REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

TOME XIII, N° 6 1968

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE

La REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de : \$ 14, — ; FF 69,— ; DM 56, —. Toute commande de l'étranger (fascicules ou abonnements) sera adressée à CARTIMEX, Boîte postale 134—135, Bucarest, Roumanie, ou à ses représentants à l'étranger.

Les manuscrits, les livres et les revues proposés en échange, ainsi que toute correspondance, seront envoyés à la rédaction : 47, str. M. Eminescu, Bucarest, Roumanie.

TOME XIII, N° 6
1968

REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

SOMMAIRE

	Page
AL. BREZULEANU, On the divisor of a quasi cross-section	763
M. C. CHAKRABARTY, On points of absolute continuity. II	771
DUMITRU GAŞPAR, Sur certaines familles d'opérateurs dans l'espace de Hilbert	779
ROY M. GUNDERSEN, Simple wave solutions of symmetric hyperbolic systems	789
I. M. MIHĂILĂ, Development of the trivariate frequency function in Gram-Charlier series	803
MIHAELA MIHĂILESCU, The differential constitutive law in the case of plane waves	815
CONSTANTIN NĂSTĂSESCU, Le centre d'une catégorie de Grothendieck	821
L. NÉMETI, Eine Anwendung der Theorie der Graphen in der Nomographie	827
L. NÉMETI, Zur Ablaufplanung im Falle mehrerer Maschinen derselben Art	835
L. J. NICOLESCU, On a linear operator preserving increasing functions	841
V. OPROIU, On the differential geometry of the tangent bundle	847
ION PĂVĂLOIU, Sur la méthode de Steffensen pour la résolution des équations opérationnelles non linéaires	857
И. Н. ПЕСИН, О двух проблемах С. Маркуса	863
RADU ROŞCA, Sur un système fermé formé par des surfaces de courbure riemannienne nulle de l'espace elliptique	867
K. S. SARMA and M. GOPALA KRISHNA MURTHY, Transient thermal stresses in an infinite orthotropic cylinder of rectangular section	879
VALERIU ŞT. UDRESCU, A quadratic diophantine equation	885
VALERIU ŞT. UDRESCU, An elementary proof of a conjecture of Ramanujan	887
ANDREI VERONA, Connexions généralisées	891
BÉLA SZ.-NAGY, Products of operators of classes C_ρ	897
COMPTES RENDUS	901

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XIII, N° 6, p. 761—908
BUCAREST
1968

EINE ANWENDUNG DER THEORIE DER GRAPHEN IN DER NOMOGRAPHIE

VON

L. NÉMETI

(Cluj)

In einer früheren Arbeit hat G. Aumann ein Problem gestellt und gelöst, das für die Fragen der approximativen Nomographie von Bedeutung ist. In vorliegender Arbeit wird eine andere Lösungsmethode desselben Problems vorgeschlagen, welche einerseits gewisse, in der Aumannschen Arbeit nur nebenbei erwähnte Seiten des Problems näher beleuchtet und die anderseits bedeutende Rechenvorteile gegenüber des Aumannschen Verfahrens aufweist.

1. G. Aumann hat in einer Arbeit [1] folgendes Problem behandelt, das für die Fragen der approximativen Nomographie bedeutsam ist: es sei die reelle Matrix $A = (a_{ij})$, der Ordnung n^2 gegeben (wobei die Elemente der Hauptdiagonale sämtlich verschwinden). Es sind die Werte der Unbekannten s und x_i, $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ gesucht, welche die Bedingungen

$$x_j - x_i + s \geqslant a_{ij}, \quad i, j \in N \tag{1.1}$$

so befriedigen, daß der Wert von s minimal sei. Wir bezeichnen diesen Wert mit $\bar{s}$.

In vorliegender Arbeit schlagen wir eine Methode zur Lösung dieses Problems vor, welche wohl weniger Rechenarbeit erfordert als die von Aumann angegebene.

Im ersten Abschnitt der Arbeit zeigen wir die Lösungsmethode, im zweiten werden die notwendigen Beweise gegeben, im letzten Abschnitt wird das Verfahren auf ein Zahlenbeispiel angewendet.

Es sei $B = (b_{ij})$ eine Matrix mp-ter Ordnung und $C = (c_{ij})$ eine pn-ter Ordnung. Wir nennen die Matrix $D = (d_{ij})$ mn-ter Ordnung das *CH-Produkt** von B und C

$$D = B * C \tag{1.2}$$

* R. Cruon und Ph. Hervé [3] haben diese Operation eingeführt.

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XIII, N° 6, p. 827–833, BUCAREST, 1968

deren Elemente durch

$$d_{ij} = \max_{\alpha=1,2,\ldots,p} (b_{i\alpha} + c_{\alpha j}) \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{1.3}$$

definiert sind. $\qquad j = 1, 2, \ldots, n$

Mit Hilfe dieser Formel kann man auch die CH-Potenzen einer quadratischen Matrix A definieren: $A^{*(2)} = (a^{*(2)}_{ij})$, $A^{*(3)} = (a^{*(3)}_{ij})$ usw.

Von der gegebenen Matrix A (1.1) bilden wir die ersten CH-Potenzen und bezeichnen

$$\lambda_1 = \max_{i \in N} a_{ii},\ \lambda_2 = \max_{i \in N} a^{*(2)}_{ii}, \ldots, \lambda_n = \max_{i \in N} a^{*(n)}_{ii} \tag{1.4}$$

Wir behaupten den

Satz 1. *Der kleinstmögliche Wert $\bar{s}$ der Unbekannten s im Ungleichungssystem (1.1) ist durch*

$$\bar{s} = \max\left(\lambda_1, \frac{\lambda_2}{2}, \ldots, \frac{\lambda_n}{n}\right) \tag{1.5}$$

gegeben.

Um die Werte der Unbekannten x_i, $i \in N$ zu finden, setzen wir den Wert $\bar{s}$ in (1.1) ein und erhalten dadurch die Bedingungen

$$x_j - x_i \geqslant b_{ij},\ i,\ j \in N, \tag{1.6}$$

mit

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - \bar{s}, & \text{für } i \neq j \\ 0, & \text{für } i = j. \end{cases} \tag{1.7}$$

Es gilt

Satz 2. *Das System ist verträglich und hat unendlich viele Lösungen.*

Wir gehen von einem beliebigen Vektor (Zeilenmatrix) $X^0 = \{x_i^{(0)} \mid i \in N\}$ aus und bestimmen der Reihe nach die Vektoren $X^k = \{x_i^{(k)} \mid i \in N\}$, wobei die Matrix $B = (b_{ij})$ verwendet wird:

$$\begin{cases} X^1 = X^0 * B \\ X^2 = X^1 * B \\ \ldots \end{cases} \tag{1.8}$$

oder explizit aufgeschrieben

$$x_i^{(r+1)} = \max_{j \in N} (x_j^{(r)} + b_{ji}) \quad i \in N,\ r = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.9}$$

Wir haben den

Satz 3. *Es gibt eine natürliche Zahl $p \leqslant n - 1$ für welche*

$$X^p = X^{p+1} \tag{1.10}$$

gilt. Der Vektor $X = X^p$ stellt eine Lösung des Systems (1.6) dar (V. Peteanu [4]).

Dieser, durch das iterative Verfahren (1.8) bzw. (1.9) erhaltene Vektor X ist, mitsamt dem Wert $\bar{s}$, offenbar zugleich die Lösung des Systems (1.1).

Die Berechnung der Unbekannten x_i kann durch eine gewisse Abänderung des Verfahrens (1.9) abgekürzt werden (Anwendung des Seidelschen Prinzips):

Wir berechnen die Vektoren

$$\begin{cases} Y^1 = X^0 \circ B \\ Y^2 = Y^1 \circ B \\ \ldots \end{cases} \tag{1.11}$$

Hierbei erhält man die Komponenten $y_i^{(r)}$ von Y^r durch

$$y_i^{(r)} = \max\,[\max_{s=1,\ldots,i-1} (y_s^{(r)} + b_{si}), \max_{t=i,\ldots,n} (y_t + b_{ti})] \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.12}$$

(für $i = 1$ existiert nur das zweite Maximum in der Klammer). Mit anderen Worten, bei der Berechnung einer Komponente der r-ten Iteration verwendet man die bereits berechneten Komponenten derselben. Wir bemerken, daß die Entstehung des Vektors Y^r aus Y^{r-1} von der verwendeten Reihenfolge der Berechnung der Komponenten abhängt. Das Symbol $\circ$ in (1.11) ist deshalb keine Operation, es bezeichnet nur eine Rechenvorschrift. Jedenfalls erhält man nach $q \leqslant n - 1$ Schritten $(q \leqslant p)$

$$X = Y^q = Y^{q+1}. \tag{1.13}$$

Da der Ausgangsvektor X^0 beliebig war, stellt der durch (1.10) bzw. (1.13) definierte Vektor die allgemeine Lösung des Systems (1.6) dar.

2. Zunächst ist es klar, daß das System (1.1) verträglich ist. Sind die x_i nämlich beliebige Zahlen, so werden alle Bedingungen in (1.1) befriedigt, nimmt man nur für s einen hinreichend großen Wert an.

Um Satz 1 zu beweisen, ordnen wir dem System (1.1) das vollständige und symmetrische Graph $G = (N, N \times N)$ zu. Jeder Unbekannten x_i entspricht der Knotenpunkt i des Graphen und jeder Ungleichung (i, j) aus dem System (1.1) die gerichtete Kante (Bogen) (i, j) in G. Dem Bogen $(i, j) \in N \times N$ wird die „Länge" $a_{ij} - s$ zugeordnet.

Es ist bekannt, daß das System (1.1) dann und nur dann verträglich ist, wenn es in dem zugeordneten Graphen G keine Kreisbahn mit (strikt) positiver Länge gibt (R. Roy [2], [5]).

Wir haben also sämtliche Kreisbahnen zu untersuchen. Der kleinste Wert von s, bei welchem obige Bedingung noch erfüllt ist, ist eben $\bar{s}$. Wir nennen eine Kreisbahn elementar, wenn sie die Knotenpunkte, durch welche sie führt, nur einmal enthält. Eine nicht-elementare Kreisbahn kann in elementare (ihre Komponente) aufgeteilt werden und ihre Länge ist die Summe der Längen ihrer Komponenten. In einem endlichen Graphen gibt es offenbar nur eine endliche Anzahl von elementaren Kreisbahnen. Bezeichnen wir mit $L_r(s)$ das Maximum der Längen aller elementaren Kreisbahnen r-ter Ordnung (die r Bögen enthalten), und mit

$$M(s) = \max_{r=1,\ldots,n} L_r(s) \tag{2.1}$$

(in einem Graphen mit n Knotenpunkten gibt es elementare Kreisbahnen höchstens n-ter Ordnung), so lautet die Bedingung für die Verträglichkeit des Systems (1.1)

$$M(s) \leqslant 0. \tag{2.2}$$

Wenn nämlich alle elementaren Kreisbahnen negative Längen besitzen, so haben alle Kreisbahnen diese Eigenschaft.

Da $M(s)$ eine stetige nicht-zunehmende Funktion von s ist, so haben wir

$$M(\bar{s}) = 0 \tag{2.3}$$

Wir führen jetzt das Graph Γ ein, welches dieselbe topologische Struktur wie G besitzt, nur soll in Γ der Bogen (i, j) die Länge a_{ij} haben (jeder Knotenpunkt i besitzt in Γ eine Schleife der Länge a_{ii}). Die größte Länge aller Kreisbahnen der Ordnung r sei hier mit Λ_r bezeichnet. Offenbar haben wir

$$L_r(s) = \Lambda_r - rs. \tag{2.4}$$

Infolgedessen erhalten wir aus der Bedingung (2.2)

$$L_r(s) \lesssim 0, \quad r = 1, \ldots, n \tag{2.5}$$

und für $\bar{s}$ die Formel

$$\bar{s} = \max\left(\Lambda_1, \frac{\Lambda_2}{2}, \ldots, \frac{\Lambda_n}{n}\right). \tag{2.6}$$

Hier müssen wir noch begründen, warum wir die Vergleiche nur bis $r = n$ durchführen, da doch in Λ_r auch die Länge nichtelementarer Kreisbahnen r-ter Ordnung eingeht (die Kreisbahnlängen in Γ sind nicht mehr negativ). Sei γ eine Kreisbahn von der Länge l, soll γ die Komponenten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ besitzen. Die elementare Kreisbahn γ_α der Ordnung r_α hat die Länge l_α. Wir haben dann

$$r = \sum_{\alpha=1}^{k} r_\alpha, \quad l = \sum_{\alpha=1}^{k} l_\alpha.$$

Die Bedingung (2.5) lautet also für γ:

$$s \geqslant \frac{\Sigma l_\alpha}{\Sigma r_\alpha} = \frac{\Sigma r_\alpha \dfrac{l_\alpha}{r_\alpha}}{\Sigma r_\alpha}, \tag{*}$$

Wenn aber

$$s \geqslant \frac{l_\alpha}{r_\alpha}, \quad \alpha = 1, \ldots, k$$

befriedigt ist, so ist die Bedingung (*) offenbar auch erfüllt. Infolgedessen genügt es uns auf Elementarbahnen zu beschränken, also wird in (2.6) der Vergleich nur bis $r = n$ vorgenommen. Formel (2.6) ist also richtig.

Wir wenden uns jetzt den CH-Potenzen der Matrix $A = (a_{ij})$ des Graphen Γ zu. Die Zahl

$$a_{ij}^{*(2)} = \max_{\alpha \in N} (a_{i\alpha} + a_{\alpha j})$$

gibt die größte Länge aller Bahnen höchstens zweiter Ordnung vom Punkte i zum Punkt j an. Entsprechend ist die in (1.4) definierte

Zahl λ_r die größte Länge aller Kreisbahnen höchstens r-ter Ordnung in Γ. Es ist nun leicht einzusehen, daß die Formeln (1.5) und (2.6) äquivalent sind.

Es ist zunächst klar, daß

$$\Lambda_k \geqslant \lambda_k \tag{a}$$

$$\Lambda_{k+1} \geqslant \Lambda_k \tag{b}$$

$$\Lambda_1 = \lambda_1 \tag{c}$$

ist.

Ebenso leuchtet es ein, daß die Beziehung

$$\Lambda_k > \lambda_k \Rightarrow \Lambda_k = \Lambda_{k-1} \tag{d}$$

gilt. Wir setzen

$$\begin{cases} \tilde{s}_k = \max\left(\Lambda_1, \dfrac{\Lambda_2}{2}, \ldots, \dfrac{\Lambda_k}{k}\right) \\ \bar{s}_k = \max\left(\lambda_1, \dfrac{\lambda_2}{2}, \ldots, \dfrac{\lambda_k}{k}\right) \end{cases} \tag{e}$$

und nehmen an, daß

$$\tilde{s}_k = \bar{s}_k = \sigma \tag{f}$$

sei.

Dann ist

$$\begin{cases} \tilde{s}_{k+1} = \max\left(\sigma, \dfrac{\Lambda_{k+1}}{k+1}\right) \\ \bar{s}_{k+1} = \max\left(\sigma, \dfrac{\lambda_{k+1}}{k+1}\right). \end{cases} \tag{g}$$

Es soll gezeigt werden, daß dann auch

$$\tilde{s}_{k+1} = \bar{s}_{k+1} \tag{h}$$

gilt, womit Satz 1 bewiesen sein wird.

Ist zunächst $\Lambda_{k+1} = \lambda_{k+1}$, so ist (h) offenbar gültig. Haben wir $\Lambda_{k+1} > \lambda_{k+1}$, so werden wir zwei Fälle unterscheiden:

α) $\sigma \geqslant \dfrac{\Lambda_{k+1}}{k+1}$. Hieraus folgt sofort (h).

β) $\sigma < \dfrac{\Lambda_{k+1}}{k+1}$. Dieser Fall ist unmöglich. In der Tat ist dann $\Lambda_{k+1} = \Lambda_k$ (siehe (d)), also

$$\sigma < \frac{\Lambda_k}{k+1} < \frac{\Lambda_k}{k}.$$

Diese Beziehung ist aber mit Formel (e) in Widerspruch.

Satz 2 folgt aus der obenerwähnten Royschen Bedingung, da für $s=\bar{s}$ keine Kreisbahn in G eine positive Länge besitzen wird.

Wir verweisen ferner auf die erwähnte Arbeit von Peteanu [4], in welcher eine Lösungsmethode für Probleme der Gestalt (1.6) angegeben wird, die mit der in Satz 3 gezeigten identisch ist.

3. Um die Rechengeschwindigkeit der Methode zu illustrieren, betrachten wir folgendes Zahlenbeispiel. Die Matrix A sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Durch fünfmalige Iteration erhalten wir

$$\bar{s} = \max\left(2, \frac{6}{2}, \frac{8}{3}, \frac{12}{4}, \frac{14}{5}\right) = 3.$$

Setzt man diesen Wert ins System (1.1) ein, so erhält man (1.6), das hier aus 20 Ungleichungen für die 5 Unbekannten besteht. Um eine Lösung zu finden, wenden wir Formel (1.9) an; es wird

$$\begin{aligned}
x_1^{r+1} &= \max\,(x_1^r, \quad x_2^r - 5,\ x_3^r - 2,\ x_4^r - 3,\ x_5^r - 1)\\
x_2^{r+1} &= \max\,(x_1^r - 4,\ x_2^r, \quad x_3^r - 2,\ x_4^r - 7,\ x_5^r - 5)\\
x_3^{r+1} &= \max\,(x_1^r, \quad x_2^r - 2,\ x_3^r, \quad x_4^r + 1,\ x_5^r)\\
x_4^{r+1} &= \max\,(x_1^r - 3,\ x_2^r, \quad x_3^r - 1,\ x_4^r, \quad x_5^r - 6)\\
x_5^{r+1} &= \max\,(x_1^r + 1,\ x_2^r - 5,\ x_3^r - 6,\ x_4^r - 1,\ x_5^r).
\end{aligned}$$

Folgende Tabelle gibt die Ergebnisse der Rechnungen wieder:

r	0	1	2
x_1	0	0	0
x_2	0	0	0
x_3	0	1	1
x_4	0	0	0
x_5	0	1	1

Durch nur zwei Iterationen haben wir somit eine Lösung erhalten.

Eingegangen am 6. Juli 1967

Recheninstitut der Akademie
Zweigstelle Cluj

LITERATUR

1. G. Aumann, *Über approximative Nomographie.* Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., 1958, 137–155.
2. C. Berge, A. Ghouila-Houri, *Programmes, jeux et réseaux de transport.* Paris, 1962.
3. R. Cruon, Ph. Hervé, *Quelques résultats relatifs à une structure algébrique et son application au problème central d'ordonnancement.* Rev. Fr. Rech. Op., 1965, **9**, *34*, 3–20.
4. V. Peteanu, *Asupra compatibilității problemei centrale a ordonanțării.* St. Cerc. Mat. (Buc.), 1967, **19**, *1*, 47–52.
5. B. Roy, *Cheminement et connexité dans les graphes. Applications aux problèmes d'ordonnancement.* METRA, Série spéciale, Nr. *1*, 1962.