REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

TOME XIII, N° 6 1968

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE

La REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de : $ 14, — ; FF 69,— ; DM 56, —. Toute commande de l'étranger (fascicules ou abonnements) sera adressée à CARTIMEX, Boîte postale 134—135, Bucarest, Roumanie, ou à ses représentants à l'étranger.

Les manuscrits, les livres et les revues proposés en échange, ainsi que toute correspondance, seront envoyés à la rédaction : 47, str. M. Eminescu, Bucarest, Roumanie.

TOME XIII, N° 6
1968

REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

SOMMAIRE

	Page
AL. BREZULEANU, On the divisor of a quasi cross-section . . .	763
M. C. CHAKRABARTY, On points of absolute continuity. II . . .	771
DUMITRU GAȘPAR, Sur certaines familles d'opérateurs dans l'espace de Hilbert . . .	779
ROY M. GUNDERSEN, Simple wave solutions of symmetric hyperbolic systems . . .	789
I. M. MIHĂILĂ, Development of the trivariate frequency function in Gram-Charlier series. . . .	803
MIHAELA MIHĂILESCU, The differential constitutive law in the case of plane waves. . . .	815
CONSTANTIN NĂSTĂSESCU, Le centre d'une catégorie de Grothendieck . . .	821
L. NÉMETI, Eine Anwendung der Theorie der Graphen in der Nomographie . . .	827
L. NÉMETI, Zur Ablaufplanung im Falle mehrerer Maschinen derselben Art . . .	835
L. J. NICOLESCU, On a linear operator preserving increasing functions . . .	841
V. OPROIU, On the differential geometry of the tangent bundle	847
ION PĂVĂLOIU, Sur la méthode de Steffensen pour la résolution des équations opérationnelles non linéaires. . . .	857
И. Н. ПЕСИН, О двух проблемах С. Маркуса . . .	863
RADU ROȘCA, Sur un système fermé formé par des surfaces de courbure riemannienne nulle de l'espace elliptique . . .	867
K. S. SARMA and M. GOPALA KRISHNA MURTHY, Transient thermal stresses in an infinite orthotropic cylinder of rectangular section . . .	879
VALERIU ȘT. UDRESCU, A quadratic diophantine equation. . .	885
VALERIU ȘT. UDRESCU, An elementary proof of a conjecture of Ramanujan. . . .	887
ANDREI VERONA, Connexions généralisées . . .	891
BÉLA SZ.-NAGY, Products of operators of classes C_ρ . . .	897
COMPTES RENDUS . . .	901

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XIII, N° 6, p. 761—908
BUCAREST
1968

ZUR ABLAUFPLANUNG IM FALLE MEHRERER MASCHINEN DERSELBEN ART

VON

L. NÉMETI

(Cluj)

Im Anschluß an eine frühere Arbeit des Verfassers mit F. Radó wird ein neues Modell zur Behandlung desselben Falles des Reihenfolgeproblems in der Fertigung vorgeschlagen. Dieses Modell besitzt in manchen Fällen gewisse Vorzüge gegenüber dem früheren, insbesondere im Falle der Reihenfertigung.

1. Für das Problem der Ablaufplanung (Reihenfolgeproblem) im Falle mehrerer Maschinen derselben Art haben F. Radó und Verfasser ein Modell vorgeschlagen, sowie seine Lösungsmethoden untersucht [2], [5]. Im folgenden soll ein anderes Modell beschrieben werden, das manchmal gewisse Vorzüge gegenüber des ersteren aufweist.

In einer Bearbeitungswerkstatt seien t Maschinenarten (Typen) vorhanden; die Typen sind von 1 bis t nummeriert und wir bezeichnen mit $T = \{1, 2, \ldots, t\}$ die Menge dieser Typennummern (Maschinencodes). Von den einzelnen Typen gibt es mehrere, im wesentlichen identische Exemplare. Insgesamt gibt es m Maschinen ($m \geqslant t$); dieselben sind ebenfalls nummeriert und es sei $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ die Menge der Maschinennummern. An diesen Maschinen sind n Arbeitsgänge auszuführen, von 1 bis n nummeriert; wir setzen $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Jeder Arbeitsgang ist an einer bestimmten Maschinenart auszuführen: die Menge N besitzt eine Verteilung

$$N = \bigcup_{p \in T} N_p$$

wobei also N_p die auf der Type $p \in T$ auszuführenden Arbeitsgänge enthält. Der Arbeitsgang $i \in N_p$ kann auf einer beliebigen Maschine der Type p ausgeführt werden; einen Arbeitsgang, der auf einer bestimmten Maschine der entsprechenden Type durchgeführt wird, nennen wir eine *Variante*. Von jeder Variante weiß man also auf welcher Maschine sie ausgeführt wird, und welchem Arbeitsgang sie entspricht. Die Varianten sind von 1 bis v durchgehend nummeriert und wir schreiben $V = \{1, 2, \ldots, v\}$.

Die Menge V besitzt also zwei Verteilungen:

(1.1) $$V = \bigcup_{i \in N} V_i = \bigcup_{k \in M} W_k$$

Hierbei bedeuten

V_i : die Menge der Varianten, welche dem Arbeitsgang i entsprechen;

W_k : die Menge der Varianten, die auf der Maschine k ausgeführt werden können.

Diese beiden Verteilungen sind nicht ganz unabhängig voneinander: es gilt

(1.2) $$|V_i \cap W_k| \leqslant 1, \quad i \in N, \quad k \in M,$$

das heißt,

— kann Arbeitsgang i auf Maschine k ausgeführt werden, so enthält die Durchschnittsmenge $V_i \cap W_k$ ein einziges Element, gerade die entsprechende Variante;

— kann Arbeitsgang i nicht auf Maschine k ausgeführt werden, so ist obige Menge leer.

Das zu erstellende Fertigungsprogramm wird enthalten:

— für jeden Arbeitsgang i die Entscheidung bezüglich der zu verwendenden Maschine, d.h. es wird aus jeder Menge V_i genau ein Element ausgewählt:

— den Anfangszeitpunkt x_i des Arbeitsganges i.

Ein solches Programm wird den *Beschaffungs- und Lieferbedingungen*, den technologischen *Ordnungsbedingungen* und den *Nicht-Interferenzbedingungen* genügen müssen [1], [5].

Als zu minimierende Zielfunktion kann man z.B. die Dauer der gesamten Fertigungsperiode verwenden.

Das mathematische Modell des Problems wird damit:

(1.3) $$x_i \geqslant \tau_i, \quad i \in N$$

(1.4) $$x_i \leqslant \tau_i', \quad i \in N$$

(1.5) $$x_j - x_i \geqslant t_{ij}, \quad (i, j) \in H$$

(1.6) $$\bigvee_{h \in V_i} (x_i = y_h), \quad i \in N$$

(1.7) $$(y_l - y_h \geqslant t_h) \vee (y_h - y_l \geqslant t_l), \quad (h, l) \in K$$

(1.8) $$u \geqslant x_i + t_i, \quad i \in N$$

(1.9) $$f = u: \text{ Minimum}.$$

Hierbei sind:

t_{ij} und t_i die Durchführungsdauer der Arbeitsgänge (s. hierzu [4]),

τ_i und τ_i' die Beschaffungs- bzw. Liefertermine,

$H \subset N \times N$ die Menge der Arbeitsgangspaare, zwischen denen technologische Ordnungsbeziehungen vorgeschrieben sind,

$$K = \{(h, l) \mid h < l; \quad h, l \in W_k, \quad k \in M\} =$$
$$= \{(k, l) \mid h < l\} \cap [\bigcup_{k \in M} (W_k \times W_k)]$$

die Menge der Variantenpaare, die auf derselben Maschine durchgeführt werden können.

Die Beziehungen

(1.3) sind die Beschaffungsbedingungen,
(1.4) die Lieferbedingungen,
(1.5) die Ordnungsbedingungen,
(1.6) die Auswahlbedingungen der Varianten
(1.7) die Nicht-Interferenzbedingungen.

Die Bedingungen (1.3) ... (1.9) stellen eine lineare Planungsaufgabe mit logischen Bedingungen dar, für deren Lösung der Radósche Algorithmus [6], [7] verwendet werden mag.

Vorliegendes Modell weist gegenüber des früher vorgeschlagenen Vor- und Nachteile auf. Gibt es viele Exemplare aus einigen Typen, so enthalten die Disjunktionen (1.6) viele Glieder was natürlich den Umfang der Berechnungen erhöht.

Andererseits enthält das neue Modell keine strikte Ungleichungen, wie das andere Modell, was das Rechenprogramm wesentlich vereinfacht. Außerdem enthält die Lösung gleich auch die Verteilung der Arbeitsgänge auf die Maschinen. Bei Problemen der Reihenfertigung kann aus diesem Grunde einzig das neue Modell verwendet werden (diesbezügliche Untersuchungen werden wir demnächst veröffentlichen).

2. Der Radósche Lösungsalgorithmus führt bekanntlich auf eine Folge von gewöhnlichen Planungsaufgaben, Grundprobleme genannt. Ein Grundproblem P enthält alle Bedingungen ohne Disjunktionen des ursprünglichen Problems, sowie auch je ein Glied aus einem Teil der Disjunktionen. Wir wollen im folgenden die Form der Grundprobleme bestimmen. Wir bemerken hierzu, daß jede Disjunktion (1.6) durch eine Zahl $i \in N$ bestimmt (charakterisiert) ist. Für das Grundproblem P ist die Teilmenge $N^* \subset N$ gegeben, welche diejenigen Zahlen i enthält, die die in P verwendeten Disjunktionen (1.6) charakterisieren. Dann wurde für jeden Arbeitsgang $i \in N^*$ die zu verwendende Variante $h = h(i) = V_i$ bestimmt. Auf diese Weise bilden die ausgewählten Varianten die Teilmenge $V^* \subset V$. Man kennt dann für jeden Arbeitsgang $i \in N^*$ die zugehörige Variante $h = h(i) \in V^*$ und umgekehrt, für jede Variante $h \in V^*$ den zugehörigen Arbeitsgang $i = i(h) = N^*$. Zwischen den Elementen der Mengen N^* und V^* gibt es also eine umkehrbar eindeutige Zuordnung. Wir werden die Funktion $i(h)$ als gegeben annehmen (für das betrachtete Grundproblem; für andere Grundprobleme werden andere Funktionen $i(h)$ gegeben sein). Wir haben also

(2.1) $$x_{i(h)} = y_h, \quad h \in V^*$$

Andererseits ist jede Disjunktion (1.7) durch ein Zahlenpaar $(h, l) \in K$ charakterisiert. Unter diesen Disjunktionen ist nur ein Teil definiert, nämlich diejenigen Disjunktionen, bei denen sowohl h als auch l zu V^* gehören. Die definierten Disjunktionen (1.7) sind also durch die Zahlenpaare

$$(h, l) \in K^* = K \cap (V^* \times V^*) \tag{2.2}$$

charakterisiert.

Aus diesen Disjunktionen ist ein Teil in P verwendet worden. Hierzu sind die elementenfremden Teilmengen $K_1, K_2 \subset K^*$ gegeben. Bei den durch die Elemente von K_1 charakterisierten Disjunktionen wurde das erste Glied, bei den durch die Elemente von K_2 charakterisierten Disjunktionen das zweite Glied verwendet.

Im Problem P erscheinen somit Bedingungen wie

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} y_l - y_h \geqq t_h, & (h, l) \in K_1 \\ y_h - y_l \geqq t_l, & (h, l) \in K_2 \end{cases}$$

Indem wir anstelle der Unbekannten y_h mittels der Beziehung (2.1) die Unbekannten x_i substituieren, erhalten wir aus (a)

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} x_{i(l)} - x_{i(h)} \geqq t_h, & (h, l) \in K_1 \\ x_{i(h)} - x_{i(l)} \geqq t_l, & (h, l) \in K_2. \end{cases}$$

Die obenerwähnte Abbildung von V^* auf N^*

$$\varphi : V^* \to N^* \tag{2.3}$$

definiert eine (ebenfalls umkehrbar eindeutige) Abbildung des Raumes

$$\begin{gathered} V^* \times V^* \text{ auf } N^* \times N^* : \\ \psi = \varphi \times \varphi : \quad V^* \times V^* \to N^* \times N^*. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Auf diese Weise entsprechen den Mengen $K_1, K_2 \subset V^* \times V^*$ die Mengen

$$L_1 = \psi K_1, \quad L_2 = \psi K_2, \quad L_1, L_2 \subset N^* \times N^* \tag{2.5}$$

und die Beziehungen (b) transformieren sich in

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} x_j - x_i \geqq t_i, & (i, j) \in L_1 \\ x_i - x_j \geqq t_j, & (i, j) \in L_2. \end{cases}$$

Definieren wir noch

$$(i, j) \in L_2 \Leftrightarrow (j, i) \in \widetilde{L_2}, \tag{2.6}$$

so erhalten wir aus (c)

$$\text{(d)} \qquad x_j - x_i \geqq t_i, \quad (i, j) \in L = L_1 \cup \widetilde{L}_2.$$

Ein Grundproblem wird also die Form

$$\begin{cases} x_i \geqq \tau_i, & i \in N \\ x_i \leqq \tau'_i, & i \in N \\ x_j - x_i \geqq t'_{ij}, & (i, j) \in H \cup L \\ u = \max\limits_{i \in N} (x_i + t_i) : & \text{Minimum} \end{cases} \tag{2.7}$$

aufweisen, wobei

$$t'_{ij} = \begin{cases} t_{ij} & \text{für } (i, j) \in H \setminus L \\ \max\, (t_{ij}, t_i) & \text{für } (i, j) \in H \cap L \\ t_i & \text{für } (i, j) \in L \setminus H \end{cases} \tag{2.8}$$

gesetzt wurde.

Das ist aber das wohlbekannte Potentialproblem (siehe [8]) für welches es bereits ausgearbeitete Lösungsmethoden gibt [3], [8], [9].

3. Der Radósche Algorithmus enthält Vorschriften, wie man aus einem Grundproblem neue Grundprobleme ableitet. Hierbei gibt es noch eine ziemlich große Auswahlfreiheit in bezug auf die neu hinzunehmenden Disjunktionen. Um diese Freiheit einzuschränken und das Rechenvolumen zu verringern kann man praktische Empfehlungen, Richtlinien geben [6]. In folgendem sollen solche Empfehlungen gegeben werden. Wir werden zu allererst folgendes Prinzip annehmen: *es sei P ein Grundproblem, bei welchem nur Disjunktionen (1.6) verwendet wurden, mit der charakterisierenden Menge $N^* \subset N$; ist*

$$N \setminus N^* \neq \emptyset,$$

so wird Problem P durch eine noch nicht verwendete Disjunktion (1.6) erweitert.

Hierdurch teilt sich die Folge der Grundprobleme in zwei Teile: im ersten Teil werden ausschließlich Disjunktionen (1.6) verwendet, im zweiten Teil haben wir $N^* = N$, und es werden auch noch Disjunktionen (1.7) hinzugezogen.

Für die Wahl aus den Disjunktionen (1.6) gibt es keine Richtlinie. Wir bemerken, daß bei allen Grundproblemen aus dem ersten Teil, der Wert min $u = m$ derselbe ist.

Im übrigen kann man die Anzahl der Glieder in den Disjunktionen (1.6) merklich verringern. Wir betrachten zu diesem Behufe die Verteilung $N = \bigcup\limits_{p \in T} N_p$. Die Menge der Disjunktionen (1.6) verteilt sich ebenfalls auf die Teilmengen N_p.

Betrachten wir nun eine gegebene Maschinentype p und die betreffende Teilmenge N_p. Da ja die Nummerierung der Maschinen im Rahmen derselben Type willkürlich ist, wird man den ersten Arbeitsgang $i_1 \in N_p$ auf der Maschine Nr. *1* programmieren, den zweiten auf Maschine Nr. *1* oder *2*, usw. Hierdurch gibt man der ersten $(i = i_1)$ Disjunktion (1.6) ein einziges Glied, der zweiten Disjunktion zwei Glieder usw., bis man zur größten Anzahl (= Anzahl der Maschinen der Type p) von Gliedern gelangt ist.

Setzen wir nun voraus, daß wir uns bereits im zweiten Teil der Folge von Grundproblemen befinden. Es sei P ein bereits gelöstes Grundproblem und es soll durch Glieder einer noch nicht verwendeten Disjunktion (1.7) ergänzt werden. Bei der Bildung von P wurden diejenigen Disjunktionen (1.7) verwendet, die durch die Zahlenpaare $(h, l) \in \overline{K} = K_1 \cup K_2$ charakterisiert sind, und die definierten, aber noch nicht verwendeten Disjunktionen bilden die Menge $K^* \setminus \overline{K}$. Mit Hilfe der Abbildung ψ (2.4) erhalten wir

$$Q = \psi (K^* \setminus \overline{K}) \tag{3.1}$$

und die noch nicht verwendeten Disjunktionen sind – in den Unbekannten x_i ausgedrückt –

$$x_j - x_i \geqslant t_i \vee x_i - x_j \geqslant t_j, \quad (i, j) \in Q. \tag{3.2}$$

Um aus diesen diejenige Disjunktion (i', j') auszuwählen, die zur Ergänzung von P dienen soll, berechnen wir für jedes Element $(i, j) \in Q$ die Zahl λ_{ij} als „Maß der Nichterfüllung" der Disjunktion (i, j):

$$\lambda_{ij} = \min (t_i + x_i - x_j, \ t_j + x_j - x_i) > 0 \quad \text{(siehe [6])} \tag{3.3}$$

und für das gesuchte Zahlenpaar (i', j') wird gelten

$$\lambda_{i'j'} = \max_{(i,j) \in Q} \lambda_{ij}. \tag{3.4}$$

Eingegangen am 6. Juli 1967

Recheninstitut der Akademie
Zweigstelle Cluj

LITERATUR

1. L. Németi, *Das Reihenfolgeproblem in der Fertigungsprogrammierung und Linearplanung mit logischen Bedingungen*. Mathematica, Cluj, 1964, **6**, 87–99.
2. — *Bemerkungen zum Problem der Fertigungsprogrammierung*. Mathematica, Cluj, 1967, **9**, 129–140.
3. — *Über eine Anwendung der Theorie der Graphen in der Nomographie*, Rev. roum. math. pures et appl., 1968, **13**, 6, 827–833.
4. — *Asupra timpului de execuţie a unei lucrări la programarea în timp a fabricaţiei*. Unter Druck.
5. F. Radó, *Sur la programmation temporelle de la fabrication*. Mathematica, Cluj, 1966, **8**, 109–115.
6. F. Radó, *Programarea lineară cu condiţii logice*. Comunic. Acad. R.P.R., 1963, **13**, 1039–1042.
7. — *Un algorithme pour résoudre certains problèmes de la programmation mathématique*. Mathematica, Cluj, 1964, **16**, 105–116.
8. B. Roy, *Cheminement et connexité dans les graphes. Application aux problèmes d'ordonnancement*. METRA, Série spéciale, nr. 1–1962.
9. V. Peteanu, *Sur la compatibilité du problème central de l'ordonnancement*. Mathematica, Cluj, 1967, **9**, 141–146.

ON A LINEAR OPERATOR PRESERVING INCREASING FUNCTIONS

BY

L. J. NICOLESCU

An extension of the result contained in [1] to two variables is proved, involving the bidimensional monotony.

1. In a paper by M. Nicolescu and C. Foiaş, [1], the operator defined as follows is considered:

Let $H(r, r')$ be a positive function, continuous in $[0,1] \times [0,1]$ and such that

$$\int_0^r H(r, r')\, dr' = 1 \qquad (0 < r \leqslant 1)$$

For any $f \in C\ [0,1]$ denote by $Hf(r)$ the following function

$$Hf(r) = \begin{cases} f(0) \text{ if } r = 0 \\ \displaystyle\int_0^r H(r, r') f(r')\, dr', \text{ if } r \in (0,1] \end{cases}$$

In the mentioned paper it is proved that the mapping $f \to Hf$ is a linear and bounded operator of $C\ [0,1]$ and $\|H\| \leqslant 1$.

In the same paper the following result is obtained:

The operator $H : f \to \int_0^r H(r, r') f(r')\, dr'$ where $f \in C\ [0,1]$ and $\int_0^r H(r, r') = 1\ (0 < r \leqslant 1)$ preserves the increasing functions of $C\,[0, 1]$ if and only if

$$L(r, r') = \int_{r'}^r H(r, r'')\, dr''$$

defined in the triangle $0 \leqslant r' < r \leqslant 1$ is increasing with respect to r.