema lui Farkas-Minkovski [7], rezultă imediat că sistemul

$$A'y = l, \quad (2)$$

unde A' este transpusa lui A , iar $l = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_2 \end{pmatrix}$, are o soluție unică $y_0 \geq 0$ oricare ar fi $l \geq 0$.

În particular, dacă în condiția a) punem

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

atunci condiția a) devine

$$a') \sum_{i=1}^n a_{ij} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

O matrice care satisface condiția a') și b) este de tip Minkovski-Leontiev [8].

TEOREMA 2. Dacă

- 1) sistemul $Ax > 0$ admite cel puțin o soluție $\bar{x} > 0$,
- 2) fiecare din sistemele $A_{ii}x^i < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, posedă cel puțin o soluție $\tilde{x}^i \leq 0$,
- 3) $a_{ii} < 0$, $a_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ și $i \neq j$, atunci orice soluție x_0 a sistemului (1) este pozitivă

$$x_0 > 0.$$

2. Să considerăm acum sistemul neomogen

$$Ax \geq b. \quad (3)$$

Pe baza teoremelor 1 și 2 se poate demonstra

TEOREMA 3. Dacă matricea A a sistemului (3) satisface ipotezele teoremei 1 sau 2, atunci orice soluție $\tilde{x}$ a sistemului (3) satisface inegalitatea $\tilde{x} \geq \bar{x}$, unde $\bar{x}$ este soluția sistemului $Ax = b$.

3. Considerăm următoarea problemă de programare liniară: să se minimizeze forma liniară

$$f = (c, x), \quad x = (c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (4)$$

pe mulțimea soluțiilor nenegative ale sistemului

$$Ux \geq b, \quad (5)$$

unde U este o matrice $m \times n$.

Să presupunem că

$$U = \begin{pmatrix} A & C \\ & B \end{pmatrix},$$

unde A satisface ipotezele teoremei 1 sau 2 și C are toate elementele nenegative.

Atunci sistemul (5) se poate pune sub forma

$$(I) \quad Ax' + Cx'' \geq b',$$

$$(II) \quad Bx \geq b''.$$

Presupunem că $b' \geq 0$. Atunci vom transforma sistemul (I) într-un sistem de egalități. Din acest sistem exprimăm pe x' în funcție de restul necunoscute. Din teoremele 1 și 2 rezultă că $x' \geq 0$ dacă celelalte necunoscute sînt nenegative. Înlocuind pe x' în (II) și în forma (4) obținem o nouă problemă de programare liniară care are același număr de necunoscute însă numai $m - r$ inegalități, r fiind ordinul matricei A .

Academia R.P.R., Filiala Cluj
Institutul de calcul

О НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ НЕРАВЕНСТВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ ПРИМЕНЕНИЕ К ЛИНЕЙНОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

РЕЗЮМЕ

В работе даются достаточные условия того, чтобы система неравенств имела все решения неотрицательными. В последней части делается применение к линейному программированию, указывается частная задача линейного программирования, в которой число неравенств можно уменьшить, не изменяя число неизвестных.

SUR QUELQUES SYSTÈMES D'INÉGALITÉS À SOLUTIONS NON NÉGATIVES

APPLICATIONS À LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

RÉSUMÉ

L'auteur indique les conditions suffisantes pour que toutes les solutions d'un système d'inégalités soient non négatives. Dans la dernière partie, il en fait une application à la programmation linéaire, en indi-

quant un problème particulier de programmation linéaire, où le nombre des inégalités peut être diminué, sans entraîner la modification du nombre des inconnues.

BIBLIOGRAFIE

1. E. STIEMKE, *Über positive Lösungen homogener linearer Gleichungen*, Math. Ann., 1915, 76, 340—341.
2. L. L. DINES, *Convex extensions and linear inequalities*, Bull. Amer. Math. Soc., 1936, 42, 353—365.
3. C. F. GUMMER, *Sets of linear equations in positive unknowns*, Amer. Math. Monthly, 1926, 33, 488.
4. В. С. МИХЕЛЬСОН, *О знаках решения системы линейных уравнений*, Успехи матем. наук, 1954, IX, 3 (61), 163—170.
5. С. Н. ЧЕРНИКОВ, *Положительные и отрицательные решения системы линейных неравенств*, Матем. сборник, 1956, 38 (80), 4, 479—508.
6. L. NEGRESCU, AL. NEMETH, T. RUS, *Despre soluțiile pozitive ale unui sistem de ecuații liniare*, St. cerc. mat.-Cluj, 1962, XIII, 1.
7. К. ДЖ. ЭРРОУ, Л. ГУРВИЦ, Х. УДЗАВА, *Исследования по линейному и нелинейному программированию*, ИИЛ, Москва, 1962, 16.
8. S. KARLIN, *Mathematical methods and theory in games, programming and economics*, Pergamon Press, London-Paris, 1959, I, 52.