REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

TOME XIII, N° 6

1968

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE

La REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de: \$ 14, — ; FF 69,— ; DM 56, —. Toute commande de l'étranger (fascicules ou abonnements) sera adressée à CARTIMEX, Boîte postale 134—135 Bucarest, Roumanie, ou à ses représentants à l'étranger.
En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste ou chez votre facteur.

Les manuscrits, les livres et les revues proposés en échange, ainsi que toute correspondance, seront envoyés à la rédaction: 47, str. M. Eminescu, Bucarest, Roumanie.

TOME XIII, N° 7
1968

REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

SOMMAIRE

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XIII, N° 7, p. 909—1066,
BUCAREST
1968

DAS REIHENFOLGEPROBLEM IN DER FERTIGUNG MIT PUFFERBESTÄNDEN

VON

L. NÉMETI

(Cluj)

Es wird ein mathematisches Modell zur Behandlung des Reihenfolgeproblems (Ablaufplanung) für den Fall gegeben, daß vor den Arbeitsgängen Pufferbestände von Halbfabrikaten geschaffen wurden um Wartezeiten möglichst auszuschalten. Das Modell hat die Form einer linearen Planungsaufgabe mit logischen Bedingungen, deren sogenannte Grundprobleme gewöhnliche lineare Planungsaufgaben sind. Es werden auch Methoden zur Vereinfachung der Form dieser Grundprobleme angegeben.

1. Für das Reihenfolgeproblem (Ablaufplanung) haben F. Radó und Verfasser mehrere Modelle veröffentlicht [2]–[6]. Im folgenden soll ein neues Modell untersucht werden, dessen Problemstellung aus folgenden Überlegungen entstammt.

Die aufgrund der bisherigen Modelle erhaltenen Fertigungsprogramme enthalten im allgemeinen „Lücken", d.h. einige Bearbeitungsmaschinen weisen Wartezeiten auf. Eine solche Wartezeit tritt dann auf, wenn der auf der betrachteten Maschine zu erledigende Arbeitsgang einen technologischen Vorgänger aufweist, der — auf einer anderen Maschine in Ausführung begriffen — noch nicht fertig ist.

Man würde aber eine bessere Ausnützung des vorhandenen Maschinenparks erzielen, wenn man diese Wartezeiten — wenigstens bei den am meisten in Anspruch genommenen Maschinen — vermeiden könnte. Das ist durch Schaffung von Pufferbeständen vor einigen Maschinen möglich. Aus diesen verbraucht dann die betreffende Maschine, wenn sie ohne diese Bestände zu warten gezwungen wäre. Nachdem der technologische Vorgänger des ins Auge gefaßten Arbeitsganges durchgeführt wurde, wird der (teilweise) verbrauchte Pufferbestand wieder aufgefüllt.

Wir wollen die in den vorhergehenden Arbeiten verwendeten Beziehungen weiter beibehalten [4]. Zuerst wird der Fall betrachtet, bei wel-

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XIII, N° 7, p. 1009–1016, BUCAREST, 1968

chem aus jeder Maschinenart je ein Exemplar vorhanden ist. Die Menge der Maschinen (der Maschinencodes) bezeichnen wir mit $M = \{1, \ldots, m\}$, die der Arbeitsgänge mit $N = \{1, \ldots, n\}$ die Teilmenge N_k in der Verteilung

$$N = \bigcup_{k \in M} N_k$$

enthält die auf der Maschine k auszuführenden Arbeitsgänge, die Zahlenpaarmenge $H = \{(i, j)\} \subset N \times N$ enthält die Arbeitsgangspaare zwischen denen eine technologische Reihenfolgebeziehung vorgeschrieben ist, t_i ist die Dauer des Arbeitsganges $i \in N$, χ_i sein Anfangszeitpunkt, t_{ij}, $(i, j) \in H$ ist die Zeitspanne um welche der technologische Nachfolger j des Arbeitsganges i später als dieser angefangen werden kann.

Es sei $k \in M$ irgendeine Maschine (Code). Arbeitet sie ununterbrochen, so ist die Dauer dieser Funktionierungsperiode

$$\bar{t}_k = \sum_{i \in N_k} t_i .$$

Die Zahl

(1.1) $$\bar{t} = \max_{k \in M} \sum_{i \in N_k} t_i$$

stellt somit die Dauer der kürzestmöglichen Fertigungsperiode dar [1]). Diese kann nur erreicht werden, wenn die am meisten belasteten Maschinen ohne Wartezeiten arbeiten. Wir müssen die Größe der Pufferbestände ebenso bestimmen, daß diese Arbeitsdauer bei keiner Maschine überschritten wird. Da aber dieses Problem mehrere (unendlich viele) Lösungen besitzt, wird unser Problem in der *Bestimmung derjenigen Pufferbestände* bestehen, *welche die ungestörte Abwicklung der Arbeitsgänge und die Realisierung der Fertigungsperiode $\bar{t}$ sichern u.zw. so, daß der Gesamtwert dieser Bestände minimal sei.*

Für die Schaffung dieser Bestände benötigt man eine Übergangsperiode, weshalb diese Art von Fertigung i.A. nur bei Serienproduktion (periodische Fertigung) in Frage kommt.

2. Um das mathematische Modell dieses Problems zu konstruieren, führen wir die Größen s_i, $i \in N$ ein; diese stellen den Pufferbestand dar, der aus denjenigen Stücken besteht, welche aus der Durchführung des technologischen Vorgängers von i stammen und des Arbeitsganges i harren. Als Maßeinheit der Bestandsgröße werden wir die des Fertigungsloses betrachten.

Wir wiesen auf die in Arbeit [4] aufgezählten Bedingungen (Beschaffungs- und Lieferbedingungen, Ordnungsbedingungen, Nicht-Interferenzbedingungen) hin. Außer den Ordnungsbeziehungen bleiben alle anderen unverändert. An Stelle derselben treten zwei andere auf: die *Kontinuitätsbedingungen* und die *Periodenbedingungen.*

Die ersteren drücken die Tatsache aus, daß die Größe der Pufferbestände den ungestörten Ablauf der Arbeitsgänge sichern soll. Diese Bedingungen wollen wir der Einfachheit halber in zwei Extremfällen behandeln.

---

[1]) Siehe hierzu die Arbeit [1].

Wir betrachten ein Arbeitsgangspaar $(i, j) \in H$. Der *erste Fall* bezieht sich auf die Situation, bei welcher der Arbeitsgang j erst nach vollständiger Erledigung des Arbeitsganges i angefangen werden kann. Abbildung 1 stellt den zeitlichen Verlauf der Bestandsgrößen dar.

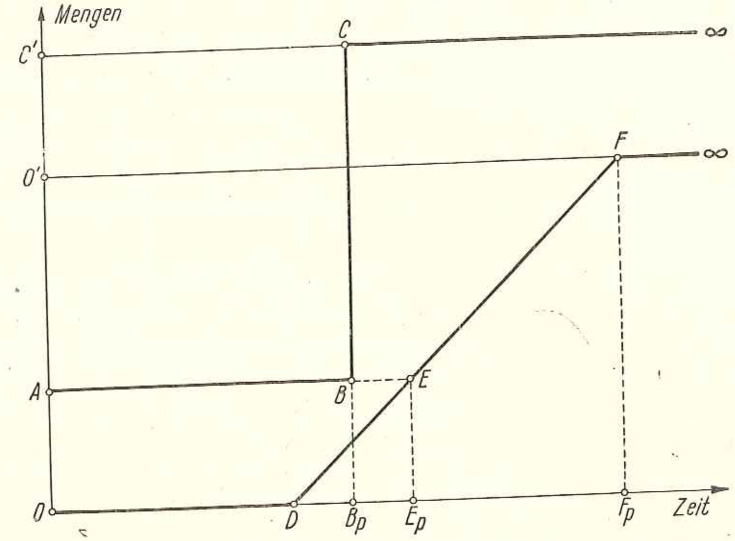

Abb. 1

Hierbei bedeuten
die Längen

$$\begin{aligned} OA &= s_j \\ AB &= x_i + \delta_i + t_i^0 + \gamma_i = x_i + \delta_i + t_i' \\ OO' &= BC = 1 \\ OD &= x_j + \delta_j \\ DF_p &= t_j^0 ; \end{aligned}$$

die Ordinaten der Linienzüge:

$ABC\infty$: die Menge der Erzeugnisse, bei welchen Arbeitsgang i durchgeführt wurde, und welche sich bereits bei der den Arbeitsgang j ausführenden Maschine befinden.

$ODF\infty$: den Bedarf an Erzeugnissen, die für den ungestörten Ablauf des Arbeitsganges j benötigt werden.

Wegen der Bedeutung der Bezeichnungen δ_i, t_i^0, γ_i usw. siehe Arbeit [5].

Die Kontinuitätsbedingung ist erfüllt (der ungestörte Ablauf des Arbeitsganges j ist gesichert), wenn wir

$$AB \leqslant AE$$

haben. Eine elementare Rechnung ergibt

$$x_i + \delta_i + t_i' \leqslant x_j + \delta_j + s_j t_j^0 .$$

Es leuchtet aber ein, daß, wenn $s_j \geqslant 1$ ist, es gar keine Restriktion bezüglich des Anfangs des Arbeitsganges j gibt. Wir erhalten somit

$$(2.1) \qquad (s_j t_j^0 + x_j - x_i \geqslant \delta_i + t_i' - \delta_j) \vee (s_j \geqslant 1), \quad (i, j) \in H.$$

Der *zweite Fall* (Abb. 2) bezieht sich auf die Situation, bei welcher nach der Bearbeitung jedes einzelnen Stückes aus dem Los (dieses soll aus vielen einzelnen Stücken bestehen) dasselbe sofort zur nächsten Maschine gebracht wird.

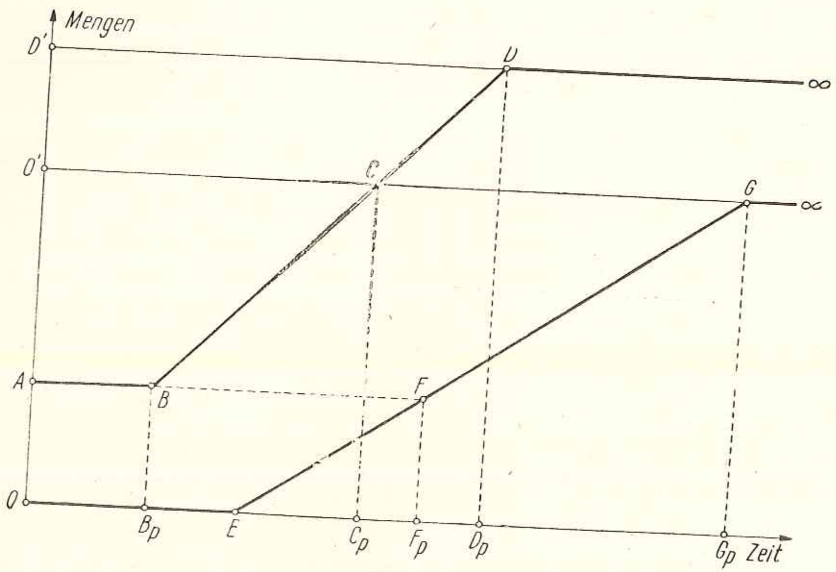

Abb. 2

Es bedeuten hierbei
die Längen:

$$OA = s_j$$
$$OO' = AD' = 1$$
$$AB = OB_p = x_i + \delta_i + \gamma_i$$
$$B_p D_p = t_i^0$$
$$OE = x_j + \delta_j$$
$$EG_p = t_j^0;$$

die Ordinaten der Linienzüge:
$ABD\infty$: dasselbe wie $ABC\infty$ in Abb. 1.
$OEG\infty$: dasselbe wie $ODF\infty$ in Abb. 1.
Die Kontinuitätsbedingung ist erfüllt, wenn wir

$$AB \leqslant AF \text{ und}$$
$$O'C \leqslant O'G$$

haben. Wir erhalten hieraus

$$(2.2) \qquad [(s_j t_j^0 + x_j - x_i \geqslant \delta_i + \gamma_i - \delta_j) \wedge$$
$$\wedge (s_j t_i^0 + x_j - x_i \geqslant \delta_i + t_i' - \delta_j - t_j^0)] \vee (s_j \geqslant 1), \qquad (i, j) \in H.$$

Diese beiden Formeln können in eine einzige vereinigt werden, wenn man für Fall 1

$$(2.3) \qquad \begin{cases} \bar{t}_{ij} = t_j^0 \\ \tau_{ij} = t_i' + \delta_i - \delta_j \end{cases}$$

schreibt und für Fall 2

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \bar{t}_{ij} = \max\,(t_i^0, t_j^0) \\ \tau_{ij} = \gamma_i + \max\,(\delta_i - \delta_j,\ \delta_i - \delta_j + t_i^0 - t_j^0). \end{cases}$$

Wir erhalten damit für die Kontinuitätsbedingung:

$$(2.5) \qquad (s_j \bar{t}_{ij} + x_j - x_i \geqslant \tau_{ij}) \vee (s_j \geqslant 1), \qquad (i, j) \in H.$$

Außerdem verlangen wir

$$(2.6) \qquad s_i \geqslant 0, \quad i \in N.$$

Was die Periodenbedingung betrifft, so lautet diese einfach

$$x_i + t_i - x_j \leqslant \bar{t}$$

oder

$$(2.7) \qquad x_j - x_i \geqslant t_i - \bar{t}, \qquad (i, j) \in \bar{J}.$$

Hierbei ist

$$(2.8) \qquad \bar{J} = \{0(i, j) \mid i, j \in N_k;\ k \in M\}$$

die Menge je zweier Arbeitsgänge, die auf derselben Maschine durchgeführt werden können.

Damit wird das Modell, welches die Fertigung mit Pufferbeständen beschreibt, folgende Form besitzen:

$$(2.9) \qquad \begin{cases} x_i \geqslant 0, & i \in N \\ s_i \geqslant 0, & i \in N \\ x_j - x_i \geqslant t_i - \bar{t}, & (i, j) \in \bar{J}. \\ x_j - x_i \geqslant t_i \vee x_i - x_j \geqslant t_j, & (i, j) \in J\text{ [2]} \\ s_j \bar{t}_{ij} + x_j - x_i \geqslant \bar{t}_{ij} \vee s_j \geqslant 1, & (i, j) \in H. \end{cases}$$

[2]) Die Menge J ist durch

$$J = \{(i, j) \mid i < j,\ i, j \in N_k;\ k \in M\}$$

definiert (siehe [4]).

Die Unbekannten x_i, s_i $(i \in N)$ haben diese Bedingungen so zu erfüllen, daß dabei die Zielfunktion

$$F = \sum_{i \in N} c_i s_i \qquad (c_i \geqslant 0, \text{ gegebene Zahlen}) \tag{2.10}$$

zum Minimum wird.

Dieses Modell stellt eine lineare Planungsaufgabe mit logischen Bedingungen dar, die mittels des Radóschen Algorithmusses [7], [8] gelöst werden kann. Die einzelnen Grundprobleme [7] sind aber keine sogenannten Potentialaufgaben mehr [9], da in den Bedingungen mehr als zwei Unbekannte auftreten(in der letzten Beziehung (2.9)). Dieser Schwierigkeit helfen wir durch die Substitution

$$z_{ij} = x_j + s_j \bar{t}_{ij}, \qquad (i, j) \in H \tag{2.11}$$

ab. Mit den Unbekannten x_i und z_{ij} wird das Modell zu

$$\begin{cases} x_i \geqslant 0, & i \in N \\ z_{ij} - x_j \geqslant 0, & (i, j) \in H \\ x_j - x_i \geqslant t_i - \bar{t}, & (i, j) \in \bar{J} \\ x_i - x_i \geqslant t_i \vee x_i - x_j \geqslant t_j, & (i, j) \in J \\ z_{ij} - x_i \geqslant \bar{t}_{ij} \vee z_{ij} - x_j \geqslant \bar{t}_{ij}, & (i, j) \in H \end{cases} \tag{2.12}$$

und die Zielfunktion

$$f = \sum_{(i, j) \in H} \mathrm{d}_i (z_{ij} - x_j) \qquad (\text{Minimum}). \tag{2.13}$$

Die Lösung dieses Problems durch den Radóschen Algorithmus weist nun keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr auf.

3. Für den Fall mehrerer Maschinen desselben Typs könnte man ähnlich vorgehen, unter Verwendung der in [4] dargelegten Betrachtungsweise. Es erhebt sich aber die Schwierigkeit, daß Formel (1.1) für die Fertigungsperiode t nicht mehr gilt. In der Tat, dieses Zeitintervall ist gleich der längsten Funktionsdauer unter allen Maschinen (und nicht Typen!) und man kennt die Verteilung der Arbeitsgänge auf die einzelnen Maschinen nicht im Voraus. Aus diesem Grunde muß die Dauer der Fertigungsperiode als Unbekannte u eingeführt werden.

Wir verwenden die Bezeichnungen der Arbeit [4]:

M: die Menge der Maschinen
T: die Menge der Typen
$N = \bigcup_{p \in T} N_p$: die Menge der Arbeitsgänge
$V = \bigcup_{i \in N} V_i = \bigcup_{k \in M} W_k$ die Menge der Varianten
$K = \{(h, l) \mid h < l;\ h, l \in W_k;\ k \in M\}$: die Menge der Variantenpaare, die auf derselben Maschine durchgeführt werden können.

Wir führen noch

$$\overline{K} = \{(h, l) \mid h, l \in W_k; \quad k \in M\} = \bigcup_{k \in M} (W_k \times W_k) \tag{3.1}$$

ein: die Menge je zweier Varianten, die auf derselben Maschine durchgeführt werden können. Die Beziehung zwischen den Mengen K und $\overline{K}$ ist ähnlich der, welche zwischen den Mengen J und $\bar{J}$ besteht.

Die Unbekannten u; x_i, $i \in N$; y_i, $i \in V$; z_{ij}, $(i, j) \in H$ haben somit folgende Bedingungen zu erfüllen:

$$\begin{cases} x_i \geqslant 0, & i \in N \\ z_{ij} - x_j \geqslant 0, & (i, j) \in H \\ y_h - y_l \geqslant t_l - u, & (h, l) \in \overline{K} \\ \bigvee_{h \in V_i} (x_i = y_h), & i \in N \\ z_{ij} - x_i \geqslant \tau_{ij} \vee z_{ij} - x_j \geqslant \bar{t}_{ij}, & (i, j) \in H \\ y_l - y_h \geqslant t_h \vee y_h - y_l \geqslant t_l, & (h, l) \in K. \end{cases} \tag{3.2}$$

Für die zum Minimum zu machende Zielfunktion hat man auch der Fertigungskapazität (u!) einen Wertkoeffizienten zuzuordnen. Dann wird die Zielfunktion

$$f = u + \sum_{(i, j) \in H} h_i (z_{ij} - x_j). \tag{3.3}$$

Um die Form eines sogenannten Grundproblems [7], [8] zu finden, verwenden wir die in [4] bereits eingeführten Begriffe N^*, V^*, φ, ψ, L und setzen

$$J^* = \psi \overline{K}. \tag{3.4}$$

Ein Grundproblem besteht dann aus den Beziehungen

$$\begin{cases} x_i \geqslant 0, & i \in N \\ z_{ij} - x_j \geqslant 0, & (i, j) \in H_1 \\ z_{ij} - x_j \geqslant \bar{t}_{ij}, & (i, j) \in H_2 \\ z_{ij} - x_i \geqslant \tau_{ij}, & (i, j) \in H_3 \\ z_{ij} - x_i \geqslant t_i - u, & (i, j) \in J^* \setminus H_3 \\ x_i - x_i \geqslant t'_{ij}, & (i, j) \in H \cup L, \end{cases} \tag{3.5}$$

mit der gegebenen Verteilung

$$H = H_1 \cup H_2 \cup H_3. \tag{3.6}$$

Die Zielfunktion ist unverändert (3.3)

Wegen der vorletzten Bedingung in (3.5) ist dieses Problem keine Potentialaufgabe mehr.

Um sie zu lösen, könnte man wie folgt vorgehen. Wir wollen zuerst (3.5) einfacher aufschreiben: die Unbekannten u; ξ_i, $i \in P = \{1, \ldots, p\}$ sollen die Bedingungen

$$\begin{cases} \xi_i \geqslant 0, & i \in P \\ \xi_j - \xi_i \geqslant a_{ij}, & (i, j) \in A \subset P \times P \\ \xi_j - \xi_i \geqslant b_i - u, & (i, j) \in B \subset P \times P \end{cases} \tag{3.7}$$

so befriedigen, daß dabei die Zielfunktion

$$\Phi = u + \sum_{(i,j)\in C} c_{ij}(\xi_j - \xi_i) \tag{3.8}$$

zu Minimum wird. Die Menge P, wie auch A, B, $C \subset P \times P$ und die reellen Zahlen a_{ij}, b_i, c_{ij} sind gegeben.

Man setzt zuerst

$$u_0 = \max\ b_i \tag{3.9}$$

in (3.7) ein, und untersucht, ob das System widerspruchsfrei sei (siehe hierzu [9]). Ist das nicht der Fall, so setzt man

$$u_1 = u_0 + \varepsilon,$$

wobei ε eine entsprechend gewählte kleine positive Zahl ist, und untersucht das System wieder auf Verträglichkeit. Nehmen wir an, daß die Verträglichkeit zuerst bei $u = \bar{u}$ erreicht wurde. Es ist sofort zu sehen, daß die Widerspruchsfreiheit dann für jeden Wert $u \geqslant \bar{u}$ besteht. Vom Werte $u = \bar{u}$ an bestimmt man auch die Lösung von (3.7), (3.8) (siehe hierzu [9]), berechnet die Werte $\Phi = \Phi(u)$ (3.8) und setzt weiter $u_{i+1} = u_i + \varepsilon$ fort, bis man $\Phi = \min\ \Phi(u)$ erreicht hat. Durch diese Näherungsmethode kann man, nimmt man nur für ε genügend kleine Werte an, der exakten Lösung beliebig nahe kommen. Wir bemerken noch, daß in unserem Institut Forschungen stattfinden um diese Methode zu verbessern bzw. sie durch einen eleganteren, weniger rechenaufwändigen Algorithmus zu ersetzen.

Eingegangen am 30. Oktober 1967

Recheninstitut der Akademie Zweigstelle Cluj

LITERATUR

1. R. Cruon, Ph. Hervé, *Quelques résultats relatifs à une structure algébrique et son application au problème central de l'ordonnancement.* Rev. Fr. Rech. Op., 1965, **9**, 3–20.
2. L. Németi, *Das Reihenfolgeproblem in der Fertigungsprogrammierung und Linearplanung mit logischen Bedingungen.* Mathematica (Cluj), 1964, **6**, 87–99.
3. — *Bemerkungen zum Problem der Fertigungsprogrammierung.* Mathematica (Cluj), 1967, **9**, 129–140.
4. — *Zur Ablaufplanung im Falle mehrerer Maschinen derselben Art.* Mathematica (Cluj), unter Druck.
5. — *Asupra timpului de execuție a unei lucrări de programarea în timp a fabricației.* Unter Druck.
6. L. Németi, F. Radó, *Sur la porgrammation temporelle de la fabrication.* Mathmatica (Cluj), 1966, **8**, 109–115.
7. F. Radó, *Programare liniară cu condiții logice.* Com. Acad. R.P.R., 1963, **13**, 1039–1942.
8. — *Un algorithme pour résoudre certains problèmes de programmation mathématique.* Mathematica (Cluj), 1964, **6**, 105–116.
9. B. Roy, *Cheminement et connexité dans les graphes. Application aux problèmes d'ordonnancement.* Metra, série spéciale, 1962, *1*.

REMARQUES SUR UN THÉORÈME DE CAUCHY RELATIF AUX SÉRIES À TERMES CONSTANTS, NON-NÉGATIFS ET NON-CROISSANTS

PAR

TIBERIU POPOVICIU

(Cluj)

On établit des conditions dans lesquelles, de la convergence, respectivement de la divergence de la série (4), résulte celle de la série (1). Les suites (u_n), (c_n) sont soumises à certaines restrictions de non-négativité ou de monotonie.

1. A. L. Cauchy a démontré [2] que si la suite $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ est non-négative et non-croissante, les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n u_{2^n} \tag{2}$$

sont toujours de la même nature (toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).

O. Schlömilch a généralisé [6] cette propriété de la manière suivante : Si la suite de nombres entiers $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ vérifie les propriétés

$$g_n > g_{n-1} \geqq 0, \quad g_{n+1} - g_n \leqq M(g_n - g_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

où M est un nombre positif, les séries (1) et

$$\sum_{n=0}^{\infty} (g_{n+1} - g_n) u_{g_n} \tag{3}$$

sont de la même nature, quelle que soit la suite (u_n) non-négative et non-croissante. J. C. Kluyver a encore précisé ce résultat [3].

Dans la suite, en complétant ces résultats, nous nous proposons de trouver des conditions suffisantes et nécessaires que doit vérifier la suite