

DETERMINAREA TRANSFORMĂRILOR OPTIME ALE UNOR NOMOGRAMĂ CU PUNCTE ALINIATE

de

F. RADÓ și V. GROZE

În lucrările [1], [2], [4] s-au dat criterii necesare și suficiente pentru ca o nomogramă să aibă eroare minimă în familia de nomograme dedusă dintr-o nomogramă dată printr-o familie de transformări proiective. Dar în ceea ce privește determinarea transformării optime din familia de transformări considerate, nu sînt tratate în aceste lucrări decît metode aproximative. În lucrarea [3] este rezolvată această problemă pentru o singură scară rectilinie.

În lucrarea de față vom da metode concrete pentru determinarea transformării optime pentru anumite familii de transformări proiective în cazul a două tipuri de nomograme cu puncte aliniate.

1. Considerăm o nomogramă avînd trei scări rectilinii concurente OA_1 , OA_2 , OA_3 (fig. 1).

Vom aplica transformări proiective asupra acestei nomograme, care să păstreze fixe segmentele OA_1 , OA_2 , OA_3 . Astfel de proiectivități nu pot fi decît omologii Ω , avînd centrul în punctul O , iar axa fiind dreapta care conține punctele A_i .

Putem extinde pentru acest caz metoda folosită în lucrarea [3].

Într-un reper cartezian ortogonal cu originea în punctul O și cu axa Ox paralelă cu dreapta A_1A_2 , ecuațiile scărilor nomogramei sînt:

$$\begin{cases} x_i = c_i f_i(z_i) \\ y_i = f_i(z_i) \end{cases} \quad z'_i \leq z_i \leq z''_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

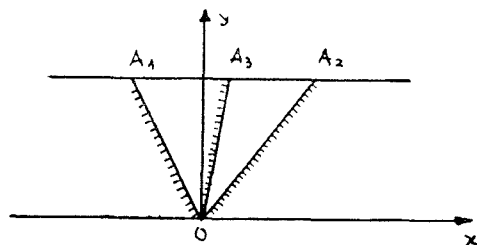


Fig. 1.

Alegînd distanța punctului O la dreapta A_1A_2 egală cu unitatea avem $f_i(z'_i) = 0$ și $f_i(z''_i) = 1$. (Cazul în care gradațiile scărilor nu se întind pînă la punctul O , poate fi încadrat în cazul de mai sus.)

Omologiile Ω transformă punctele $M_i(x_i, y_i)$ ale scării SA_i în punctul $M'_i(x'_i, y'_i)$ după următoarele relații

$$y'_i = \frac{(\mu + 1)y_i}{\mu y_i + 1}, \quad x'_i = c_i y'_i,$$

unde $\mu > -1$, pentru ca segmentele OA'_i să se transforme în ele însele. Avem

$$OM_i = s_i = \sqrt{1 + c_i^2} f_i(z_i) \\ OM'_i = s'_i = \sqrt{1 + c_i^2} \frac{(\mu + 1) f_i(z_i)}{\mu f_i(z_i) + 1}$$

Eroarea absolută a nomogramei transformate este

$$E_\mu = \max_i E_\mu^i = \max_i \max_{z'_i \leq z \leq z''_i} \frac{h}{dz_i} \quad (1)$$

sau

$$E_\mu = \max_i \max_{z'_i \leq z \leq z''_i} \frac{h}{(\mu + 1) \sqrt{1 + c_i^2} f'_i(z_i) [\mu f_i(z_i) + 1]^2}, \quad (2)$$

unde h este eroarea geometrică. Scopul nostru este de a determina pe μ astfel încît eroarea E_μ să fie minimă.

Din formula (2) rezultă că avem:

$$\frac{(\mu + 1) \sqrt{1 + c_i^2}}{h [\mu f_i(z_i) + 1]^2} f'_i(z_i) \geq \frac{1}{E_\mu}, \text{ pentru } z'_i \leq z \leq z''_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

și există cel puțin un i și o valoare z_i astfel ca egalitatea să fie atinsă.

Folosind notațiile:

$$\sqrt[4]{1 + c_i^2} \sqrt{\frac{f'_i[f_i^{-1}(y)]}{h}} = \psi_i(y), \quad \frac{1}{\sqrt{E_\mu}} = k_\mu$$

avem

$$\psi_i(y) \geq \frac{(\mu y + 1) k_\mu}{\sqrt{\mu + 1}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

relație valabilă pentru $0 \leq y \leq 1$.

Să reprezentăm grafic în planul axelor rectangulare xOy arcele C_i ale curbelor definite prin ecuația

$$x = \psi_i(y), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Din (3) rezultă că dreapta Δ_μ de ecuație

$$x = \frac{k_\mu}{\sqrt{\mu + 1}} (\mu y + 1)$$

care trece prin punctul $\left(0, -\frac{1}{\mu}\right)$, se află la stînga arcelor C_i și este de sprijin pentru cel puțin un arc C_i (fig. 2). Vom obține toate pozițiile dreptei Δ_μ , dacă considerăm tangentele la înfășurătoarea convexă comună a arcelor C_i , notată cu H , situate la stînga acesteia, care intersectează axa oy în afara segmentului $[0,1]$ (am ținut seamă că μ ia valori > -1). Cunoscînd o poziție a dreptei Δ_μ , interpretarea geometrică a lui k_μ este următoarea (vezi [3]): se consideră elipsa tangentă la Δ_μ din familia de elipse avînd ca una din axe segmentul $[0,1]$ al axei oy ; cealaltă semi-axă a ei este egală cu k_μ . Pentru a găsi valoarea lui μ , care conduce la cel mai mare k_μ posibil, ajunge să ducem elipsa din familie, tangentă la H (fig. 3), iar în punctul de contact tangenta comună a acestei elipse și a curbei H . Dacă y_0 este ordonata

punctului de intersecție a tangentei comune cu axa oy , avem $y_0 > 1$ sau $y_0 < 0$ și valoarea optimă a parametrului μ se calculează astfel:

$$\mu_0 = -\frac{1}{y_0}.$$

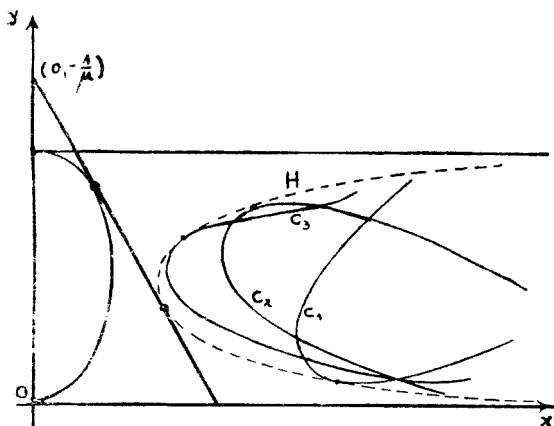


Fig. 2.

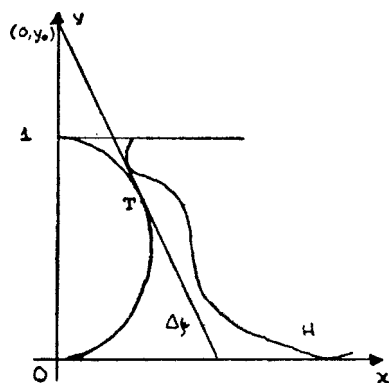


Fig. 3.

2. Considerăm nomograma N formată din trei scări $A_i B_i$, $i = 1, 2, 3$ recte: linii și presupunem că punctele A_i aparțin unei drepte d_1 , iar punctele B_i unei drepte paralele d_2 (fig. 4).

Alegînd dreapta d_1 ca axă Ox a unui reper cartezian rectangular și distanța dintre d_1 și d_2 ca unitate de măsură, ecuațiile scărilor sînt:

$$x = c_i y + a_i, \quad y = f_i(z), \quad z'_i \leq z_i \leq z''_i, \quad i = 1, 2, 3$$

unde presupunem că $c_1 > 0$, iar $c_2 < 0$.

Pentru îmbunătățirea nomogramei vom face transformări proiective considerînd punctele A_1 și A_2 și dreapta d_2 fixe. Astfel de colinații pot fi numai omologiile avînd axa pe una din dreptele d_1, d_2 , iar centrul pe cealaltă. Dintre aceste omologii, care depind de doi parametri, vom considera aici numai o familie cu un singur parametru și anume cele ce au centrul la infinit, adică afinitățile omologice speciale cu axa d_1 . $M(x, y)$ și $M'(x', y')$ fiind două puncte corespondente într-o afinitate considerată, avem următoarele relații:

$$\begin{cases} x' = x + py \\ y' = y \end{cases},$$

p fiind parametrul transformării, care trebuie limitat pentru a nu ieși din dreptunghiul $A_1 A_2 A_2^* A_1^*$: $-c_1 \leq p \leq -c_2$.

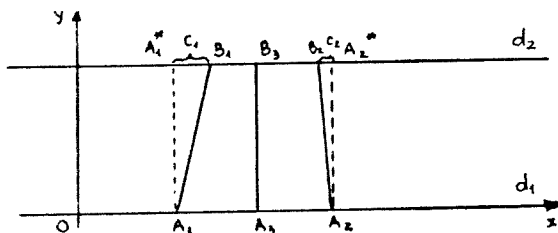


Fig. 4.

Punctele scării $A_i B_i$ se transformă după formulele :

$$x' = (c_i + p)y + a_i$$

$$y' = y$$

și avem :

$$A_i M'_i = s'_i = y \sqrt{(c_i + p)^2 + 1}.$$

Pentru eroarea E_p a nomogramei vom calcula expresia

$$\frac{ds'_i}{dz} = \sqrt{(c_i + p)^2 + 1} f'_i(z).$$

Folosind formula (1) a erorii unei nomograme, putem scrie :

$$\frac{\sqrt{(c_i + p)^2 + 1} f'_i(z)}{h} \geq \frac{1}{E_p} \quad z'_i \leq z_i \leq z''_i \quad i = 1, 2, 3.$$

Notînd

$$\min_{0 \leq y \leq 1} \left(\frac{f_i[f_i^{-1}(y)]}{h} \right)^2 = m_i^2, \quad \frac{1}{E_p^2} = k_p,$$

avem

$$k_p \leq m_i^2 [(c_i + p)^2 + 1], \quad i = 1, 2, 3;$$

deci *valoarea optimă a parametrului p se obține calculînd*

$$k_p^\circ = \max_{-c_1 \leq p \leq -c_3} \{ \min_{i=1,2,3} m_i^2 [(c_i + p)^2 + 1] \}.$$

Pentru aceasta e suficient să reprezentăm în planul axelor p, k porțiunile parabolilor $k = m_i^2 [(c_i + p)^2 + 1]$ cuprinse între $p = -C_1$ și $p = -C_2$, să luăm curba formată de arcele inferioare și să determinăm ordonata ei maximă. Cîteva exemple de cazuri posibile sînt reprezentate în fig. 5.

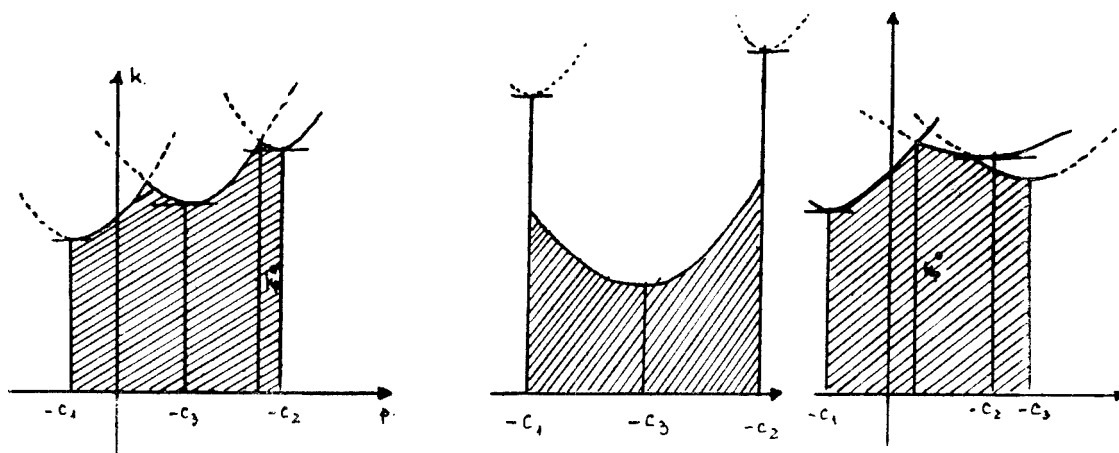


Fig. 5.

BIBLIOGRAFIE

1. B. Orbán, V. Groze și Gh. Coman, *Despre transformarea proiectivă a nomogramei cu scări rectilinii*. „Studia Univ. Babeș-Bolyai”, seria Mat. fiz., fasc. 1, pg. 16–23 (1967).
2. S. Groze și B. Orbán, *Despre transformarea proiectivă a nomogramei cu două scări pe un cerc și una pe o curbă oarecare* (sub tipar).
3. F. Radó, *Über die beste projektive Transformation von geradlinigen Leitern*. „Z.A.M.M.” **45**, 356–359 (1965).
4. F. Radó, V. Groze, B. Orbán, *Propriétés extrémales dans une classe de fonctions et applications à la transformation des nomogrammes*, „Mathematica” **6**(29), 2. pg. 307–326 (1964).
(Intrat în redacție la 8 noiembrie 1968)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НЕКОТОРЫХ НОМОГРАММ С ВЫРАВНЕННЫМИ ТОЧКАМИ

(Р е з ю м е)

Одна из изученных задач - следующая: рассматривается номограмма с тремя конкурентными прямолинейными шкалами OA_1 , OA_2 , OA_3 , данными уравнениями

$$x_i = c_i f_i(z_i), \quad y_i = f_i(z_i), \quad z'_i \leq z_i \leq z''_i, \quad i = 1, 2, 3$$

где

$$f_i(z'_i) = 0, \quad f_i(z''_i) = 1, \quad f'_i(z_i) > 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Номограмма подчиняется преобразованиям одной группы гомологий с центром в 0 и с осью A_1A_2 :

$$x' = \frac{(\mu + 1)x}{\mu y + 1}, \quad y' = \frac{(\mu + 1)y}{\mu y + 1} \quad (\mu > -1)$$

Значение μ_0 параметра μ , приводящее к номограмме с минимальной ошибкой, определяется следующим образом: строится выпуклая огибающая кривая дуг кривой

$$x = \sqrt[4]{1 + c_i^2 \sqrt{f'_i[f_i^{-1}(y)]}}, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad i = 1, 2, 3$$

и обозначается через H часть её границы между прямыми $y = 0$, $y = 1$, расположенная ближе к оси O . Пусть T — точка касания дуги H с эллипсом, имеющим ось промежутков $[0, 1]$ на Oy , и y_0 — ордината точки пересечения Oy с касательной в T к H . Значение μ_0 определено соотношением

$$\mu_0 = - \frac{1}{y_0}$$

DÉTERMINATION DES TRANSFORMATIONS OPTIMA DE CERTAINS NOMOGRAMMES A POINTS ALIGNÉS

(R é s u m é)

L'un des problèmes étudiés est le suivant : on considère un nomogramme à trois échelles rectilignes concurrentes OA_1 , OA_2 , OA_3 , données par les équations

$$x_i = c_i f_i(z_i), \quad y_i = f_i(z_i), \quad z'_i \leq z_i \leq z''_i, \quad i = 1, 2, 3$$

où

$$f_i(z'_i) = 0, \quad f_i(z''_i) = 1, \quad f'_i(z_i) > 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

On soumet le nomogramme aux transformations d'un groupe d'homologies avec le centre en 0 et l'axe A_1A_2 :

$$x' = \frac{(\mu + 1)x}{\mu y + 1}, \quad y' = \frac{(\mu + 1)y}{\mu y + 1} \quad (\mu > -1)$$

La valeur μ_0 du paramètre μ qui conduit à un nomogramme à l'erreur minima, se détermine de la manière suivante: on construit l'enveloppe convexe des arcs de la courbe

$$x = \sqrt[4]{1 - C_i^2 \sqrt{f'_i[f_i^{-1}(y)]}}, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

et l'on désigne par H la portion de sa frontière située entre les droites $y = 0$, $y = 1$, la plus rapprochée de l'axe Oy . Soit T le point de contact de l'arc H avec une ellipse ayant comme axe le segment $[0, 1]$ sur Oy , et y_0 l'ordonnée du point d'intersection entre Oy et la tangente en T à H. La valeur μ_0 est déterminée par la relation

$$\mu_0 = -\frac{1}{y_0}.$$