

ȚESUTURI TERNARE REGULATE

de
F. RADÓ

1. Ne propunem să determinăm o clasă de țesuturi, formate din patru familii de suprafețe care verifică generalizarea pentru spațiu a condiției de închidere Reidemeister; apoi să punem în evidență câteva proprietăți ale lor și să le clasificăm din punct de vedere topologic. În cursul determinării acestei clase de țesuturi va trebui să rezolvăm ecuația funcțională care exprimă că un izotop al sumei este de forma $f(x + y) + f_1(x)$. Pentru aplicațiile avute în vedere, vom căuta soluții continuu diferentiabile, iar în ultima parte a lucrării vom extinde soluția aflată pentru funcții absolut continue.

În lucrarea [7] am introdus noțiunea de țesut spațial abstract (sau țesut ternar) prin generalizarea proprietăților geometrice ale unui țesut obișnuit, format din 4 familii de suprafețe [3] și am arătat că aceste țesuturi sînt echivalente cu clasele de izotopie ale cvasigrupurilor ternare.

Reamintim, că un *cvasi-grup ternar* (Q, F) (sau o N -algebră) este o mulțime Q , pe care s-a definit operația ternară

$$t = F(x, y, z) \quad (1)$$

(notația prescurtată: $t = xyz$), inversabilă în raport cu x , y și z , adică pentru $a, b, c, d \in Q$ ecuațiile

$$F(x, b, c) = d, F(a, y, c) = d, F(a, b, z) = d \quad (2)$$

au câte o soluție unică în Q . Dacă există elementul neutru $e \in Q$, astfel ca

$$F(x, e, e) = F(e, x, e) = F(e, e, x) = x, \quad (3)$$

(Q, F) se numește un *loop ternar*.

Cvasigrupurile ternare (Q, F) și (R, G) se zic *izotope*, dacă există transformările biunivoce f, g, h, k ale mulțimii Q pe R , astfel ca

$$G[f(x), g(y), h(z)] = k[F(x, y, z)], \quad x, y, z \in Q. \quad (4)$$

(R, G) este un *izotop* al lui (Q, F) , iar sistemul de transformări f, g, h, k o *izotopie*. Dacă mulțimile G și F coincid și k este transformarea identică, (Q, G) este un *izotop principal* al lui (Q, F) .

Mulțimea cvasigrupurilor ternare izotope cu cvasigrupul dat (Q, F) formează, prin definiție, un *țesut ternar*. Oricare cvasigrup din această mulțime este un *reprezentant* al țesutului ternar. Dacă un reprezentant este un loop ternar, el se numește un *L-reprezentant*. Un țesut ternar are totdeauna L-reprezentanți [7].

Studiul țesuturilor revine la studiul proprietăților cvasigrupurilor, invariante la izotopii. Pentru scopurile lucrării de față, ajunge această caracterizare algebrică a țesuturilor și nu vom insista la caracterizarea geometrică, amintită la început și care se găsește în lucrarea [7].

Dacă Q este un interval al axei reale și F o funcție continuă, (Q, F) poartă numele de *cvasigrup ternar real continuu*, iar dacă, afară de aceasta, F admite derivatele parțiale de ordinul m continue, (Q, F) este un *cvasigrup ternar diferențiabil de ordinul m* . Țesuturile corespunzătoare reprezintă cazurile clasice și se numesc *țesuturi ternare reale continue* (sau *țesuturi de suprafețe*) respectiv *țesuturi ternare diferențiabile de ordinul m* . (Studiul lor clasic se găsește în [3].)

Alături de cvasigrupurile ternare continue vom considera și *cvasigrupurile locale*, care se definesc în felul următor: fie V_1, V_2, V_3 trei vecinătăți ale axei reale; se cere ca funcția continuă (1) să fie definită pentru $x \in V_1, y \in V_2, z \in V_3$ și ca să existe vecinătățile $V'_1 \subset V_1, V'_2 \subset V_2, V'_3 \subset V_3, V'_4 \ni F(x_0, y_0, z_0)$ ($x_0 \in V_1, y_0 \in V_2, z_0 \in V_3$), astfel ca pentru $a \in V'_1, b \in V'_2, c \in V'_3, d \in V'_4$, ecuațiile (2) să aibă câte o soluție unică în V_1, V_2 respectiv V_3 . Un cvasigrup local se va nota tot cu (Q, F) . În conformitate cu aceasta, avem un *loop ternar local*, dacă în particular $V_1 = V_2 = V_3 = V, x_0 = y_0 = z_0 = e$ și condiția (3) este satisfăcută pentru $x \in V$. Dacă f, g, h, k din (4) sînt transformări topologice și (4) este verificat pentru orice $x \in V_1, y \in V_2, z \in V_3$, avem o *izotopie locală*. Un *țesut local* se definește ca mulțimea cvasigrupurilor ternare locale, local izotope cu un cvasigrup ternar local.

Definițiile date pîră aici, sînt generalizări directe din teoria cvasigrupurilor binare (obișnuite) [2], [5], [6], în care în locul operației (1) avem o operație binară. Un cvasigrup binar se zice *regulat*, dacă este izotop cu un grup, un țesut binar este *regulat*, dacă printre reprezentanții lui se află un grup. Condiția de închidere a lui Reidemeister

$$\left. \begin{aligned} x_1 y_1 &= x_2 y_3 \\ x_2 y_1 &= x_4 y_3 \\ x_1 y_2 &= x_3 y_4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_2 y_2 = x_4 y_4 \quad (R)$$

este necesară și suficientă pentru ca cvasigrupul binar (Q, F) cu operația $F(x, y) = xy$, să fie regulat. Condiția (R) este invariantă la izotopii.

În conformitate cu o teoremă celebră a lui L. E. J. BROUWER, orice grup continuu, definit pe un interval real, este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale [4]. Rezultă, că orice cvasigrup real continuu regulat are o operație de forma

$$xy = h^{-1}[f(x) + g(y)], \quad (5)$$

unde f, g, h transformă biunivoc și continuu (adică topologic) intervalul Q pe axa reală. Teorema lui B r o u w e r poate fi extinsă pentru grupuri locale, definite pe un interval real (a se vedea ecuația funcțională a asociativității în [1]); deci orice cvasigrup local regulat are de asemenea o operație de forma (5). De aici se deduce ușor că țesuturile obișnuite regulate coincid cu imaginile topologice ale țesutului format din trei fascicule de drepte paralele. Așadar pe această cale se obține în mod simplu rezultatul clasic al lui Reidemeister.

Fie (Q, F) un cvasigrup ternar și z_0 un element fix din Q . Operația binară $(x, y) \rightarrow F(x, y, z_0)$ definește un cvasigrup binar pe Q , numit o *secțiune* z a cvasigrupului ternar (Q, F) . Analog putem defini secțiunile x și secțiunile y .

În teoria clasică, un țesut de suprafață se zice regulat, dacă este imaginea topologică a patru fascicule de plane; această definiție revine la faptul că operația unui reprezentant oarecare este de forma

$$xyz = k^{-1}[f(x) + g(y) + h(z)], \quad (6)$$

unde f, g, h, k sînt funcții strict monotone și continue. Condiția necesară și suficientă pentru ca un țesut de suprafață să fie regulat este

$$x_2y_1z_1 = x_1y_2z_1 = x_1y_1z_2 \rightarrow x_1y_2z_2 = x_2y_1z_2 = x_2y_2z_1 \quad (O)$$

(condiția octaedrelor). Aceste țesuturi se mai numesc și *țesuturi octaedrale*. Noi vom folosi această terminologie, termenul de regularitate fiind păstrat pentru o noțiune mai largă. În lucrarea [7] am studiat regularități de diferite tipuri (regularitate 1, 2, 3 și regularitate tare), iar în conformitate cu lucrarea [8] un cvasigrup ternar se zice *regulat*, dacă satisface următoarea condiție de închidere, numită condiția lui Reidemeister generalizată:

$$\left. \begin{aligned} x_1y_1z_1 &= x_3y_3z_3 \\ x_2y_1z_1 &= x_4y_3z_3 \\ x_1y_2z_1 &= x_3y_4z_3 \\ x_1y_1z_2 &= x_3y_3z_4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_2y_2z_2 = x_4y_4z_4. \quad (RG)$$

Se vede că această condiție este invariantă la izotopii, deci putem defini țesutul ternar ca *regulat*, dacă un reprezentant al său este regulat. S-a demonstrat în [8] că fiecare din următoarele condiții este necesară și suficientă pentru regularitatea unui țesut ternar:

a) Toate secțiunile x ale unui reprezentant sînt izotopi principali ai unui și aceluiași grup, la fel secțiunile y și z (cele trei grupuri putînd fi diferite).

b) Un L -reprezentant verifică implicația

$$abc = e \Rightarrow xyz = (xbc)(ayc)(abz), \quad a, b, x, y, z \in Q.$$

(Cînd utilizăm condiția a) ca suficientă ajunge să o cerem pentru un singur reprezentant, așa cum s-a enunțat, iar cînd ea apare ca o condiție necesară, putem s-o aplicăm pentru fiecare reprezentant. O observație analogă e valabilă pentru L -reprezentanții din condiția b).)

În lucrarea [10] s-a mai dat o a treia condiție necesară și suficientă :

c) Operația ternară a unui L-representant se poate scrie în trei moduri cu ajutorul unor operații de grup $x \circ y$, $x * y$, $x \nabla y$ (x° , x^* , x^∇ notează elementele inverse ale lui x în cele 3 grupuri, definite pe aceeași mulțime ca și L-representantul) :

$$xyz = (x \nabla y) \circ y^\circ \circ (y * z) = (x \nabla y) * x^* * (x \circ z) = (x \circ z) \nabla z^\nabla \nabla (y * z). \quad (7)$$

În lucrarea [10] s-a studiat mai amănunțit cazul particular al ȣesuturilor regulate continuu diferențiable de ordinul întâi. În acest caz L-reprezentanții sînt de forma

$$xyz = \varphi^{-1} [\varphi(x) - \varphi(y) + \varphi(z)], \quad (8)$$

unde φ este o funcție strict monotonă, care admite derivată continuă. Un loop ternar cu operația (8) este un *grup ternar*. În aceeași lucrare s-a arătat că ȣesuturile locale regulate, continuu diferențiable de ordinul întâi, au operația L-reprezentanților de forma

$$xyz = \varphi^{-1} \left[\frac{\varphi(y) + k \frac{\varphi(x) - 1}{\varphi(x) + k}}{\frac{1}{\varphi(z)} - \frac{\varphi(x) - 1}{\varphi(x) - k}} \right], \quad (9)$$

unde φ are semnificația de mai sus, iar k este o constantă diferită de -1 . Invers, pentru orice astfel de φ și k , formulele (8) și (9) definesc cvasigrupuri ternare (locale) regulate. Acest rezultat s-a obținut prin rezolvarea sistemului de ecuații funcționale (7), funcțiile necunoscute fiind $\circ$, $*$ și ∇ .

În lucrarea de față vom arăta că ȣesuturile locale, continuu diferențiable de ordinul întâi au aceeași structură (8) și (9) în condiții mai largi decît regularitatea. Și anume vom admite că secțiunile x și y ale unui L-representant sînt izotopi principali cu cîte un grup. Va rezulta ca o consecință că secțiunile z sînt și ele izotopi principali cu un grup.

Pentru a ajunge la acest rezultat vom rezolva pe parcurs ecuația funcțională

$$f(x + y) + f_1(x) = \Phi [p(x) + q(y)], \quad (10)$$

provenită din primii termeni ai relației (7), unde $\circ$ și $*$ sînt operații de grup, iar ∇ o operație de loop. Cele cinci funcții din ecuația (10) sînt funcții necunoscute, presupuse continuu diferențiable și strict monotone (cu excepția lui f_1). Ecuația (10) fiind interesantă și în sine, vom da în ultima parte a lucrării soluția ei în ipoteza de continuitate absolută. Soluția astfel extinsă nu o vom aplica la teoria ȣesuturilor din următoarele motive : 1. s-ar obține o clasă de ȣesuturi, care se situează între cele continue și cele diferențiable, greu de precizat și fără interes deosebit, 2. generalizarea făcută o considerăm provizorie, căci avem impresia că soluția obținută se extinde la cazul continuu.

Din structurile (8) și (9) ale țesuturilor regulate (globale respectiv locale) decurg, în ipoteza de derivabilitate continuă, o serie de proprietăți :

Pentru un țesut global condițiile (RG) și (O) sînt echivalente. Țesutul fiind local, condiția (O) atrage (RG), dar invers nu.

Să considerăm în spațiul euclidian tridimensional 4 fascicule de plane și să ne restrîngem la un domeniu care nu conține niciun punct din suporturile acestor fascicule. Imaginile topologice ale acestor țesuturi coincid cu țesuturile cu proprietatea (RG).

Toate țesuturile octogonale sînt topologic echivalente. Țesuturile locale regulate se împart în 5 clase de țesuturi topologic echivalente.

2. Fie (Q, F) un L -reprezentant al unui țesut ternar. Notăm prescurtat

$$t = F(x, y, z) = xyz, \quad (11)$$

și fie e elementul neutru. Presupunem că are loc următoarea proprietate

$$\left. \begin{array}{l} \text{Toate secțiunile } x \text{ sînt izotopi principali ai unui și aceluiași} \\ \text{grup, de asemenea secțiunile } y. \end{array} \right\} \quad (P)$$

Proprietatea P nu depinde de L -reprezentantul ales, deci aparține țesutului. Avem

$$\begin{aligned} xyz &= \varphi(x, y) * \psi(x, z) \\ xyz &= \varphi_1(x, y) \circ \psi_1(y, z), \end{aligned} \quad (12)$$

unde $*$ și $\circ$ notează cele două operații de grup, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, z)$ funcții inversabile de y respectiv z , cînd x este fixat, iar $\varphi_1(x, y)$, $\psi_1(y, z)$ funcții inversabile de x respectiv z , cînd y este fixat. Putem admite că elementul neutru al grupului $(Q, *)$ este e , căci dacă acest element neutru ar fi $\varepsilon \neq e$, n-avem decît să trecem la un grup izomorf prin transformarea $Tx = x * \varepsilon^{-1}$, $x \in Q$. La fel admitem că grupul $(Q, \circ)$ are elementul neutru e .

Arătăm întîi

$$eyz = y * z, \quad xez = x \circ z. \quad (13)$$

Din (12₁) se obține

$$\begin{aligned} z &= eez = \varphi(e, e) * \psi(e, z) \\ y &= eye = \varphi(e, y) * \psi(e, e), \end{aligned}$$

de unde

$$\varphi(e, y) = y * \psi(e, e)^*, \quad \psi(e, z) = \varphi(e, e)^* * z$$

(x^* notează elementul invers al lui x în grupul $(Q, *)$, iar x° în grupul $(Q, \circ)$); deci (12₁) devine pentru $x = e$

$$eyz = y * \psi(e, e)^* * \varphi(e, e)^* * z.$$

Înlocuind aici $y = e$, $z = e$, se determină $\psi(e, e)^* * \varphi(e, e)^* = e$; așadar prima formulă (13) este stabilită; la fel se obține formula a doua.

Înlocuim în (12₁) $y = e$ și ținem seama de (13)

$$x \circ z = \varphi(x, e) * \psi(x, z),$$

deci

$$\begin{aligned} \psi(x, z) &= \varphi(x, e)^* * (x \circ z) \\ xyz &= \varphi(x, y) * \varphi(x, e)^* * (x \circ z). \end{aligned} \quad (14)$$

Relația (14) devine pentru $z = e$

$$\varphi(x, y) * \varphi(x, e)^* * x = xye. \quad (15)$$

Notăm operația binară

$$xye = x \nabla y, \quad (16)$$

care definește un loop pe Q . Din (14), (15) și (16) se obține

$$xyz = (x \nabla y) * x^* * (x \circ z). \quad (17)$$

În mod analog obținem

$$xyz = (x \nabla y) \circ y^\circ \circ (y * z). \quad (18)$$

Reciproc, dacă un loop ternar (Q, F) admite descompunerile (17) și (18), secțiunile x și y sînt izotopi principali ai grupurilor $(Q, *)$ și $(Q, \circ)$, deci (Q, F) admite proprietatea P . Astfel am demonstrat

LEMA 1. *Condiția necesară și suficientă pentru ca un loop ternar (Q, F) să aibă proprietatea P , constă în existența simultană a descompunerilor (17) și (18) cu două operații de grup $*$, $\circ$ și o operație de loop ∇ .*

Pentru a cunoaște mulțimea loop-urilor ternare cu proprietatea P va trebui deci să determinăm operațiile de grup $*$ și $\circ$ și operația de loop binar ∇ , astfel ca să verifice ecuația funcțională

$$(x \nabla y) * x^* * (x \circ z) = (x \nabla y) \circ y^\circ \circ (y * z) \quad (19)$$

pentru $x, y, z \in Q$.

Să considerăm, pentru un moment, cazul particular

$$x \nabla y = x \circ y. \quad (20)$$

Ecuația (19) devine

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * x^* * (x \circ z)$$

sau

$$x^* * [x \circ (y * z)] = x^* * (x \circ y) * x^* * (x \circ z).$$

Folosind notația

$$T_x(y) = x^* * (x \circ y), \quad (21)$$

ecuația funcțională devine

$$T_x(y * z) = T_x(y) * T_x(z),$$

deci T_x este un automorfism al grupului $(Q, *)$. Ținînd seama de formula (21), avem

$$x \circ y = x * T_x(y) \quad (22)$$

și putem enunța

LEMA 2. *Dacă grupurile $(Q, *)$ și $(Q, \circ)$ sînt legate cu relațiile (19) și (20), atunci operația de grup $\circ$ se deduce din operația de grup $*$ prin intermediul formulei (22), unde T este un automorfism al grupului $(Q, *)$, care depinde de x .*

3. Să particularizăm mulțimea Q la un interval al axei reale, iar (Q, F) la un loop ternar continuu. Pentru a plasa însă acest studiu într-un cadru mai general, nu vom mai presupune că (Q, F) este un loop global, ci unul local.

Observăm întîi că demonstrațiile celor două leme stabilite sînt valabile și pentru un loop ternar local. În definiția proprietății P urmează să considerăm secțiunile x și y pentru x respectiv y luați arbitrar dintr-o vecinătate a elementului e . Sînt valabile deci următoarele leme:

LEMA 1'. *Condiția necesară și suficientă pentru ca un loop ternar local (Q, F) să aibă proprietatea P , constă în existența simultană a descompunerilor (17) și (18) cu două operații de grup binar local $*$ și $\circ$ și o operație de loop binar local ∇ .*

LEMA 2'. *Dacă grupurile locale $(Q, *)$ și $(Q, \circ)$ sînt legate cu relațiile (19) și (20), presupuse valabile pentru o vecinătate a elementului neutru atunci operația $\circ$ se deduce din operația $*$ prin intermediul formulei (22), unde T_x este un automorfism local al grupului local $(Q, *)$, care depinde de x .*

Fie (Q, F) un loop ternar local cu proprietatea P . Putem aplica lema 1', iar pentru cele două operații $\circ$ și $*$ avem

$$\begin{aligned} x \circ y &= g^{-1}[g(x) + g(y)] \\ x * y &= h^{-1}[h(x) + h(y)], \end{aligned} \quad (23)$$

x și y fiind arbitrare într-o vecinătate V a elementului e . Funcțiile f și g îl transformă topologic pe V într-o vecinătate a lui 0. Avem

$$g(e) = 0, \quad h(e) = 0 \quad (24)$$

și

$$g(x^\circ) = -g(x), \quad h(x^*) = -h(x).$$

Ținînd seama că

$$\begin{aligned} g(x_1 \circ x_2^\circ \circ x_3) &= g(x_1) - g(x_2) + g(x_3) \\ h(x_1 * x_2^* * x_3) &= h(x_1) - h(x_2) + h(x_3), \end{aligned}$$

ecuația funcțională (19) devine

$$g^{-1}\{g(x \nabla y) - g(y) + gh^{-1}[h(y) + h(z)]\} = h^{-1}\{h(x \nabla y) - h(x) + h(x \circ z)\}. \quad (25)$$

Deosebim două cazuri :

a) $g(x \nabla y) = g(y)$ nu depinde de y , oricare ar fi $x \in V$.

Avem

$$g(x \nabla y) = g(y) = \psi(x) ;$$

înlocuind $y = e$, deducem $\psi(x) = g(x \nabla e) = g(e) = g(x)$, deci

$$x \nabla y = g^{-1}[g(x) + g(y)] = x \circ y$$

Din lema 2' obținem

$$x \circ y = x * T_x(y),$$

unde $T_x = T$ este un automorfism local al grupului local $(Q, *)$, adică

$$T(y * z) = T(y) * T(z), \quad y, z \in V$$

sau

$$Th^{-1}[h(y) + h(z)] = h^{-1}[hT(y) + hT(z)].$$

Scriind $h(y) = u$, $h(z) = v$, u și v sînt numere reale oarecare, suficient de mici și

$$hTh^{-1}(u + v) = hTh^{-1}(u) + hTh^{-1}(v).$$

Deci

$$\begin{aligned} hTh^{-1}(u) &= C(x) \cdot u \\ T &= T_x(y) = h^{-1}[C(x) \cdot h(y)] \\ x \circ y &= h^{-1}[h(x) + C(x) \cdot h(y)]. \end{aligned} \tag{26}$$

Dar $x \circ y = y \circ x$, deci

$$h(x) + C(x)h(y) = h(y) + C(y)h(x);$$

punînd aici $y = y_0$, obținem

$$C(x) = ah(x) + 1, \tag{27}$$

unde constanta $a = C(y_0) - 1$.

Dacă $a = 0$, obținem $C(x) = 1$, $x \circ y = x * y = x \nabla y$ și

$$F(x, y, z) = x \circ y \circ z = h^{-1}[h(x) + h(y) + h(z)], \tag{28}$$

deci în acest caz (Q, F) este un grup ternar.

Dacă $a \neq 0$, formula (26) devine

$$x \circ y = h^{-1}[ah(x)h(y) + h(x) + h(y)],$$

iar operația loop-ului ternar local (Q, F)

$$F(x, y, z) = x \circ (y * z) = h^{-1}\{a \cdot h(x)[h(y) + h(z)] + h(x) + h(y) + h(z)\}.$$

Putem scrie

$$hF(x, y, z) = [a \cdot h(x) + 1] [h(y) + h(z)] + h(x)$$

sau

$$a \cdot hF(x, y, z) + 1 = [a \cdot h(x) + 1] \{ [a \cdot h(y) + 1] + [ah(z) + 1] - 1 \}.$$

Notînd

$$\varphi(x) = a \cdot h(x) + 1, \quad (29)$$

φ este o transformare topologică a unei vecinătăți a lui e în axa reală, ca și h , și avem

$$\varphi(e) = ah(e) + 1 = 1$$

și

$$F(x, y, z) = \varphi^{-1} \{ \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) - 1 \}. \quad (30)$$

Rezumînd acest caz a), enunțăm

LEMA 3. *Un loop ternar local (Q, F) , care admite descompunerile (17) și (18) cu trei operații de grup local $*, \circ, \nabla$, dintre care ultimele două coincid, are o structură determinată de formulele (28) sau (30), unde h respectiv φ sînt funcții continue și strict monotone. Reciproca este evident adevărată.*

Formula (28) atunci și numai atunci este valabilă, dacă cele trei operații $*, \circ, \nabla$ coincid.

Loop-ul ternar local cu structura (28) poate fi considerat cu restrîngerea unui loop ternar global. Dimpotrivă, un loop ternar local cu structura (30) nu poate fi extins la un loop ternar global. Într-adevăr, se vede din (30), că dacă $\varphi(x) > 1$, $\varphi F(x, x, x) > [\varphi(x)]^2$ și astfel în cazul loop-ului ternar global definit de (30), $\varphi(x)$ trebuie să ia valori oricît de mari, de asemenea valori oricît de mici. Iar, dacă $\varphi(y_0) = \varphi(z_0) = \frac{1}{2}$, $F(x, y_0, z_0)$ ia aceeași valoare $\varphi^{-1}(0)$, oricare ar fi x , ceea ce e în contradicție cu condiția (2). Deci are loc

LEMA 4. *Un loop ternar global continuu (Q, F) , care admite descompunerile (17) și (18) cu trei operații de grup $*, \circ, \nabla$, dintre care ultimele două coincid, are o structură determinată de formula (28), deci este un grup ternar și toate cele trei operații $*, \circ, \nabla$ coincid.*

b) Există $x_0 \in V$ astfel ca $g(x_0 \nabla y) = g(y) \neq \text{const.}$ Înlocuim în relația (25) $x = x_0$

$$g(x_0 \nabla y) = g(y) + gh^{-1}[h(y) + h(z)] = gh^{-1} \{ h(x_0 \nabla y) - h(x_0) + h(x_0 \circ z) \}. \quad (31)$$

Notăm

$$j = gh^{-1} \quad (32)$$

$$h(y) = u, \quad h(z) = v;$$

u și v sînt valori arbitrare dintr-o vecinătate suficient de mică a originii. Ecuația (31) devine

$$f(u + v) + j_1(u) = f[p(u) + q(v)], \quad (33)$$

unde s-a notat

$$f_1(u) = g[x_0 \nabla h^{-1}(u)] - gh^{-1}(u) \neq \text{const.}$$

$$p(u) = h[x_0 \nabla h^{-1}(u)], \quad q(v) = h[x_0 \circ h^{-1}(v)] - h(x_0).$$

LEMMA 5. *Un loop ternar local cu proprietatea P are sau structura (28) sau (30) sau se bucură de proprietatea următoare: operația lui poate fi scrisă sub formele (17) și (18) cu grupurile locale $\circ$ și $*$ furnizate de (23), iar funcția f , definită prin (32), satisface, pentru u și v suficient de mici în valoare absolută, ecuația funcțională (33), unde f , p , q sînt funcții continue și strict monotone și f_1 o funcție continuă, care nu se reduce la o constantă.*

4. Vom rezolva în punctul 5. ecuația funcțională (33) în condiții mai restrictive: vom căuta funcțiile necunoscute f , p , q , f_1 în clasa funcțiilor care admit derivată continuă. Pentru a putea apoi aplica această soluție la loop-urile ternare locale diferențiabile, vom avea nevoie de

LEMMA 6. *Fie*

$$g(x \circ y) = g(x) + g(y) \quad (34)$$

și să presupunem că funcția g este continuă și strict monotonă pe intervalul I , valorile lui g îl conțin pe 0 și funcția $G(x, y) = x \circ y$ admite derivată parțială $G'_x(x, y)$ continuă pentru $x \in I$, $y \in I$. Atunci există o vecinătate a lui $e = g^{-1}(0)$, conținută în I , pe care g admite o derivată continuă.

Demonstratie. Avem

$$G(x, e) = x \circ e = x$$

$$G'_x(x, e) = 1,$$

deci există o vecinătate a lui e $V_e \subset I$, astfel ca

$$G'_x(x, y) > 0, \text{ dacă } x, y \in V_e.$$

Formula

$$g'[G(x, y)] \cdot G'_x(x, y) = g'(x) \quad (35)$$

este valabilă dacă $x, y \in V_e$ și $g'(x)$ există. Ori $g'(x)$ există în punctele lui V_e , dacă facem abstracție de o mulțime de puncte de măsură nulă. Ținînd seamă că $G(x, y)$ este un grup local, există $V'_e \subset V_e$ astfel ca pentru $a \in V'_e$, $c \in V'_e$ ecuația

$$G(a, y) = c \quad (36)$$

are o soluție y în V_e . Fie acum $a \in V'_e$ astfel ca $g'(a)$ să existe, c element oarecare în V'_e și y_0 soluția ecuației (36). Pentru $x = a$, $y = y_0$, relația (35) devine

$$g'(c) \cdot G'_x(a, y_0) = g'(a), \quad (37)$$

de unde rezultă că $g'(c)$ există pentru $c \in V'_e$. Păstrînd pe a fix în (37) și făcînd pe y_0 și c să varieze, astfel ca să avem mereu $G(a, y_0) = c$, se deduce din continuitatea funcțiilor G și G'_x că g' este o funcție continuă în V'_e .

CONSECINȚĂ. Dacă (Q, F) este un loop ternar local, continuu diferentiaabil, atunci funcția f , dată de formula (32) admite o derivată continuă în vecinătatea originii.

5. Vom rezolva acum ecuația funcțională

$$f(x+y) + f_1(x) = \Phi[p(x) + q(y)], \quad x, y \in I \quad (38)$$

care conține ecuația (33), ca un caz particular. În ecuația (38) figurează cinci funcții necunoscute. Am trecut de la ecuația (33) la (38), pentru că această din urmă prezintă interes și în sine, membrul al doilea fiind un izotop oarecare al sumei și astfel prin ecuația (38) se determină izotopii sumei de forma $f(x+y) + f_1(x)$.

Căutăm soluția (f, Φ, p, q, f_1) astfel ca primele patru funcții să fie strict monotone și cu prima derivată continuă în intervalul I , care conține originea, iar a cincea funcție f_1 (a cărei derivabilitate continuă rezultă imediat) să nu fie o constantă. Prin această ipoteză ultimă excludem soluția trivială $f_1 = \text{const}$, f oarecare, $\Phi = f$, $p(x) = q(x) = x$. Se presupune de asemenea că domeniul de definiție al funcției Φ conține valorile $p(x) + q(y)$, $x, y \in I$.

Derivând ecuația (38) în raport cu x și y obținem

$$\begin{aligned} f'(x+y) + f'_1(x) &= \Phi'[p(x) + q(y)]p'(x) \\ f'(x+y) &= \Phi'[p(x) + q(y)]q'(y). \end{aligned} \quad (39)$$

Funcțiile f' și q' nu se anulează în I . Într-adevăr, dacă am avea $y_0 \in I$, $q'(y_0) = 0$, atunci $f'(x+y_0) = 0$ pentru orice $x \in I$, în contradicție cu monotonia strictă a funcției $f(x)$. Din $f'(c) = 0$ rezultă $\Phi'[p(x) + q(c-x)] = 0$, ceea ce înseamnă că Φ' se anulează pe un interval, adică o contradicție.

Prin împărțire obținem din (39)

$$\frac{1}{f'(x+y)} = \frac{p'(x)}{f'_1(x)} \cdot \frac{1}{q'(y)} - \frac{1}{f_1(x)}$$

sau notînd $G = 1/f'$, $P = p'/f'_1$, $Q = 1/q'$, $R = -1/f_1$,

$$G(x+y) = P(x)Q(y) + R(x), \quad (40)$$

unde G și Q sînt funcții continue pe I , P și R funcții continue pe un interval $I' \subset I$. În aceste condiții funcțiile P, Q, R, G sînt indefinit derivabile [9]. Obținem, prin derivare în raport cu y , ecuația funcțională

$$G'(x+y) = P(x) \cdot Q'(y)$$

și se cunoaște că soluția generală a acesteia este

$$G'(x) = a_1 c_1^x,$$

unde a_1 și $c_1 > 0$ sînt constante. Deci

$$G(x) = a_2 c_1^x + b_1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{a_2 c_1^x + b_1}$$

$$f(x) = k \ln(ac^x + b) \quad (41)$$

($a_2, b_1, a \neq 0, b, k \neq 0$ și $c > 0$ sînt constante).

Așadar, o funcție f , care verifică ecuația funcțională (38) împreună cu patru funcții din clasa de funcții specificată, este de forma (41). Pentru aplicațiile în teoria țeșturilor ne ajunge funcția $f(x)$. Dar ecuația (38) este interesantă și independent de această aplicație, precum am observat, de aceea trecem acum la determinarea celorlalte patru funcții necunoscute.

Scriind $p(x) = u$, $q(y) = v$ ecuația (38) devine

$$\Phi(u + v) - f_1 p^{-1}(u) = f[p^{-1}(u) + q^{-1}(v)],$$

care are exact aceeași structură ca și ecuația (38), iar condițiile impuse pentru p și q atrag aceleași condiții pentru p^{-1} și q^{-1} . Rolul lui f fiind preluat de Φ , avem

$$\Phi(x) = k' \ln(a'c'^x + b'), \quad (42)$$

unde $a' \neq 0$, $k' \neq 0$, $c' > 0$ sint constante. Cele 8 constante, care figurează în expresiile (41) și (42) nu sînt independente. Notînd

$$k = k'\alpha, \quad c' = c^\beta, \quad \beta p(x) = p_1(x), \quad \beta q(y) = q_1(y), \quad f_2(x) = e^{\frac{1}{k}f_1(x)} \quad (43)$$

și înlocuind expresiile (41) și (42) în ecuația (38), obținem

$$[(ac^{x+y} + b)f_2(x)]^\alpha = a'c^{p_1(x) + q_1(y)} + b'. \quad (44)$$

Ecuația (44) furnizează pentru $x = 0$

$$a'c^{q_1(y)} = A(ac^y + b)^\alpha + B;$$

astfel (44) devine

$$[(ac^{x+y} + b)f_2(x)]^\alpha = [A(ac^y + b)^\alpha + B]c^{p_1(x)} + b'.$$

Considerăm aceeași ecuație pentru $y = 0$ și le împărțim

$$\frac{(ac^{x+y} + b)^\alpha}{(ac^x + b)^\alpha} = \frac{[A(ac^y + b)^\alpha + B]c^{p_1(x)} + b'}{A(a + b)^\alpha + B[c^{p_1(x)} + b']};$$

după un calcul simplu rezultă că

$$\frac{(ac^{x+y} + b)^\alpha - (ac^x + b)^\alpha}{(ac^y + b)^\alpha - (a + b)^\alpha} = \text{funcție de } x.$$

Notînd $\psi(x) = (ac^x + b)^\alpha$, avem

$$\frac{\psi(x+y) - \psi(x)}{\psi(y) - \psi(0)} = \chi(x)$$

$$\psi(x+y) = \chi(x)[\psi(y) - \psi(0)] + \psi(x).$$

Această ecuație este de tipul ecuației (40), deci

$$\psi(x) = A_1 \gamma^x + B_1 = (ac^x + b)^\alpha;$$

rezultă (după derivare)

$$\alpha = 1.$$

Relația (44) se scrie

$$(ac^{x+y} + b)f_2(x) = a'c^{f_1(x) + g_1(y)} + b'; \quad (45)$$

înlocuind $x = 0$, obținem

$$c^{g_1(y)} = \frac{a}{a_1} c^y + b'b_1, \quad (46)$$

unde a_1 și b_1 sînt constante. Dacă $b_1 = 0$, rezultă ușor că toate funcțiile necunoscute sînt liniare. Să presupunem acum că $b_1 \neq 0$. Scădem din (45) aceeași ecuație pentru $y = 0$; ținînd seama de (46) și simplificînd se obține

$$f_2(x) = \frac{a'}{a_1} c^{f_1(x) - x};$$

ecuația (45) devine

$$c^{f_1(x)} = \frac{a'b}{a_1b'}, \quad c^{-x} = a'b_1.$$

Așadar

$$\begin{cases} f(x) = k \ln(ac^x + b) \\ \Phi(x) = k \ln(a'c^{g(x)} + b') \\ p(x) = \frac{1}{\beta} \log \left(\frac{a'b}{a_1b'} c^{-x} - a'b_1 \right) \\ q(x) = \frac{1}{\beta} \log \left(\frac{a}{a_1} c^x + b'b_1 \right) \\ f_1(x) = -k \ln \left(\frac{b}{b'} - a_1b_1c^x \right). \end{cases} \quad (47)$$

Se constată prin înlocuire că funcțiile (47) verifică ecuația funcțională (38).

TEOREMA 1. *Soluția generală a ecuației funcționale (38) în clasa funcțiilor strict monotone și continuu diferențiabile pentru f, Φ, p, q și pentru $f_1 \neq \text{const.}$, este dată de formulele (47), unde $a \neq 0$, $a' \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $b, b' \neq 0$, $b_1, k, \beta \neq 0$ și $c > 0$ sînt constante arbitrare sau toate funcțiile soluției sînt liniare.*

Soluția generală a ecuației (33) se obține din soluția (47) a ecuației (38) punînd $a' = a$, $b' = b$, $\beta = 1$.

6. Fie iarăși (Q, F) un loop ternar local, continuu diferențiabil, cu proprietatea P. Să presupunem că structura lui nu se exprimă cu formulele (28) și (30), adică ne plasăm în cazul b) al punctului 3. În conformitate cu lema 5., operația acestui loop admite descompunerile (17) și (18), unde operațiile $\circ$ și $*$ sînt date de (23), iar funcția (32) $f = gh^{-1}$ are forma (41) (s-a ținut seama de consecința lemei 6 și teorema 1).

Acuma sîntem în măsură de a determina operațiile binare $\circ$, $*$ și ∇ și apoi operația ternară $F(x, y, z)$.

Să notăm

$$\varphi(x) = c^{h(x)}; \quad (48)$$

atunci $\varphi(e) = c^{h(e)} = 1$ și (23₂) devine

$$x * y = \varphi^{-1}[\varphi(x) \cdot \varphi(y)]. \quad (49)$$

Mai departe,

$$g(x) = fh(x) = k \ln(ac^{h(x)} + b) = k \ln[a\varphi(x) + b];$$

punem condiția $g(e) = 0$, ceea ce conduce la

$$b = 1 - a.$$

Operația $\circ$ se exprimă după formula (23₁) în felul următor:

$$\begin{aligned} k \ln[a\varphi(x \circ y) + 1 - a] &= k \ln[a\varphi(x) + 1 - a] + k \ln[a\varphi(y) + 1 - a] \\ x \circ y &= \varphi^{-1}\{a\varphi(x)\varphi(y) + (1 - a)[\varphi(x) + \varphi(y) - 1]\}. \end{aligned} \quad (50)$$

Înlocuim expresiile (49) și (50) ale operațiilor $*$ și $\circ$ în ecuația (19)

$$\begin{aligned} &\frac{a\varphi(x \nabla y) \varphi(y) \varphi(z) + (1 - a)[\varphi(x \nabla y) + \varphi(y) + \varphi(y) \varphi(z)]}{a\varphi(y) + 1 - a} = \\ &= \frac{\varphi(x \nabla y) \{a\varphi(x) \varphi(z) + (1 - a)[\varphi(x) + \varphi(z) - 1]\}}{\varphi(x)}. \end{aligned} \quad (51)$$

Această relație determină operația ∇ :

$$x \nabla y = \varphi^{-1} \left[- \frac{\varphi(x) \varphi(y)}{a\varphi(x) \varphi(y) - a\varphi(x) - a\varphi(y) + a - 1} \right]. \quad (52)$$

Formula (52) poate fi pusă sub forma

$$\frac{1 - a}{\varphi(x \nabla y)} + a = \left[\frac{1 - a}{\varphi(x)} + a \right] \cdot \left[\frac{1 - a}{\varphi(y)} + a \right],$$

sau punând

$$\psi(x) = \exp \left[\frac{1 - a}{\varphi(x)} + a \right],$$

avem

$$\psi(x \nabla y) = \psi(x) + \psi(y), \quad (53)$$

deci (Q, ∇) este local izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale.

Formula (17), sau cei doi membri ai egalității (51), furnizează expresia

$$\varphi F(x, y, z) = -\varphi(y) \cdot \frac{a\varphi(x) \varphi(z) + (1 - a)[\varphi(x) + \varphi(z) - 1]}{a\varphi(x) \varphi(y) - a\varphi(x) - a\varphi(y) + a - 1}$$

sau notînd $(1 - a)/a = k$

$$F(x, y, z) = \varphi^{-1} \left[\frac{\varphi(z) + k \frac{\varphi(x) - 1}{\varphi(x) + k}}{\frac{1}{\varphi(y)} - \frac{\varphi(x) - 1}{\varphi(x) + k}} \right]. \quad (54)$$

TEOREMA 2. *Un loop ternar local (Q, F) continuu diferențiabil, cu proprietatea P are sau structura (28) sau (54), unde k este o constantă diferită de -1 și φ (respectiv h) o funcție strict monotonă și continuu diferențiabilă, care transformă o vecinătate a lui e într-o vecinătate a axei reale, care conține punctul unitate (respectiv originea).*

Trebuie să arătăm numai că structura (30) este conținută în (54), ca un caz particular.

Să observăm întâi că în formula (54) variabilele x, y, z au un rol simetric [10]. Într-adevăr, scriind

$$\varphi(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)} \text{ și } k = \frac{1}{k_1}$$

obținem

$$F(x, y, z) = \varphi_1^{-1} \left[\frac{\varphi_1(y) + k_1 \frac{\varphi_1(x) - 1}{\varphi_1(x) + k_1}}{\frac{1}{\varphi_1(z)} - \frac{\varphi_1(x) - 1}{\varphi_1(x) + k_1}} \right] \quad (54')$$

și scriind

$$\varphi_1(x) = (k_1 + 1)\varphi_2(x) - k_1 \text{ și } k_1 = -\frac{k_2}{k_2 + 1},$$

obținem

$$F(x, y, z) = \varphi_2^{-1} \left[\frac{\varphi_2(y) + k_2 \frac{\varphi_2(z) - 1}{\varphi_2(z) + k_2}}{\frac{1}{\varphi_2(x)} - \frac{\varphi_2(z) - 1}{\varphi_2(z) + k_2}} \right]. \quad (54'')$$

Valorile $k = 0, -1, \infty$ se transformă în $k_1 = \infty, -1, 0$ și $k_2 = -1, \infty, 0$. Valoarea $k = -1$ este excepțională, ea corespunde la $a = \infty$ și formula (54) nu dă un loop ternar. Dar $k = 0$ sau ∞ pot fi considerate.

Punînd în formula (54) și în cele deduse prin schimbarea rolurilor variabilelor $k = 0$ sau ∞ , se obțin structurile analoge cu (30).

Din teorema 2 deducem imediat

TEOREMA 3. *Dacă secțiunile x și y ale unui loop ternar local, continuu diferențiabil, sînt local izotope cu cite un grup, atunci și secțiunile z au această proprietate.*

7. În acest punct vom aplica teorema 2 la teoria țesuturilor locale, continuu diferențiabile, pe care le vom numi *țesuturi* T . Țesuturile T sînt formate din patru familii de suprafețe, continuu diferențiabile, așezate într-un domeniu D al spațiului euclidian tridimensional. Dacă domeniul D cuprinde întregul spațiu, avem un *țesut global* T , în caz contrar un *țesut local* T .

După cum am arătat în punctul 1, un țesut T este octogonal, dacă verifică condiția (O); el este regulat, dacă verifică condiția (RG). Țesuturile T octogonale sînt topologic echivalente cu un țesut format din 4 fascicole de plane paralele.

L -reprezentății Țesuturilor locale T regulate au proprietatea P , deci li se pot aplica teorema 2, așadar au operația de forma (28) sau (54). Rezultă

TEOREMA 4. *Un Țesut local T regulat are un reprezentant de forma*

$$t = \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}, \quad (55)$$

unde $A_i, B_i, C_i, D_i, i = 1, 2$ sînt constante. Invers, orice Țesut local definit prin formula (55) este un Țesut local T regulat.

Într-adevăr, dacă formula (28) este valabilă, aplicăm izomorfismul $h(x) \rightarrow x$ și obținem formula (55) cu $A_1 = B_1 = C_1 = D_2 = 1$ și $D_1 = A_2 = B_2 = C_2 = 0$. Dacă formula (54) este valabilă, aplicăm izotopia

$$\frac{\varphi(x) - 1}{\varphi(x) + k} \rightarrow x, \quad \frac{1}{\varphi(y)} \rightarrow y, \quad \varphi(z) \rightarrow z, \quad \varphi(t) \rightarrow t$$

și se obține o expresie de forma (55).

Reciproc, dacă se dă (55) și $A_2 = B_2 = C_2 = 0$, (55) este izotop cu

$$t = x + y + z, \quad (56)$$

care este tocmai (28) cu $h(x) = x$.

Dacă $A_2 = B_1 = C_1 = 0$ (atunci în mod necesar $A_1 \neq 0, B_2 \neq 0, C_2 \neq 0$, căci altfel (51) n-ar defini un Țesut) sau $A_1 = B_2 = C_2 = 0$, (55) este izotop cu

$$t = \frac{x + z}{x}, \quad (57)$$

Dacă $A_1 = B_2 = C_1 = 0$ sau $A_2 = B_1 = C_2 = 0$, (55) este izotop cu

$$t = \frac{x + z}{y}; \quad (57')$$

dacă $A_1 = B_1 = C_2 = 0$ sau $A_2 = B_2 = C_1$, (55) este izotop cu

$$t = \frac{x + y}{z}, \quad (57'')$$

Dacă $A_1A_2 \neq 0$ sau $B_1B_2 \neq 0$ sau $C_1C_2 \neq 0$, (55) este izotop cu

$$t = \frac{x + y}{x + z} \quad (58)$$

(în același timp este izotop cu $y + x/y + z$ și cu $z + x/z + y$). Formulele (57), (57'), (57'') și (58) sînt conținute în (54).

Astfel am demonstrat teorema 4 și totodată am stabilit

TEOREMA 5. *Un Țesut local T regulat este topologic echivalent cu unul din cele 5 Țesuturi (56), (57), (57'), (57''), (58), topologic neechivalente între ele. Fiecare dintre aceste Țesuturi este format din 4 fascicule de plane (dintre care 3 sînt fascicule de plane paralele cu planele de coordonate).*

La tipul (56) suportele celui de al patrulea fascicol este la infinit, la tipurile (57), (57'), (57'') acest suport este paralel cu unul din planele de coordonate, iar la tipul (58) el nu este paralel cu niciunul din planele de coordonate.

Ținând seamă că dintre cele cinci tipuri de țesut local, numai primul este un țesut global și acesta este un țesut octogonal, putem enunța

TEOREMA 6. *Țesuturile globale T regulate coincid cu țesuturile T octogonale.*

Cazurile (57), (57') și (57'') corespund structurii (30) care este un caz particular al structurii (54).

8. Reluăm ecuația funcțională

$$f(x+y) + f_1(x) = \Phi[p(x) + q(y)], \quad (38)$$

considerată pe toată axa reală, căutînd soluțiile din clase de funcții mai vaste decît în punctul 5. Presupunem că funcțiile p , q , Φ sînt strict monotone și absolut continue și $f_1(x) \neq \text{const.}$

Vom arăta că în aceste izotope soluția este dată de asemenea de formulele (47) sau funcțiile soluției sînt liniare.

Fixînd pe x în (38), rezultă că f este și ea o funcție strict monotună și absolut continuă, iar f_1 este o funcție cu variație mărginită.

Să considerăm întîi cazul particular $q(y) = ay + b$. Notînd $\frac{1}{a}p(x) - x = r(x)$, $\Phi(ax + b) = \psi(x)$, $x + y = t$,

$$f(t) + f_1(x) = \psi[t + r(x)].$$

Fie I' domeniul valorilor funcției $r(x)$, cînd $x \in (-\infty, \infty)$. Avem pentru $t \in (-\infty, \infty)$, $t' \in I'$

$$f(t) + f_2(t') = \psi(t + t'), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad t' \in I'.$$

Am obținut ecuația lui Pexider, a cărei soluție, în condițiile noastre, este formată din funcții liniare.

În continuare presupunem că funcția $q(y)$ nu se reduce la o funcție liniară. Arătăm succesiv:

a) Mulțimea E_k de puncte x pentru care $f_1(x) = k$ este o submulțime (eventual vidă sau de un singur element) a unei mulțimi de puncte $\{x_0 + n\theta\}$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, unde θ nu depinde de k .

Fie într-adevăr $f_1(x_0) = f_1(x_1)$. Atunci

$$\begin{aligned} f(x_0 + y) + f_1(x_0) &= \Phi[p(x_0) + q(y)] \\ f(x_1 + y + x_0 - x_1) + f_1(x_1) &= \Phi[p(x_1) + q(y + x_0 - x_1)]; \end{aligned}$$

membrii I fiind egali și Φ fiind o funcție strict monotună

$$p(x_0) + q(y) = p(x_1) + q(y + x_0 - x_1).$$

Ținînd seamă de această egalitate se deduce că funcția

$$Q(y) = q(y) - \frac{p(x_0) - p(x_1)}{x_0 - x_1} y$$

verifică relația

$$Q(y + x_1 - x_0) = Q(y). \quad (59)$$

Q nu se reduce la o constantă, căci q nu este o funcție liniară, deci Q este o funcție periodică. Perioada ei θ nu depinde de x_0 și x_1 , ea fiind determinată de funcția q . Într-adevăr, notînd $A = [p(x_0) - p(x_1)]/(x_0 - x_1)$

$$q(y) = Q(y) + Ay;$$

dacă am avea în același timp

$$q(y) = Q_1(y) + A_1y,$$

$A_1 \neq A$, ar rezulta

$$(A - A_1)y + Q(y) = Q_1(y)$$

și Q n-ar putea fi o funcție periodică. Rezultă $A_1 = A$, $Q_1 = Q$. Din relația (59) rezultă

$$x_1 - x_0 = n\theta,$$

unde n este un întreg.

b) Derivatele funcțiilor p, q, Φ, f, f_1 există și sînt finite aproape peste tot. Fie M_1, M_2, M_3 mulțimile de puncte în care p, q respectiv Φ admit derivate finite. Formulele

$$\begin{cases} f'(x+y) + f_1'(x) = \Phi'[p(x) + q(y)]p'(x) \\ f'(x+y) = \Phi'[p(x) + q(y)]q'(y) \end{cases} \quad (60)$$

sînt valabile pentru sistemele de valori x, y astfel ca

$$x \in M_1, y \in M_2, p(x) + q(y) \in M_3. \quad (61)$$

c) Funcția f admite derivată finită în fiecare punct.

E suficient să arătăm că pentru orice $z \in (-\infty, \infty)$, există x, y astfel ca $z = x + y$ și x, y să satisfacă condiția (61). Să considerăm transformarea

$$t = \psi(x) = p(x) + q(z - x) \quad (62)$$

a mulțimii numerelor reale în ea însăși. Dacă x_1 și x_2 au aceeași imagine prin (62)

$$p(x_1) + q(z - x_1) = p(x_2) + q(z - x_2),$$

atunci din (38) rezultă

$$f_1(x_1) = f_1(x_2)$$

și deci în baza punctului a), $|x_1 - x_2| > \theta$. Fie I un interval de lungime mai mică decît θ . Transformarea (62) este biunivocă pe I și deoarece $\psi(x)$ este o funcție absolut continuă, această transformare îndeplinește pe I condiția N de a transforma orice mulțime de măsură nulă într-o mulțime de măsură nulă. Așadar mulțimea $M_1 \cap I$ se transformă într-un interval din care se scoate o mulțime de măsură nulă, de asemenea mulțimea punctelor x , pentru care $x \in M_1 \cap I$ și $z - x \in M_2$. Deci se poate alege x_0

astfel ca $x_0 \in M_1 \cap I$, $z - x_0 \in M_2$, $t_0 = \psi(x_0) = p(x_0) + q(z - x_0) \in M_3$. Perechea $x_0, z - x_0$ satisface condiția (61) și astfel am demonstrat că funcția f admite derivată finită în orice punct.

d) Funcțiile d , Φ și q admit derivate finite și diferite de zero în orice punct. Într-adevăr, ecuația (38) se poate scrie sub forma (42), în care Φ joacă rolul lui f , deci rezultatul c) se poate aplica lui Φ . Rezultă că formula (60₂) este valabilă fără excepție. Dacă Φ' s-ar anula într-un punct, f' ar fi egal cu zero într-un interval, contrar ipotezei că această funcție este strict monotonă. Rezultă existența lui q' și că nici f' și nici q' nu se pot anula.

e) Funcțiile f' , Φ' , q' sînt punctual discontinue (pe orice interval aceste funcții au puncte de continuitate), căci, fiind derivate finite peste tot, sînt de clasa 1 Baire. Rezultă că $\frac{1}{f'}$, și $\frac{1}{q'}$, sînt funcții punctual discontinue.

f) Formula (60₂) este valabilă peste tot, iar (60₁) pentru $x \in M_1$, y oarecare. Prin împărțire deducem ecuația funcțională (40), valabilă pentru $x \in M_1$, y oarecare, în care G și Q sînt funcții punctual discontinue.

g) Funcțiile G și Q sînt continue peste tot. Fie într-adevăr y_0 un punct de continuitate pentru Q . Atunci toate punctele $x + y_0$, unde $x \in M_1$, sînt puncte de continuitate pentru G , căci avem pentru x fixat în M_1

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow x+y_0} G(\xi) &= \lim_{y \rightarrow y_0} G(x+y) = \lim_{y \rightarrow y_0} [P(x)Q(y) + R(x)] = \\ &= P(x)Q(y_0) + R(x) = G(x+y_0). \end{aligned}$$

Așadar aproape orice punct de pe axa reală este un punct de continuitate pentru G . Deci, y_1 fiind un punct oarecare, putem alege $x_1 \in M_1$ astfel ca $x_1 + y_1$ să fie un punct de continuitate pentru G . Avem

$$G(x_1 + y) = P(x_1)Q(y) + R(x_1).$$

Ținînd seama că $P_1(x) \neq 0$, rezultă că Q este o funcție continuă în y_1 . Așadar funcția Q și împreună cu ea funcția R sînt continue peste tot.

Dar atunci funcțiile P, Q, R, G sînt indefinit derivabile [9] și putem aplica rezultatul de la punctul 5.

BIBLIOGRAFIE

1. J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*. Deutscher Verl. der Wiss., Berlin, 1961.
2. J. Aczél — G. Pickert — F. Radó, *Nomogramme, Gewebe und Quasigruppen*. „Mathematica” **2(25)**, 5—24 (1960).
3. W. Blaschke — G. Bol, *Geometrie der Gewebe*. „Grundl. d. math. Wiss.”, **49**, Berlin, 1938.
4. L. E. J. Brouwer, *Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie*. „Math. Ann.”, **67**, 246—267 (1909).
5. R. H. Bruck, *A Survey of Binary Systems*. „Ergebnisse d. Math.”, Neue Folge, **20**, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.

6. G. Pickert, *Projektive Ebenen*, „Grundl. d. math. Wiss.", **80**, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
7. F. Radó, *Generalizarea ȧesuturilor spațiale pentru structuri algebrice*, „Studia Universitatis Babeş-Bolyai", ser. I, fasc. 1, Math.-Phys., **41—55** (1960).
8. F. Radó, *Eine Bedingung für die Regularität der Gewebe*, „Mathematica" **2** (25), 325—334 (1960).
9. F. Radó, *Caractérisation de l'ensemble des intégrales des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants d'ordre donné*, „Mathematica", **4** (27) 131—143 (1962).
10. F. Radó — M. Hosszú, *Über eine Klasse von ternären Quasigruppen*, „Acta Mathematica Acad. Hung." (Sub tipar).

РЕГУЛЯРНЫЕ ТЕРНАРНЫЕ ТКАНИ

(Резюме)

Тернарная квазигруппа (Q, F) (или N алгебра) является множеством Q , на котором определена тернарная операция:

$$t \rightarrow F(x, y, z) = xyz \quad (1)$$

так, чтобы уравнения (2) имели по одному единственному решению в Q , для a, b, c, d , произвольно фиксированных в Q (7). Если имеется нейтральный элемент $e \in Q$ со свойством (3), (Q, F) называется *тернарным луном*. Соотношение (4) определяет *изотопию* между двумя квазигруппами. Если k является тождественным преобразованием, имеем *главную изотопию*. В работе *тернарная ткань* понимается множество тернарных квазигрупп, изотопных с одной данной тернарной квазигруппой.

Рядом с тернарными непрерывными квазигруппами (когда Q является действительным интервалом и F непрерывной функцией), рассматриваются и *локальные тернарные квазигруппы*, определённые следующим способом: пусть V_1, V_2, V_3 три окрестности действительной оси; *требуется, чтобы непрерывная функция* (1) *была определена для* $x \in V_1, y \in V_2, z \in V_3$ *и чтобы имелись окрестности* $V'_1 \subset V_1, V'_2 \subset V_2, V'_3 \subset V_3$, $V_1 \ni F(x_0, y_0, z_0), (x_0 \in V_1, y_0 \in V_2, z_0 \in V_3)$, так, чтобы для $a \in V'_1, b \in V'_2, c \in V'_3, d \in V'_4$, уравнения (2) имели по одному единственному решению в V_1, V_2, V_3 , соответственно. Если в частности $V_1 = V_2 = V_3, x_0 = y_0 = z_0 = e$, имеется *локальный тернарный лун*. Если формула (4) удовлетворена только для одной какой-либо окрестности, она определяет *локальную изотопию*. *Локальная ткань* является множеством локальных тернарных квазигрупп, локально изотопных с локальной тернарной квазигруппой.

Пусть (Q, F) тернарная квазигруппа и e_0 постоянный элемент из Q . Бинарная операция $(x, y) \rightarrow F(x, y, e_0)$ определяет бинарную квазигруппу на Q , названную *разрезом* z тернарной квазигруппы (Q, F) . Аналогично определяются разрезы x и y .

Тернарная квазигруппа называется *регулярной*, если удовлетворяет *обобщённому условию закрытия Рейдемейстера* $(R.G)$. Это условие является инвариантным у изотопий, следовательно можно определить ткань регулярной, если один представитель является регулярным. Доказалось в [8] что, необходимое и достаточное условие для того, чтобы тернарный лун был регулярным, следующее: все разрезы x, y, z должны быть главными изотопами, каждый с одной группой.

В данной работе показано, что, если разрезы x и y непрерывно дифференцируемого локального тернарного луна, являются главными изотопами, каждый с одной группой, тогда операция этого луна выражается либо формулой (28), либо формулой (54), где k -постоянная $\neq -1$, а φ (соответственно $\bar{k}$) — строго монотонная и непрерывно дифференцируемая функция. Следует, что разрезы z являются также главными изотопами с одной группой.

Формулы (28) и (54) были найдены и в работе [10], но в допущении, что три системы разрезов x, y, z являются главными изотопами, каждый с одной группой. Чтобы прийти к вышеказанному результату, решается функциональное уравнение (38) в классе строго монотонных и непрерывно дифференцируемых функций для f, Φ, ρ, q и для $f_1 \neq \text{const}$. Решения дано формулами (47) или составлено из линейных функций.

То же самое решение находится в более общих условиях абсолютной непрерывности, вместо дифференцируемости.

Из вышеуказанного результата вытекает ряд свойств для регулярных тканей, в допущении непрерывной дифференцируемости:

Для глобальной ткани условия (RG) и (O) являются эквивалентными. Ткань, будучи локальной, условие (O) влечёт за собой условие (RG) , но не и обратно.

Рассмотрим в евклидовом трёхмерном пространстве 4 лучка плоскостей и ограничимся областью не содержащей ни одной точки из носителей этих пучков.

Топологические образы этих тканей совпадают с тканями со свойством (RG) .

Локальные регулярные ткани делятся на 5 классов топологически эквивалентных тканей.

TISSUS TERNAIRES RÉGULIERS

(Résumé)

Un *quasi-groupe ternaire* (Q, F) (ou une *N-algèbre*) est un ensemble Q pour lequel on a défini l'opération ternaire

$$t \quad F(x, y, z) = xyz \quad (1)$$

telle que les équations (2) aient chacune une solution unique en Q , pour a, b, c, d fixés de façon quelconque en Q [7]. Si l'élément neutre $e \in Q$ avec la propriété (3) existe, (Q, F) s'appelle *loop ternaire*. La relation (4) définit l'*isotopie* entre les deux quasi-groupes. Si h est la transformation identique, nous avons une *isotopie principale*. Un *tissu ternaire* est conçu dans notre travail comme l'ensemble des quasi-groupes ternaires isotopes à un quasi-groupe ternaire donné.

À côté des quasi-groupes ternaires continus (dorsque Q est un intervalle réel et F une fonction continue), on considère aussi les *quasi-groupes ternaires locaux*, qui se définissent comme suit: soit $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ trois voisinages de l'axe réel: on demande que la fonction continue (1) soit définie pour $x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_2, z \in \Gamma_3$ et qu'il existe les voisinages $\Gamma'_1 \subset \Gamma_1, \Gamma'_2 \subset \Gamma_2, \Gamma'_3 \subset \Gamma_3, \Gamma'_4 \ni F(x_0, y_0, z_0)$ ($x_0 \in \Gamma_1, y_0 \in \Gamma_2, z_0 \in \Gamma_3$), tels que, pour $a \in \Gamma'_1, b \in \Gamma'_2, c \in \Gamma'_3, d \in \Gamma'_4$ les équations (2) aient chacune une solution unique en Γ_1, Γ_2 et Γ_3 respectivement. Si en particulier $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3, x_0 = y_0 = z_0 = e$, nous avons un *loop ternaire local*. Si la formule (4) n'est vérifiée que pour un voisinage, elle définit une isotopie locale. Un *tissu local* est l'ensemble des quasi-groupes ternaires locaux, localement isotopes à un quasi-groupe ternaire local.

Soit (Q, F) un quasi-groupe ternaire et z_0 un élément fixe de Q . L'opération binaire $(x, y) \rightarrow F(x, y, z_0)$ définit un quasi-groupe binaire sur Q , nommé une *section z de (Q, F)* . On définit de façon analogue les sections x et y .

Un quasi-groupe ternaire se nomme *régulier* s'il satisfait à la condition de fermeture de Reide-meister généralisée (RG) . Cette condition est invariante pour les isotopes; on peut donc définir un *tissu* comme régulier si un représentant est régulier.

On a démontré [8] que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un *loop ternaire* soit régulier est que toutes les sections x, y, z soient des isotopes principaux, chacun à un groupe.

L'auteur démontre que, si les sections x et y d'un groupe ternaire local, continûment différentiable, sont des isotopes principaux chacun avec un groupe, alors l'opération de ce loop s'exprime soit par la formule (28), soit par la formule (54), où k est une constante différente de -1 et ϕ (respectivement h) une fonction strictement monotone et continûment différentiable. Il résulte que les sections z sont de même des isotopes principaux avec un groupe.

Les formules (28) et (54) ont été trouvées aussi dans l'article [10], mais dans l'hypothèse que les trois systèmes de sections x, y, z sont des isotopes principaux avec un groupe chacun. Pour obtenir le résultat ci-dessus on résout l'équation fonctionnelle (38) dans la classe des fonctions strictement monotones et continûment différentiables pour f, Φ, p, q et pour $f_1 \neq$

const. La solution est donnée par les formules (47) ou elle est composée de fonctions linéaires. La même solution peut être trouvée dans des conditions plus générales, de continuité absolue, au lieu de dérivabilité.

Du résultat obtenu plus haut découlent une série de propriétés pour les tissus réguliers, dans l'hypothèse de dérivabilité continue :

Pour un tissu global les conditions (RG) et (O) sont équivalentes. Le tissu étant local, la condition O entraîne la condition (R, G) , mais non inversement.

Considérons dans l'espace euclidien tridimensionnel 4 faisceaux de plans et restreignons-nous à un domaine qui ne contient aucun point des supports de ces faisceaux. Les images topologiques de ces tissus coïncident avec les tissus à propriété (RG) .

Les tissus locaux réguliers se répartissent en 5 classes de tissus topologiquement équivalents.