CONSIDÉRATIONS DIRECTES SUR LA GÉNÉRATION DES NOEUDS (II)

par

GEORGE CĂLUGĂREANU

de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

Dans un travail antérieur [1] nous avons montré que chaque noeud N de S^3 peut être tracé sur une surface fermée S orientable et en position normale dans S^3, de manière que N divise S en deux domaines disjoints. On dit que S est en position normale dans S^3 si S est plongée dans S^3 de manière à diviser S^3 en deux domaines homéomorphes entre eux. Dans ce qui suit, nous voulons indiquer un procédé de construction des courbes fermées simples N qui divisent une telle surface S en deux domaines, en utilisant des systèmes de courbes simples qui ne divisent pas la surface S. Ce procédé résulte aussi d'un théorème de H. Zieschang [2, p. 38]; nous y établissons un équivalent de la seconde partie de ce théorème par des moyens directs.

1. *Courbes fermées simples séparatrices. Graphes complémentaires.* N étant un noeud de S^3, de type quelconque, il existe une surface fermée orientable S, en position normale dans S^3, sur laquelle N se trouve tracé de manière à diviser cette surface en deux domaines. Nous dirons que N est une courbe simple séparatrice sur S. Le type de N étant donné, le genre p de S ne pourra être inférieur à une valeur minima $p_0\,(N)$, que nous appelons *genre normal* de N. Supposons N tracé sur une surface S de genre $p_0(N)$ (coussin à p_0 trous). Nous pouvons prendre S sous une forme canonique, cette surface étant placée symétriquement par rapport à un plan Π qui coupe S suivant p_0+1 courbes fermées $C_0, C_1, \ldots, C_{p_0}$ (fig. 1). De plus, on suppose S placée symétriquement par rapport à un second plan Π' orthogonal à Π, et Π' coupant S suivant p_0+1 courbes fermées $C'_0, C'_1, \ldots, C'_{p_0}$.

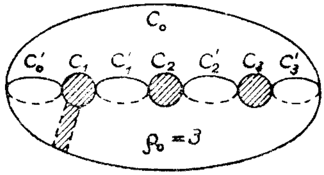

Fig. 1.

Dans ces conditions, N étant tracé sur S, N devra traverser effectivement chaque courbe C_i, $i=0, 1, \ldots p_0$, car, si une courbe C_i n'était pas traversée par N, le trou de S correspondant à C_i pourrait être comblé, donc supprimé, et le genre $p_0(N)$ pourrait être diminué, contrairement à sa définition. De même, on voit que N doit traverser chacune des courbes C'_i, $i=0, 1, \ldots, p_0$, sans quoi le genre $p_0(N)$ pourrait encore être diminué en pratiquant dans S une coupure (hachurée sur la fig. 1) par deux plans parallèles et rapprochés, orthogonaux à Π, de manière à supprimer un trou de S. Désignons par S_1 la partie de S qui se trouve au-dessus de Π, et par S_2 la partie située au-dessous de Π.

Le noeud N divise S en deux domaines disjoints. Soit Δ l'un de ces domaines (hachuré sur la fig.2, *a*). Le plan Π divise Δ en plusieurs domaines Δ_k situés sur S_1 ou S_2. La frontière de l'un de ces domaines est formée d'un certain nombre d'arcs appartenant à N, et d'un certain nombre d'arcs appartenant aux courbes C_i. Chacun des arcs appartenant à N joint un point d'une courbe C_i à un point appartenant à une C_j. Dans chaque domaine Δ_k choisissons un point intérieur P_k, et sur chaque arc appartenant à une courbe C_i, situé sur la frontière de Δ_k, choisissons un point Q_k^r. Joignons chaque Q_k^r à P_k par un arc dans Δ_k, deux de ces arcs ayant en commun le point P_k seulement. Les points Q_k^r seront les mêmes pour les domaines Δ_k appartenant aux deux moitiés S_1 et S_2 de S (fig. 2 ; *b, c*). Les arcs ainsi construits forment alors un graphe Γ intérieur à Δ (fig. 2 ; *d*), qui est un rétracte de déformation de Δ. Un graphe analogue peut être construit à l'intérieur du second domaine que N détermine sur S, et ces deux graphes seront appelés „graphes complémentaires de N sur S". Dans ce qui suit, il suffira de considérer l'un quelconque de ces graphes, que nous désignerons par Γ. Alors $S - \Gamma$ forme un domaine unique, dont le bord est une courbe fermée isotope (sur S) à N. Cette propriété n'est pas altérée si l'on supprime, sur Γ, chaque arc ayant une extrémité libre. De plus, si Γ possède plusieurs points de ramification (points en lesquels se rencontrent un nombre $\geqslant 3$ d'arcs simples appartenant à Γ), on peut déformer Γ de manière qu'il possède un seul point de ramification. A cet effet, choisissons un point de ramification de Γ, soit m (fig. 2 ; *d, e*). Si, à partir de m, on parcourt un arc de Γ qui mène à un autre point de ramification m', on pourra raccourcir successivement l'arc mm' sur S (et rallonger en conséquence les arcs qui aboutissent en m') de manière à amener m' en m. Cette opération ne change pas la classe d'isotopie du bord de Γ. En effectuant cette opération pour chacun des arcs qui partent de m, on obtient un graphe Γ à un seul point de ramification m (fig. 2 ; *e, f*). Γ se compose alors d'un certain nombre d'arcs tracés sur S, ayant leurs extrémités en m.

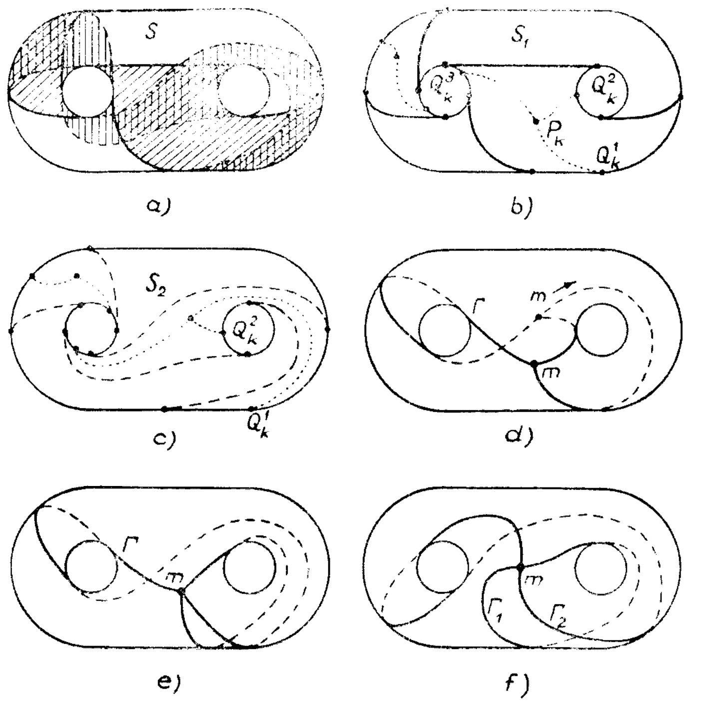

Fig. 2.

Si l'on remplace chacun de ces arcs par un ruban mince placé sur S, on obtient une surface de Seifert dont le bord est une courbe isotope à N, avec cette différence que notre surface est placée sur une surface fermée orientable en position normale dans S^3.

Si l'on a en vue d'obtenir un procédé de construction des noeuds de S^3, on peut donc se limiter à la formation des graphes Γ situés sur S, et formés de courbes simples sur S, concourantes en un point m et deux-à-deux disjointes en dehors de m. Nous appellerons *gerbe sur S* un tel assemblage de courbes.

2. *Gerbes admissibles*. Une gerbe sur S détermine un noeud unique si son bord ne se décompose pas en plusieurs courbes. Nous dirons donc qu'une gerbe Γ est *admissible* si son bord est une courbe unique. Cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une gerbe soit admissible.

Si une gerbe admissible Γ est formée de n courbes simples C_i passant par m et disjointes en dehors de m, il est clair que chaque courbe C_i prise séparément ne divise pas la surface S, puisque Γ ne doit pas diviser S. Mais cette condition nécessaire n'est pas suffisante pour que Γ soit admissible. Soit γ une courbe fermée simple qui est la frontière d'un petit disque sur S, contenant le point m à son intérieur. Choisissons un sens positif de parcours sur γ et marquons par les indices $1, 2, \ldots, 2n$ les points d'intersection des courbes C_i avec γ, l'ordre de succession de ces points sur γ coïncidant avec l'ordre naturel des indices. A chaque k de cette suite il correspond un indice $\varphi(k)$ si l'on convient que k et $\varphi(k)$ représentent les deux points d'intersection de la courbe C_k avec γ, pour $k = 1, 2, \ldots, 2n$. L'application φ est une permutation de la suite $1, 2, \ldots, 2n$ et se décompose en cycles binaires (à deux éléments), donc $\varphi\varphi(k) = k$. Marquons, au voisinage de γ, les bords de chaque C_k des signes $+$ et $-$, ces signes se suivant alternativement le long de γ (fig. 3). On voit alors que, en parcourant le bord de Γ dans un sens convenable, on sort de γ sur le bord $+$ de C_k et l'on rentre dans γ sur le bord $-$ de $C_{\varphi(k)}$, on ressort de γ sur le bord $+$ de $C_{\varphi(k)-1}$ et l'on rentre sur le bord $-$ de $C_{\varphi[\varphi(k)-1]}$, etc. En posant $i_0 = 1$, $i_1 = \varphi(i_0)$, $i_2 = i_1 - 1$, $i_3 = \varphi(i_2)$, $i_4 = i_3 - 1, \ldots, i_{2s+1} = \varphi(i_{2s})$, $i_{2s+2} = i_{2s+1} - 1, \ldots$ on voit que, si le bord de Γ est une courbe unique, la suite $i_1, i_2, \ldots, i_{4n}$ doit épuiser deux fois la suite $1, 2, \ldots, 2n$, les deux bords de chaque C_i devant être parcourus, chacun une seule fois. En posant $\psi(k) = k - 1$ pour $k > 1$, $\psi(1) = 2n$, la suite $i_1, i_2, \ldots, i_{4n}$ se décompose en

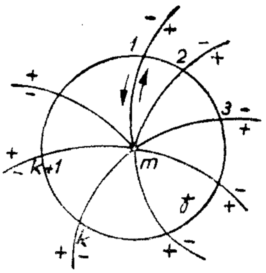

Fig. 3.

$$\begin{matrix} \varphi(1), & \varphi\psi\varphi(1), & \ldots & \varphi(\psi\varphi)^k(1) & \ldots & \varphi(\psi\varphi)^{2n-1}(1) \\ \psi\varphi(1), & (\psi\varphi)^2(1), & \ldots & (\psi\varphi)^{k+1}(1) & \ldots & (\psi\varphi)^{2n}(1). \end{matrix} \tag{1}$$

Cette suite doit contenir deux fois chaque nombre naturel de 1 à $2n$. On voit que la seconde ligne de (1) donne les points-sortie sur les bords $+$ des C_i, tandis que la première donne les points-rentrée sur les bords $-$. Chacune des deux lignes de (1) doit alors épuiser la suite $1, 2, \ldots, 2n$ (mod. $2n$). Or, puisque $\psi(k) = k - 1$, il suffit que l'une de ces lignes vérifie cette condition pour que l'autre la vérifie aussi. Eu regard à la seconde ligne de (1), cela signifie que la permutation $\psi\varphi$ doit former un cycle unique. Posons $P = \psi\varphi$, $\varphi = \psi^{-1}P$. Si $P = (a_1 a_2 \ldots a_{2n})$, les a_i étant des nombres naturels distincts, entre 1 et $2n$, on a

$$\varphi = \psi^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{2n} \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{2n} \\ a_2 + 1 & a_3 + 1 & \ldots & a_1 + 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit donc de trouver les cycles P à $2n$ éléments tels que la permutation φ correspondante se décompose en n cycles binaires. Donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi. Si φ se décompose en cycles binaires, soit

$$\begin{pmatrix} a_i & a_j \\ a_{i+1}+1 & a_{j+1}+1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

un de ces cycles. On a

$$a_i = a_{j+1} + 1 \text{ (mod. } 2n), \; a_j = a_{i+1} + 1 \text{ (mod. } 2n). \tag{3}$$

A chaque i entre 1 et $2n$ il doit correspondre un j entre 1 et $2n$ de manière que (3) soit vérifiée. Cette condition suffit pour que φ se décompose en cycles binaires. La détermination des permutations P jouissant de cette propriété peut être intéressante, mais l'application d'une autre opération, de caractère plus géométrique, nous dispense de poursuivre ce problème sur les permutations, dont les solutions sont assez nombreuses.

La construction d'une gerbe admissible Γ comporte deux étapes distinctes. La première consiste à grouper les points $1, 2, \ldots, 2n$ marqués sur γ en n couples $(k, \varphi(k))$, où φ vérifie la condition ci-dessus. Toute solution de ce problème détermine une *indicatrice admissible* pour la gerbe Γ. En joignant m aux points marqués $1, 2, \ldots, 2n$ sur γ par des rayons sur S, l'indicatrice fait correspondre à chaque rayon k un rayon conjugué $\varphi(k)$. La seconde étape consiste à joindre les extrémités des rayons conjugués par des arcs de courbes tracées sur S, de manière que ces n arcs soient deux-à-deux disjoints. La gerbe Γ ainsi construite sera admissible, car $S - \Gamma$ est alors un domaine unique.

Nous définirons une opération, appelée *opération* A, telle que, étant donnée une indicatrice admissible, l'application de A nous permet d'en déduire une autre indicatrice admissible ; de plus, toute indicatrice admissible (pour n fixé) peut être déduite de l'une d'elles par application répétée de l'opération A.

Soit Γ une gerbe admissible, et (i, j), $j = \varphi(i)$ un couple d'indices conjugués. Les extrémités des rayons i et j se trouvent donc joints par un arc simple sur S, situé à l'extérieur du disque γ.

Remplaçons le rayon $i - 1$ par un arc de courbe intérieur à γ qui joint le point $i - 1$ (sur γ) à un point P du rayon i (fig. 4 ; b) sur le bord $-$ de ce rayon, puis, en faisant glisser le point P sur la courbe qui joint i à j sur S, prolongeons l'arc $(i - 1, P)$ par une courbe sur S assez voisine de la précédente pour qu'elle ne rencontre aucune courbe de la gerbe. La point P arrivera sur le rayon j (fig. 4, c) et, finalement, sera ramené en m, le rayon $i - 1$ se trouvant déplacé entre les rayons j et $j + 1$. Il est clair que cette transformation de la gerbe Γ entraîne une déformation isotope du bord de Γ, et la nouvelle indicatrice ainsi obtenue est encore admissible. Telle est notre opération A. Elle peut être appliquée aussi en prenant P sur le bord $+$ du rayon i, ce qui permet de déplacer le rayon $i + 1$ entre $j - 1$ et j.

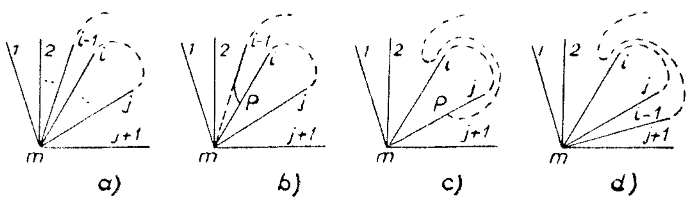

Fig. 4.

Remarquons que si Γ est admissibile, et i, j sont conjugués, il existe entre i et j un indice k dont le conjugué n'est pas entre i et j, sans quoi le bord de Γ ne formerait pas une courbe unique, et Γ ne serait admissible. Supposons, pour fixer les idées, $i < k < j$. Si $\varphi(k) < i$, déplaçons successivement les rayons $i - 1$, $i - 2, \dots, \varphi(k) + 1$ entre j et $j + 1$ par l'opération A. Il ne restera alors aucun rayon entre $\varphi(k)$ et i (fig. 5, *a*). Déplaçons ensuite les rayons $i + 1$, $i + 2, \dots,$ $k - 1$ sur le bord $+$ du rayon i, ce qui amène ces rayons entre $j - 1$ et j (fig. 5, *b*), et continuons avec les rayons situés entre k et j que nous déplacerons sur le bord $+$ de k, ce qui amène ces rayons entre $\varphi(k) - 1$ et $\varphi(k)$ (fig. 5, *c*). On obtient de cette manière un quadruplet k, $\varphi(k)$, i, j aucun rayon n'existant plus entre $\varphi(k)$ et i, ou entre i et k, ou entre k et j. Les rayons k, $\varphi(k)$ se trouvent joints par une courbe sur S, de même que les rayons i et j. D'ailleurs, notre hypothèse $\varphi(k) < i$ peut toujours être réalisée par un changement circulaire des indices $1, 2, \dots, 2n$. En laissant inchangé le quadruplet déjà formé, on pourra ensuite reprendre les opérations sur les rayons restants, ce quadruplet permettant le passage du point mobile P d'un côté ou de l'autre du quadruplet. On arrivera ainsi à la formation de plusieurs quadruplets et, si n était impair, on obtiendrait finalement un couple de rayons consécutifs conjugués, donc joints par une courbe sur S. Mais alors le bord de Γ serait composé de plusieurs courbes, et Γ ne serait pas admissible. Il en résulte que *n est nécessairement un nombre pair* si Γ est admissible.

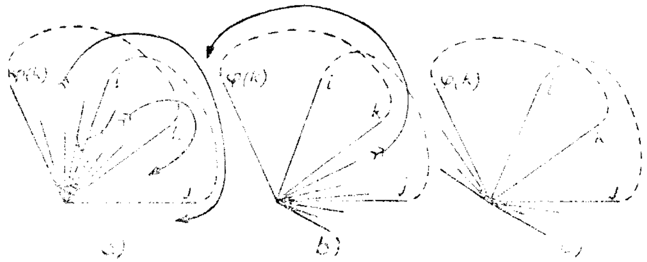

Fig. 5.

Ainsi, une gerbe admissible est formée d'un nombre pair de courbes C_i et, par application répétée de l'opération A, l'indicatrice peut être ramenée à la forme canonique d'une suite de quadruplets $(k, k + 2)$, $(k + 1, k + 3)$, les indices entre parenthèses étant conjugués. On peut aussi employer une autre forme canonique $(k, k + n)$, $k = 1, 2, \dots, n$, qui a l'avantage de posséder la symétrie de rotation autour de m. Dans ce cas, deux courbes quelconques C_i, C_j de la gerbe se traversent au point m.

Il en résulte que chaque courbe simple séparatrice sur S appartient à une classe d'homotopie de la forme $w_1 w_2 \dots w_{2q} w_1^{-1} w_2^{-1} \dots w_{2q}^{-1}$, $w_1, \dots, w_{2q}$ représentant des classes d'homotopie qui contiennent des courbes simples, et ces courbes pouvant être choisies de manière à passer par un point m de S, sans avoir deux-à-deux un autre point en commun. On peut encore caractériser ces courbes par $w_1 w_2 w_1^{-1} w_2^{-1} \dots w_{2q-1} w_{2q} w_{2q-1}^{-1} w_{2q}^{-1}$, ce qui nous ramène au théorème cité de H. Zieschang.

En ce qui concerne le choix de l'indicatrice, on voit que l'on peut toujours se contenter de l'indicatrice symétrique $(k, k + 2q)$, $k = 1, 2, \dots, 2q$, sans perte de généralité. Si S est de genre p, toute gerbe admissible à $2p$ courbes forme un système de coupures canoniques de S, $S - \Gamma$ étant homéomorphe à un disque.

Pour la construction effective des gerbes admissibles un second problème se pose : joindre les extrémités des rayons opposés de l'indicatrice par des arcs simples de S, deux-à-deux disjoints, et cela de toutes les manières possibles. La solution de ce problème est fournie par les résultats de M. Dehn [**3**] sur les rétrosections (Selbstverbindungen) d'une surface fermée de genre p avec un bord (la courbe γ). De même que le problème des classes d'homotopie de S qui contiennent des courbes simples, ce problème revient à la détermination des automorphismes du groupe fondamental $\pi_1(S)$. En représentant ce groupe à l'aide de $2p$ générateurs $g_1, g_2, \ldots, g_{2p}$, liés par la relation symétrique

$$g_1 g_1 \ldots g_{2p} g_1^{-1} g_2^{-1} \ldots g_{2p}^{-1} = 1$$

nous avons donné [4] les conditions nécessaires et suffisantes pour que le mot $h = g_{i_1}^{\alpha_1} g_{i_2}^{\alpha_2} \ldots g_{i_n}^{\alpha_n}$ représente une classe d'homotopie de S contenant des courbes simples. Ces conditions sont données par $n(n-1)/2$ inégalités de nature arithmétique concernant les suites d'entiers $i_1, i_2, \ldots, i_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Or, la méthode qui nous a conduit à ce résultat s'étend sans modification essentielle au problème de la détermination des automorphismes de $\pi_1(S)$; l'étude de ce dernier problème fera l'objet de notre prochain travail.

(Manuscrit reçu le 20 février 1967)

BIBLIOGRAPHIE

1. Călugăreanu G., *Considérations directes sur la génération des noeuds tridimensionnels.* Revue roum. de math.p.et appl., **10**, 389—403 (1965).
2. Zieschang H., *Algorithmen für einfache Kurven auf Flächen.* Mathematica Scandinavica, **17**, 17—40 (1965).
3. Dehn M., *Die Gruppe der Abbildungsklassen.* Acta math., **69**, 135—206 (1938).
4. Călugăreanu G., *Courbes fermées simples sur une surface fermée orientable.* Mathematica (Cluj) (en cours d'impression).

CONSIDERAŢII DIRECTE ASUPRA GENERĂRII NODURILOR (II)

(Rezumat)

Într-o lucrare anterioară [1] s-a arătat că orice nod N din S^3 poate fi trasat pe o suprafaţă închisă orientabilă S în poziţie normală în S^3, astfel incît N să o dividă în două domenii disjuncte. S este în poziţie normală în S^3 dacă S divide spaţiul S^3 în două domenii omeomorfe. Se dă aci un procedeu de construcţie a curbelor închise simple N care divid suprafaţa S în două domenii disjuncte, regăsindu-se astfel şi o parte a unei teoreme datorite lui H. Zieschang [2] prin mijloace mai directe. Se definesc grafele complementare unui nod trasat pe S ca retracte de deformare ale celor două domenii complementare lui N pe S. Se introduce apoi noţiunea de jerbă admisibilă, caracterizată prin indicatricea corespunzătoare. Analiza proprietăţilor acestor indicatrice conduce direct la procedeul de construcţie căutat, şi permite determinarea claselor de omotopie din π_1(S) care conţin curbe simple separatoare pe S.

НЕПОСРЕДСТВЕННЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О ГЕНЕРИРОВАНИИ УЗЛОВ (II)

(Резюме)

В предыдущей работе (1) показано, что любой узел N из S^3 можно начертить на ориентируемой закрытой поверхности S в нормальном положении в S^3 так, чтобы N разделял её на две непересекающиеся области. S находится в нормальном положении в S^3, если S разделяет пространство S^3 на две гомеоморфные области. Даётся способ построения простых закрытых кривых N, разделяющих поверхность S на две непересекающиеся области и, таким образом, снова находится и часть одной теоремы Г. Цишанга (2) более прямыми средствами. Определяются дополнительные графы одного узла, начерченного на S как деформационные ретракты двух дополнительных областей кривой N на S. Вводится затем понятие допустимого пучка, характеризующегося соответствующей индикатрисой. Анализ свойств этих индикатрис непосредственно приводит к искомому способу построения и позволяет определить классы гомотопии из (S), содержащие разделяющие простые кривые на S.