MONOGRAFII MATEMATICE
PUBLICATE SUB ÎNGRIJIREA PROFESORILOR DE LA
SECŢIUNEA DE MATEMATICI A UNIVERSITĂŢII DIN CLUJ.

FASCICULA III.

DESPRE CEA MAI BUNĂ APROXIMAŢIE A FUNCŢIILOR CONTINUE PRIN POLINOAME

CINCI LECŢII ŢINUTE LA FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN CLUJ
ÎN ANUL ŞCOLAR 1933—34

DE

Dr. TIBERIU POPOVICIU

CLUJ
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL"
1937.

Aramă Olg

MONOGRAFII MATEMATICE

FASCICULA III.

MONOGRAFII MATEMATICE
PUBLICATE SUB ÎNGRIJIREA PROFESORILOR DE LA
SECŢIUNEA DE MATEMATICI A UNIVERSITĂŢII DIN CLUJ.

FASCICULA III.

DESPRE CEA MAI BUNĂ APROXIMAŢIE A FUNCŢIILOR CONTINUE PRIN POLINOAME

CINCI LECŢII ŢINUTE LA FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN CLUJ
ÎN ANUL ŞCOLAR 1933—34

DE

Dr. TIBERIU POPOVICIU

CLUJ
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL"
1937.

DESPRE CEA MAI BUNĂ APROXIMAŢIE A FUNCŢIILOR CONTINUE PRIN POLINOAME *

LECŢIA I.

Existenţa şi unicitatea polinoamelor de cea mai bună aproximaţie

1. — Funcţii mărginite. Oscilaţia unei funcţii. In cele ce urmează vom considera funcţii $f(x)$ reale, de o variabilă reală x, uniforme şi definite într'un interval finit şi închis (a, b), $a < b$.

O funcţie $f(x)$ este *mărginită superior* dacă există un număr A astfel ca toate valorile luate de funcţie să fie mai mici decât A. In cazul contrar funcţia *nu este mărginită superior*.

Să notăm cu $M(f)$ *marginea superioară* sau *maximul* funcţiei $f(x)$. Să reamintim definiţia acestui număr $M(f)$:

Dacă $f(x)$ nu e mărginită superior $M(f)$ este egal cu $+\infty$.

Dacă $f(x)$ este mărginită superior $M(f)$ este definită de proprietatea că oricare ar fi numărul pozitiv ε, există *cel puţin un punct* x pentru care

$$f(x) > M(f) - \varepsilon$$

şi oricare ar fi x avem

$$f(x) \leq M(f).$$

E clar acum ce trebue să înţelegem prin o funcţie *mărginită inferior* şi prin o funcţie care *nu este mărginită inferior*. Definiţia *marginei inferioare* sau a *minimului* $m(f)$ al funcţiei $f(x)$ este analoagă cu a maximului $M(f)$.

O funcţie care este mărginită atât superior cât şi inferior, se zice că este *o funcţie mărginită*. Diferenţa $M(f) - m(f)$ se numeşte *oscilaţia funcţiei* $f(x)$ *în intervalul* (a, b).

2. — Funcţii continue. Se ştie ce se înţelege prin o funcţie continuă în intervalul (a, b). O funcţie continuă este mărginită. O funcţie continuă într'un interval este *uniform continuă* în acest interval. Acest lucru însemnează că fiind dat un număr pozitiv ε putem determina un alt număr pozitiv δ astfel ca să avem

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

oricare ar fi punctele x', x'' verificând condiţia

$$|x' - x''| < \delta .$$

O funcţie continuă atinge maximul M(f) *şi minimul* $m(f)$ *al ei.* Există prin urmare cel puţin un punct x' astfel ca $f(x') = \mathrm{M}(f)$ şi cel puţin un punct x'' astfel ca $f(x'') = m(f)$. Mai mult, se poate afirma că M(f) este totodată şi *limita superioară* a funcţiei $f(x)$. Cu alte cuvinte M(f) se bucură de proprietatea că, oricare ar fi numărul pozitiv ε, există *o infinitate de puncte* x astfel ca

$$f(x) > \mathrm{M}(f) - \varepsilon$$

şi cel mult un număr finit de puncte x astfel ca

$$f(x) > \mathrm{M}(f) + \varepsilon.$$

La fel, minimul $m(f)$ coincide cu *limita inferioară* a funcţiei $f(x)$, această limită inferioară având o definiţie analoagă cu cea superioară.

Toate cele spuse se extind imediat la funcţiile de mai multe variabile independente definite într'un domeniu mărginit şi închis.

In cursul acestor lecţii vom avea nevoe şi de alte proprietăţi pe cari le vom reaminti la timpul lor.

3. — Distanţa a două funcţii. $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ fiind două funcţii, numărul $\mathrm{M}(|f_1 - f_2|)$ se poate numi *distanţa* lor. Dacă una din funcţii e mărginită iar cealaltă nu, distanţa lor este infinită. Dacă nici una din funcţii nu este mărginită distanţa lor poate să fie finită. Dacă una din funcţii e mărginită şi distanţa lor e finită cealaltă funcţie trebue să fie şi ea mărginită. Distanţa se bucură de următoarele proprietăţi, uşor de demonstrat:

1⁰. $\mathrm{M}(|f_1 - f_2|)$ este un număr pozitiv sau nul.
2⁰. $\mathrm{M}(|f_1 - f_2|) = 0$ numai dacă $f_1(x) \equiv f_2(x)$.
3⁰. $\mathrm{M}(|\mathrm{C}f|) = \mathrm{CM}(|f|)$, C fiind o constantă pozitivă.
4⁰. $\mathrm{M}(|f_1 - f_2|) \leq \mathrm{M}(|f_1 - f_3|) + \mathrm{M}(|f_2 - f_3|)$.

Problema de cea mai bună aproximaţie care va fi precizată şi studiată mai jos se referă la această definiţie a distanţei.

4. — Problema de cea mai bună aproximaţie prin polinoame. Se vedem acum cum se pune această problemă. Să considerăm familia sau *mulţimea* polinoamelor

$$\mathrm{P}(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_n$$

de gradul n. Un polinom al mulţimei este complet determinat de coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_n$ cari sunt nişte numere negative, nule sau pozitive. Rezultă că orice polinom de gradul n este totodată şi de gradul $m > n$. Cu alte cuvinte mulţimea polinoamelor de gradul n conţine mulţimea polinoamelor de grad mai mic ca n.

Fiind dată o funcţie $f(x)$ vom zice, prin definiţie, că distanţa $\mathrm{M}(|f - \mathrm{P}|)$ dintre această funcţie şi un polinom $\mathrm{P}(x)$ este eroarea sau *aproximaţia* cu care $\mathrm{P}(x)$ reprezintă pe $f(x)$.

Pentru toate polinoamele de gradul n, $\mathrm{M}(|f - \mathrm{P}|)$ are o margine inferioară $\mu_n(f)$ sau mai simplu μ_n. μ_n este, prin definiţie, *cea mai bună aproximaţie* a funcţiei $f(x)$ prin polinoame de gradul n.

Problema celei mai bune aproximaţii prin polinoame se pune în felul următor:

Fiind dată o funcţie $f(x)$, să se determine polinoamele de gradu n pentru cari $\mathrm{M}(|f - \mathrm{P}|)$ atinge marginea sa inferioară μ_n şi să se studieze acest număr μ_n.

Un polinom $\mathrm{P}(x)$ de gradul n pentru care μ_n este atins va fi numit *un polinom de cea mai bună aproximaţie de gradul n al funcţiei $f(x)$*. Mai scurt vom zice că un astfel de polinom este un polinom T_n şi-l vom nota cu $\mathrm{T}_n(x; f)$, $\mathrm{T}_n(x)$ sau T_n.

Problema polinoamelor de cea mai bună approximaţie a fost pusă pentru prima dată de matematicianul rus P. L. TCHEBYCHEF [1]. Rezultatele lui TCHEBYCHEF au fost precizate şi completate de către D-nii P. KIRCHBERGER [2], E. BOREL [3], L. TONELLI [4], CH. de la VALLÉE POUSSIN [5].

5. — Determinarea polinoamelor T_n în cazuri simple. Problema celei mai bune aproximaţii nu se pune pentru o funcţie care nu este mărginită, $\mathrm{M}(|f - \mathrm{P}|)$ fiind atunci necontenit egal cu $+\infty$, deoarece un polinom e evident o funcţie marginită (în intervalul (a, b)).

Dacă $f(x)$ este un polinom de gradul n, cea mai bună aproximaţie este egală cu zero căci funcţia însăşi este un polinom T_n. Reciproca este adevărată, după cum rezultă din Nr. 8 de mai jos.

Dacă cunoaştem polinoamele T_n pentru funcţia $f(x)$, cunoaştem şi polinoamele T_n corespunzătoare funcţiilor $f(x) + \mathrm{Q}(x)$ şi $\mathrm{C}f(x)$, unde

---

(1) P. L. TCHEBYCHEF, *Oeuvres*, t. I. p. 705.

(2) P. KIRCHBERGER, *„Ueber Tchebychefsche Annäherungsmethoden"* Mathematische Annalen Bd. 57 (1903) p. 509—540.

(3) E. BOREL, *„Leçons sur les fonctions de variables réelles"* Paris, 1905.

(4) L. TONELLI, *„I polinomi d'approssimazione di Tchebychef"* Annali di Matematica t. XV, (1908) p. 47—119.

(5) CH. de la VALLÉE POUSSIN *„Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle"*, Paris, 1919.

$Q(x)$ este un polinom de gradul n iar C o constantă. In adevăr, avem

$$M(|f-P|)=M(|f+Q-(P+Q)|)=\mu_n(f)$$

şi dacă $R(x)$ este un polinom de gradul n,

$$M(|(f+Q)-R|)=M(|f-(R-Q)|)\geq\mu_n(f).$$

Rezultă că $P(x)+Q(x)$ este un polinom T_n pentru funcţia $f(x)+Q(x)$ şi că orice polinom T_n corespunzător acestei funcţii este de forma $P(x)+Q(x)$. Avem

$$\mu_n(f+Q)=\mu_n(f).$$

Avem şi relaţiile

$$|C|M(|f-P|)=M(|Cf-CP|)=|C|\mu_n(f),$$

$$M(|Cf-R|)=M\left(\left|Cf-C\frac{R}{C}\right|\right)=|C|M\left(\left|f-\frac{R}{C}\right|\right)\geq|C|\mu_n(f).$$

Rezultă că $CP(x)$ este un polinom T_n pentru funcţia $Cf(x)$ şi că orice polinom T_n corespunzător acestei funcţii este de forma $CP(x)$. Avem

$$\mu_n(Cf)=|C|\mu_n(f).$$

6. — Lemă preliminară. Să presupunem că pentru nişte polinoame $P(x)$ de gradul n avem

(1) $$|P(x)|<A \quad \text{în} \quad (a,b).$$

Voim să arătăm că coeficienţii a_r sunt mărginiţi. Pentru aceasta să luăm $n+1$ puncte fixe distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, situate în intervalul (a,b), şi să considerăm sistemul

$$a_0x_r^n+a_1x_r^{n-1}+\ldots+a_n=P(x_r), \quad r=1,2,\ldots,n+1.$$

Determinantul acestui sistem este diferit de zero, nefiind altceva decât determinantul lui VAN DER MONDE al numerilor $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Scoţând deci valorile lui $a_0, a_1, \ldots, a_n$ cu ajutorul regulei lui CRAMER şi ţinând seamă de (1) găsim următoarea *lemă preliminară*:

Dacă un polinom $P(x)$ *de gradul* n *rămâne mărginit de un număr* A, *în intervalul* (a,b), *coeficienţii* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *rămân mărginiţi de un număr* λA, *unde* λ *nu depinde decât de* n *şi de intervalul* (a,b).

Valoarea lui λ se poate preciza. Ceeace este însă important pentru noi este că acest număr nu depinde de polinomul $P(x)$ considerat.

Proprietatea rămâne bineînţeles adevărată şi pentru cazul când polinoamele s'ar considera numai pe o mulţime liniară şi mărginită oarecare având cel puţin $n+1$ puncte distincte.

7. — Continuitatea lui $M(|f-P|)$. Maximul $M(|f-P|)$ nu e cu siguranţă atins decât dacă funcţia $f(x)$ este continuă.

Fie ε un număr pozitiv arbitrar şi să punem

$$A=M(|x|^n+|x|^{n-1}+\ldots+1).$$

Să presupunem că

$$|a_r-a'_r|<\frac{\varepsilon}{A}, \quad r=0,1,\ldots,n.$$

Punând

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$
$$P_1(x)=a'_0x^n+a'_1x^{n-1}+\ldots+a'_n,$$

avem

$$M(|P-P_1|)\leq[\max(|a_r-a'_r|)].M(|x|^n+|x|^{n-1}+\ldots+1)$$

unde notăm ca de obiceiu cu $\max(c_1,c_2,\ldots,c_k)$ sau $\max\limits_{r=1,2,\ldots k}(c_r)$, sau mai simplu încă cu $\max(c_r)$, pe cel mai mare dintre numerele $c_1, c_2, \ldots c_k$. Vom întrebuinţa o notaţie analoagă pentru indicarea celui mai mic dintre numerile c_r.

Putem deci scrie

$$M(|P-P_1|)<\varepsilon.$$

Deducem de aci că

$$M(|f-P|)\leq M(|f-P_1|)+M(|P-P_1|)<M(|f-P_1|)+\varepsilon.$$
$$M(|f-P_1|)\leq M(|f-P|)+M(|P-P_1|)<M(|f-P|)+\varepsilon$$

prin urmare

$$|M(|f-P|)-M(|f-P_1|)|<\varepsilon$$

ceeace arată că:

$f(x)$ fiind o funcţie mărginită, $M(|f-P|)$ *este o funcţie continuă de coeficienţii* $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Rezultă de aci că *marginea inferioară* μ_n *coincide cu limita inferioară a numerilor* $M(|f-P|)$.

8. — Existenţa polinoamelor de cea mai bună aproximaţie. Ne propunem acum să examinăm problema existenţei polinoamelor T_n. Din cele ce preced rezultă că există un şir infinit de polinoame de gradul n

(2) $$P_1(x),\ P_2(x),\ldots,\ P_m(x),\ldots$$

astfel ca

$$M(|f-P_m|)\to\mu_n,\quad m\to\infty$$

dar *nu rezultă* încă existenţa unui polinom pentru care μ_n să fie atins, adică a unui polinom $P(x)$ astfel ca $M(|f-P|)=\mu_n$.

Acest fapt nu trebue să ne surprindă. E adevărat că $M(|f-P|)$ este o funcţie continuă în raport cu coeficienţii polinomului P, însă domeniul de variaţie al acestor coeficienţi este nemărginit şi deschis.

Dacă $M(|f|)=\mu_n$, polinomul identic nul este un polinom T_n. In acest caz existenţa a cel puţin unui polinom de cea mai bună aproximaţie e dovedită.

Să presupunem cazul contrar, adică $M(|f|)>\mu_n$. E destul atunci să considerăm numai polinoamele P astfel ca

$$M(|f-P|)<M(|f|).$$

Ştim, în virtutea ultimului rezultat din Nr. precedent, că există o infinitate de astfel de polinoame de gradul n.

Dar,

$$M(|P|)\leq M(|f-P|)+M(|f|).$$

deci

(3) $$M(|P|)<2M(|f|).$$

Cu alte cuvinte, putem presupune că polinoamele (2) sunt astfel alese încât să verifice inegalitatea (3).

Dacă punem

$$P_m=a_0^{(m)}x^n+a_1^{(m)}x^{n-1}+\cdots+a_n^{(m)},\quad m=1,2,\ldots$$

ştim (Nr. 6) că există un număr B, care depinde numai de $M(|f|)$ [$B=2\lambda M(|f|)$], astfel ca

$$|a_r^{(m)}|<B,\quad r=0,1,\ldots,n;\ m=1,2,\ldots$$

Din şirul

$$a_0^{(1)},\ a_0^{(2)},\ldots,\ a_0^{(m)},\ldots$$

care este mărginit, putem extrage un şir parţial care să aibă o limită finită a_0^*

(4) $$a_0^{(k_1)},\ a_0^{(k_{12})},\ a_0^{(k_{13})},\ldots,\ a_0^{(k_{1m})},\ldots\to a_0^*.$$

Considerăm atunci şirul

$$a_1^{(k_1)},\ a_1^{(k_{12})},\ a_1^{(k_{13})},\ldots,\ a_1^{(k_{1m})},\ldots$$

Din acest şir putem extrage un şir parţial care să aibă o limită finită a_1^*

$$a_1^{(k_1)},\ a_1^{(k_2)},\ a_1^{(k_{23})},\ldots,\ a_1^{(k_{2m})},\ldots\to a_1^*$$

Vom avea şi

$$a_0^{(k_1)},\ a_0^{(k_2)},\ a_0^{(k_{23})},\ldots,\ a_0^{(k_{2m})},\ldots\to a_0^*$$

deoarece acest şir este extras din (4).

Repetând acest procedeu de $n+1$ ori vedem, în definitiv, că din şirul de polinoame (2) putem extrage un şir parţial

$$P_{k_1},\ P_{k_2},\ldots,\ P_{k_m},\ldots$$

astfel ca

$$a_r^{(k_1)},\ a_r^{(k_2)},\ldots,\ a_r^{(k_m)},\ldots\to a_r^*,\quad r=0,1,\ldots,n$$

a_r^* fiind nişte numere finite.

Dacă punem acum

$$P^*(x)=a_0^*x^n+a_1^*x^{n-1}+\cdots+a_n^*,$$

vedem că

(5) $$M(|f-P^*|)=\mu_n.$$

Polinomul $P^*(x)$ pentru care avem egalitatea (5) este deci un polinom de cea mai bună aproximaţie de gradul n al funcţiei $f(x)$. Putem enunţa prin urmare următoarea proprietate:

Orice funcţie mărginită $f(x)$ admite cel puţin un polinom de cea mai bună aproximaţie de gradul n.

Completând cele spuse la Nr. 5 putem spune că:

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca μ_n să fie nul este ca $f(x)$ să fie un polinom de gradul n.

Am văzut că această condiţie e suficientă. Necesitatea ei rezultă din faptul că există un polinom $P(x)$ astfel ca $M(|f-P|)=0$, de unde $f(x)\equiv P(x)$. In cazul când $f(x)$ nu este un polinom de gradul n, μ_n este un număr pozitiv.

9. — Polinoamele lui Tchebychef pentru o funcţie continuă. Vom presupune acum că funcţia $f(x)$ este continuă şi fie $T_n(x)$ un polinom de cea mai bună aproximaţie de gradul n. Diferenţa $f(x)-T_n(x)$ va atinge atunci neapărat cel puţin una din valorile $\pm\mu_n$. Ne propunem să precizăm numărul punctelor în cari aceste valori sunt atinse. Să presupunem că

$$f(x_r)-T_n(x_r)=\pm\mu_n,\quad r=1,2,\ldots,m$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sunt m puncte distincte şi $m \leq n+1$. In toate celelalte puncte ale intervalului (a, b), avem $|f - T_n| < \mu_n$.

Fie $Q(x)$ polinomul lui LAGRANGE determinat de condiţiile

$$Q(x_r) = f(x_r) - T_n(x_r), \quad r=1, 2, \ldots, m.$$

Polinomul lui LAGRANGE, dat de formula de interpolare a lui LAGRANGE, este polinomul *de grad cel mai mic* care ia valorile $A_1, A_2, \ldots, A_k$ în punctele $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Acest polinom este *unic* şi de grad cel mult egal cu $k-1$.

Polinomul $Q(x)$ este deci de gradul n.

Inchidem fiecare punct x_r intr'un interval I_r având ca centru punctul x_r şi ca lungime δ_r.

Fiind dat un număr pozitiv $\varepsilon < \mu_n$, putem alege un număr pozitiv δ precum şi lungimele δ_r astfel ca:

1⁰. Luând $\delta_r \leq \delta$, intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_m$ să nu aibă nici un punct comun.

2⁰. Oscilaţia funcţiilor $f(x) - T_n(x)$ şi $Q(x)$ să fie mai mică decât ε în orice interval de lungime $\leq \delta$.

Rezultă imediat că într'un interval I_r funcţiile $f - T_n$ şi Q nu se pot anula, deci ele păstrează un semn constant (şi anume acelaşi semn).

Să presupunem că x_r este un punct în care $f(x_r) - T_n(x_r) = Q(x_r) = \mu_n$, atunci în intervalul I_r avem

$$\mu_n - \varepsilon < f - T_n \leq \mu_n, \quad \mu_n - \varepsilon < Q < \mu_n + \varepsilon.$$

Să alegem numărul pozitiv λ astfel ca

$$\lambda < \frac{\mu_n - \varepsilon}{\mu_n + \varepsilon} \tag{6}$$

atunci în intervalul I_r avem

$$0 < \mu_n - \varepsilon - \lambda(\mu_n + \varepsilon) < f - T_n - \lambda Q < \mu_n - \lambda(\mu_n - \varepsilon).$$

Intr'un punct x_r unde $f(x_r) - T_n(x_r) = Q(x_r), = -\mu_n$, avem

$$-\mu_n \leq f - T_n < -\mu_n + \varepsilon, \quad -\mu_n - \varepsilon < Q < -\mu_n + \varepsilon$$

şi pe lângă aceeaşi condiţie (6) deducem

$$-\mu_n + \lambda(\mu_n - \varepsilon) < f - T_n - \lambda Q < -\mu_n + \varepsilon + \lambda(\mu_n + \varepsilon) < 0.$$

Rezultă că în intervalele I_r

$$|f - T_n - \lambda Q| < \mu_n - \lambda(\mu_n - \varepsilon) < \mu_n.$$

Din ipoteza noastră iniţială mai rezultă că în toate punctele domeniului închis, care se obţine din intervalul (a, b) scoţând intervalele I_r, avem

$$|f - T_n| \leq \mu' < \mu_n,$$

unde μ' este un număr fix.

Dacă luăm pe λ destul de mic astfel ca

$$\lambda < \frac{\mu_n - \mu'}{2M(|Q|)} \tag{7}$$

vom avea şi

$$|\lambda Q| < \frac{\mu_n - \mu'}{2},$$

$$|f - T_n - \lambda Q| \leq |f - T_n| + |\lambda Q| < \mu' + \frac{\mu_n - \mu'}{2} = \frac{\mu_n + \mu'}{2} < \mu_n$$

în afară de intervalele I_r şi în extremităţile acestor intervale.

Rezultă că, în întreg intervalul (a, b),

$$|f - T_n - \lambda Q| < \mu_n.$$

Deci dacă λ verifică inegalităţile (6) şi (7) polinomul $T_n + \lambda Q$ dă o aproximaţie mai bună, ceeace este contrar ipotezei. Avem aşa dar proprietatea următoare:

Diferenţa $f(x) - T_n(x)$ atinge valorile $\pm \mu_n$ în cel puţin $n+2$ puncte.

10. — Completarea rezultatului precedent. Putem completa rezultatul precedent. Diferenţa $f(x) - T_n(x)$ trebue să atingă ambele valori $+\mu_n$ şi $-\mu_n$. Să presupunem de exemplu că $+\mu_n$ nu ar fi atins, avem atunci peste tot

$$-\mu_n \leq f - T_n \leq \mu' < \mu_n,$$

μ' fiind un număr fix. Luând o constantă pozitivă λ vom avea

$$-\mu_n + \lambda \leq f - T_n + \lambda \leq \mu' + \lambda.$$

Dacă deci luăm $\lambda < \mu_n - \mu'$, avem peste tot

$$|f - T_n + \lambda| < \mu_n.$$

Polinomul $T_n - \lambda$ dă o aproximaţie mai bună ceeace este contrar ipotezei.

Mai mult, putem preciza numărul punctelor unde μ_n şi numărul punctelor unde $-\mu_n$ este atins. Să presupunem, de exemplu, că

$$f(x_r) - T_n(x_r) = \mu_n, \quad r=1, 2, \ldots, m,$$

în toate celelalte puncte având

$$-\mu_n \leq f - T_n < \mu_n.$$

Fie încă intervalele $I_{r'}$ având centrul în $x_{r'}$ şi o lungime $\delta_{r'}$ suficient de mică, pentru ca intervalele $I_{r'}$ să nu aibă nici un punct comun. Fie x'_{r}, x''_{r} extremităţile intervalului I_{r} şi să formăm polinomul

$$Q(x)=(x-x'_1)(x-x''_1)(x-x'_2)(x-x''_2)\ldots(x-x'_m)(x-x''_m).$$

Avem $Q(x)<0$ în intervalele deschise $I_{r'}$ şi $Q(x)>0$ în afară de intervalele închise $I_{r'}$.

Putem lua un δ destul de mic astfel ca, pentru $\delta_{r'}\leq\delta$, să avem în intervalele $I_{r'}$

$$\mu'\leq f-T_n\leq\mu_n,$$

μ' fiind un număr pozitiv $<\mu_n$.

Dacă numărul pozitiv λ verifică inegalitatea

$$\lambda<\frac{\mu'}{M(|Q|)}, \tag{8}$$

avem în intervalele $I_{r'}$

$$0<\mu'+\lambda Q\leq f-T_n+\lambda Q\leq\mu_n+\lambda Q<\mu_n.$$

Ultima inegalitate e justificată deoarece nu am putea avea egalitate decât într'un punct unde avem în acelaşi timp $f-T=\mu_n$ şi $Q=0$. Ori, prin construcţie, nu există astfel de puncte.

In tot domeniul închis, care se obţine din (a, b) scoţând intervalele $I_{r'}$, avem

$$-\mu_n\leq f-T_n\leq\mu''<\mu_n,$$

μ'' fiind un număr fix.

Luând pe λ astfel ca

$$\lambda<\frac{\mu_n-\mu''}{2M(|Q|)}, \tag{9}$$

avem în acest domeniu

$$-\mu_n<-\mu_n+\lambda Q\leq f-T_n-\lambda Q<\mu''+\frac{\mu_n-\mu''}{2}=\frac{\mu_n+\mu''}{2}<\mu_n.$$

Prima inegalitate se justifică exact ca mai sus.

Dacă deci λ verifică inegalităţile (8), (9) avem în tot intervalul (a, b)

$$|f-T_n+\lambda Q|<\mu_n$$

şi se vede că polinomul $T_n-\lambda Q$ dă o aproximaţie mai bună decât μ_n.

Polinomul $Q(x)$ este de gradul $2m$, ajungem deci la o contradicţie dacă $2m\leq n$.

Dacă $x_{r'}$ ar fi puncte unde $-\mu_n$ este atins putem face consideraţiuni absolut analoage, aşa că în definitiv putem enunţa următoarea proprietate:

Diferenţa $f(x)-T_n(x)$ atinge în cel puţin $\left[\frac{n+2}{2}\right]$ puncte valoarea μ_n şi în cel puţin $\left[\frac{n+2}{2}\right]$ puncte valoarea $-\mu_n$. $[\alpha]$ însemnează numărul întregilor cuprinşi în α.

Proprietăţile dela Nr. 9 şi 10 au fost completate în mod foarte elegant de către D-l E. Borel, după cum vom vedea mai jos.

11. — Despre mulţimea polinoamelor T_n. Să presupunem că funcţia $f(x)$ admite două polinoame T_n distincte. Dacă P, P_1 sunt aceste polinoame avem

$$M(|f-P|)=M(|f-P_1|)=\mu_n.$$

Dacă α, β sunt două numere pozitive avem

$$\mu_n\leq M\left(\left|f-\frac{\alpha P+\beta P_1}{\alpha+\beta}\right|\right)=M\left(\left|\frac{\alpha(f-P)}{\alpha+\beta}+\frac{\beta(f-P_1)}{\alpha+\beta}\right|\right)\leq \tag{10}$$

$$\leq\frac{\alpha M(|f-P|)+\beta M(|f-P_1|)}{\alpha+\beta}=\mu_n$$

$$\therefore M\left(\left|f-\frac{\alpha P+\beta P_1}{\alpha+\beta}\right|\right)=\mu_n.$$

Rezultă că polinomul $\frac{\alpha P+\beta P_1}{\alpha+\beta}$ este şi el un polinom T_n, prin urmare:

Dacă o funcţie mărginită admite două polinoame T_n distincte, atunci ea admite o infinitate (nenumărabilă) de astfel de polinoame.

Fiecărui polinom $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ putem face să corespundă punctul A de coordonate $a_0, a_1, \ldots, a_n$ în spaţiul ordinar cu $n+1$ dimensiuni. Se vede atunci, din cele ce preced, că:

Punctele A corespunzătoare polinoamelor T_n ale unei funcţii mărginite, formează un domeniu convex, închis şi mărginit.

Dacă polinomul T_n este unic acest domeniu se reduce la un singur punct.

Dacă intervalul (a, b) este simetric faţă de origine, $a=-b$, şi dacă $f(x)$ e o funcţie pară, $f(-x)=f(x)$, există un polinom T_n care este şi el par. In adevăr, se vede imediat că $T_n(-x)$ este şi el un polinom T_n. Tot astfel şi $\frac{T_n(x)+T_n(-x)}{2}$, care este un polinom par. In acest caz $\mu_{2n+1}(f)=\mu_{2n}(f)$.

Dacă funcţia este impară, $f(-x)=-f(x)$, există un polinom T_n care este şi el impar. In acest caz $\mu_{2n}(f)=\mu_{2n-1}(f)$.

12. — Unicitatea polinoamelor lui Thebychef. In cazul funcţiilor continue cele ce preced ne permit să tragem o concluzie importantă.

Dacă P, P_1 sunt două polinoame T_n distincte, polinomul $P_2 = \frac{P + P_1}{2}$ este şi el un polinom T_n. Inegalitatea (10) ne arată că într'un punct x' unde avem $f(x') - P_2(x') = \pm \mu_n$, trebue să avem şi

$$f(x') - P(x') = f(x') - P_1(x') = \pm \mu_n$$
$$\therefore P(x') = P_1(x').$$

In virtutea proprietăţilor de mai sus polinoamele P, P_1 coincid în cel puţin $n+2$ puncte, sunt deci identice. Rezultă dar proprietatea:

O funcţie continuă $f(x)$ admite un singur polinom de cea mai bună aproximaţie de gradul n.

După cum se vede unicitatea rezultă din proprietatea demonstrată a Nr. 9. Mai precis, această unicitate rezultă numai din faptul că $|f - T_n|$ atinge maximul ei în cel puţin $n+1$ puncte. In adevăr, două polinoame de gradul n cari coincid în $n+1$ puncte, coincid peste tot.

Dacă intervalul (a, b) este simetric faţă de origine şi $f(x)$ e o funcţie pară, polinomul $T_n(x)$ este par şi deci $T_{2n+1} \equiv T_{2n}$. Dacă funcţia este impară polinomul $T_n(x)$ este şi el impar şi $T_{2n} \equiv T_{2n-1}$.

Dacă funcţia nu este continuă polinomul T_n nu este în general unic. Putem face observaţia că T_0 este totdeauna unic şi egal cu $\frac{M(f) + m(f)}{2}$. Fie funcţia

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Se vede că trebue să avem $\mu_n \geq 1$. Dar polinomul identic nul dă aproximaţia 1 aşa că $\mu_n = 1$ oricare ar fi n. Toate polinoamele T_n trebue să se anuleze în origine. Polinoamele Cx unde C este o constantă sunt polinoame T_n pentru $0 \leq C \leq 2$ şi oricare ar fi $n > 0$.

LECŢIA II

Rezultatele D-lui E. Borel

13. — Despre diferenţa $f(x) - P(x)$. Vom presupune că $f(x)$ este o funcţie continuă şi vom lua un polinom $P(x)$ de gradul n.

Să considerăm funcţia $\phi(x) = f(x) - P(x)$, care este continuă.

Vom zice că un punct al intervalului (a, b) este un punct x' dacă $\phi(x') = M(|\phi|)$ şi că este un punct x'' dacă $\phi(x'') = -M(|\phi|)$.

Fie acum $\varepsilon < \frac{M(|\phi|)}{2}$ un număr pozitiv şi $\delta' > 0$ un număr aşa ca oscilaţia lui $\phi(x)$, într'un interval de lungime mai mică decât δ', să fie mai mică decât ε.

Impărţim intervalul (a, b) în r intervale egale

(11) $$I_1, I_2, \ldots, I_r$$

ale căror lungime comună δ este mai mică decât δ'. Un interval I_ν poate, sau nu, să conţină puncte x', x'', dar nu poate conţine decât puncte de acelaşi fel.

Fie I_{s_1} primul interval din şirul (11) care conţine un punct x' sau x''. Pentru fixarea ideilor să presupunem că conţine unul sau mai multe puncte x'. Fie apoi I_{s_2} primul interval după I_{s_1} care conţine puncte x''. Intre I_{s_1} şi I_{s_2} există *cel puţin trei* intervale consecutive cari nu conţin nici puncte x', nici puncte x''. Dacă notăm cu ξ_1 mijlocul intervalului I_{s_2-2}, nu există nici un punct x' sau x'' într'un interval de lungime 3δ şi cu centrul în ξ_1. Fie I_{s_3} primul interval după I_{s_2} care conţine puncte x'. Luăm mijlocul ξ_2 al lui I_{s_3-2}. Punctul ξ_2 se bucură de aceeaşi proprietate ca şi ξ_1. Procedând mai departe la fel, până epuizăm toate intervalele (11), găsim şirul de puncte $a, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, b$, care ne determină m intervale închise succesive

(12) $$L_1, L_2, \ldots, L_m.$$

Aceste intervale se bucură de următoarele proprietăţi:

1⁰. Există cel puţin un interval L_s.

2⁰. Punctele de diviziune ξ_s sunt la o distanţă cel puţin egală cu $\frac{3}{2}\delta$ de punctele x' şi x''.

3⁰. Fiecare interval L_s conţine puncte x' sau puncte x''. Dacă L_s conţine puncte x', L_{s-1}, L_{s+1} conţin puncte x''.

Intr'un interval L_s, care conţine puncte x', $m(\phi)$ nu poate fi egal cu $-M(|\phi|)$; iar într'un interval, care conţine puncte x'', $M(\phi)$ nu poate fi egal cu $M(|\phi|)$. Se deduce de aici imediat că există un număr pozitiv η astfel ca să avem în fiecare interval L_s

$$\phi > -M(|\phi|) + \eta, \quad \text{sau} \quad \phi < M(|\phi|) - \eta$$

după cum L_s conţine puncte x' sau puncte x''.

14. — Proprietatea fundamentală a polinoamelor T_n. Să luăm $\phi(x) = f(x) - T_n(x)$, atunci $M(|\phi|) = \mu_n$.

Să presupunem că numărul intervalelor (12) ar fi mai mic ca $n+2$, $m \le n+1$. Polinomul

$$Q(x)=(x-\xi_1)(x-\xi_2)\dots(x-\xi_{m-1})$$

este atunci de gradul n.

Să determinăm constanta λ astfel ca să avem $\lambda Q > 0$ în interiorul intervalelor L_s cari conţin puncte x' şi

$$|\lambda| < \frac{\eta}{M(|Q|)}$$

unde η este numărul determinat la sfârşitul Nr.-lui precedent.

In fiecare punct al unui interval L_s, care conţine puncte x', avem

$$-\mu_n+\eta-\eta < f-T_n-\lambda Q < \mu_n,$$

iar dacă L_s conţine puncte x''

$$-\mu_n < f-T_n-\lambda Q < \mu_n-\eta+\eta.$$

Deci în tot intervalul (a, b)

$$|f-T_n-\lambda Q| < \mu_n,$$

ceeace e în contradicţie cu faptul că T_n este un polinom de cea mai bună aproximaţie de gradul n. Deci:

Dacă T_n este polinomul de cea mai bună aproximaţie de gradul n al funcţiei continue $f(x)$, diferenţa $f(x)-T_n(x)$ atinge valorile $\pm\mu_n$ în cel puţin $n+2$ puncte consecutive cu semne alternate.

15. — Prima teoremă a D-lui E. Borel. Fie P un polinom de gradul n, diferit de polinomul T_n, şi să presupunem că diferenţa $f(x)-P(x)$ atinge valorile $\pm M(|f-P|)$ în cel puţin $n+2$ puncte consecutive cu semne alternate. Fie $x'_1 < x''_1 < x'_2 < x''_2 < \dots$ $n+2$ puncte unde $\pm M(|f-P|)$ este alternativ atins, x'_r fiind puncte x' iar x''_r puncte x'' (s'ar fi putut începe şirul şi cu un punct x''). Avem

$$M(|f-T_n|) < M(|f-P|).$$

Dacă punem

$$\psi(x) = (f(x)-P(x)) - (f(x)-T_n(x)) = T_n(x)-P(x)$$

rezultă

$$\psi(x'_1)>0, \quad \psi(x''_1)<0, \quad \psi(x'_2)>0, \quad \psi(x''_2)<0, \dots$$

deci $\psi(x)$ se anulează cel puţin de $n+1$ ori. Cum această funcţie este un polinom de gradul n rezultă că $T_n \equiv P$.

Ţinând seamă de cele ce preced putem deci enunţa următoarea teoremă, pe care o vom numi *prima teoremă a D-lui* Borel:

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca P să fie polinomul T_n, al unei funcţii continue $f(x)$, este ca diferenţa $f-P$ să atingă maximul valorii sale absolute în cel puţin $n+2$ puncte consecutive, cu semne alternate.

Proprietatea aceasta se mai poate enunţa şi sub forma următoare:

Fie x_r punctele unde diferenţa $|f-P|$ atinge valoarea sa maximă. Pentru ca P să fie polinomul T_n, al funcţiei continue $f(x)$, e necesar şi suficient ca să nu existe nici un polinom $Q(x)$ de gradul n care să ia, în punctele x_r, valori diferite de zero şi de acelaşi semn cu $f(x_r)-P(x_r)$.

Condiţia este suficientă. Dacă $P(x)$ nu este polinomul T_n, avem

$$|f(x_r)-P(x_r)| > |f(x_r)-T_n(x_r)|$$

deci

$$\operatorname{sg}(T_n(x_r)-P(x_r)) = \operatorname{sg}(f(x_r)-P(x_r))\text{ [6]}$$

deoarece

$$T_n-P = (f-P)-(f-T_n).$$

Rezultă că polinomul

$$Q(x)=T_n(x)-P(x)$$

contrazice ipoteza noastră.

Condiţia este necesară. Printre punctele x_r putem alege $n+2$ puncte consecutive $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \dots$, unde $\pm\mu_n$ este atins alternativ de către diferenţa $f-T_n$.

Fie $Q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ un polinom astfel ca

$$\operatorname{sg} Q(x_r)=\operatorname{sg}(f(x_r)-T_n(x_r))$$
$$r=1, 2, \dots, n+2.$$

Trebue să avem

$$a_0x_r^n+a_1x_r^{n-1}+\dots+a_n=Q(x_r) \tag{13}$$
$$r=1, 2, \dots, n+2.$$

Avem un sistem de $n+2$ ecuaţii cu $n+1$ necunoscute $a_0, a_1, \dots, a_n$. Pentru ca să fie compatibil trebue ca determinantul caracteristic să fie nul. Să notăm cu

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)=|1 \quad \alpha_r \quad \alpha_r^2 \quad \dots \quad \alpha_r^{k-1}| \tag{14}$$

determinantul lui Van Der Monde al numerilor $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

Dacă $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$ avem şi $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) > 0$.

(6) Punem ca de obiceiu $\operatorname{sg} z = -1, 0, 1$ după cum $z<0$, $z=0$, $z>0$.

Determinantul caracteristic al sistemului (13) este egal, afară poate de semn, cu

$$\sum_{r=1}^{n+2} |Q(x_r)| V(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_{n+2})$$

şi deci este sigur diferit de zero. Sistemul (13) este deci incompatibil. Teorema este complet demonstrată.

Se poate de altfel arăta uşor că prima teoremă a D-lui BOREL rezultă din proprietatea din urmă. Cele două enunţuri sunt deci echivalente.

Din teorema precedentă rezultă că dacă numărul intervalelor (12) este mai mare decât $n+2$, avem

$$T_n \equiv T_{n+1} \equiv \cdots \equiv T_{m-2}.$$

16. — Despre distribuţia zerorilor polinoamelor $T_n - T_{n-1}$. Se poate deduce din cele ce preced încă o proprietate interesantă.

Să presupunem că polinoamele T_{n-1}, T_n nu coincid, atunci $\mu_{n-1} > \mu_n$. Fie $x'_1 < x''_1 < x'_2 < \cdots$ cele $n+1$ puncte unde $f - T_{n-1}$ atinge alternativ valorile $\pm \mu_{n-1}$. Dacă punem

$$\psi(x) = (f - T_{n-1}) - (f - T_n) = T_n - T_{n-1},$$

avem

$$\psi(x'_1) > 0, \quad \psi(x''_1) < 0, \quad \psi(x'_2) > 0, \ldots$$

deci $\psi(x)$ se anulează în cel puţin n puncte distincte, cuprinse în intervalul (a, b), avem deci următoarea proprietate:

Dacă T_{n-1}, T_n sunt două polinoame consecutive de cea mai bună aproximaţie, ale unei funcţii continue, ecuaţia $T_n - T_{n-1} = 0$ are toate rădăcinile reale, distincte şi cuprinse în intervalul (a, b).

17. — Polinoamele T_n ale funcţiilor de ordinul n. Să întrebuinţăm încă notaţia (14) a determinantului lui VAN DER MONDE. Să notăm apoi cu $U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f)$ determinantul ce se obţine din $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ când înlocuim ultima coloană respectiv cu elementele $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_k)$, deci:

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f) = |1 \quad \alpha_r \quad \alpha_r^2 \ldots \alpha_r^{k-2} \quad f(\alpha_r)|. \tag{15}$$

Raportul

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f] = \frac{U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f)}{V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)}$$

se numeşte *diferenţa divizată de ordinul $k-1$* a funcţiei $f(x)$ pe punctele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Se vede că această diferenţă divizată e simetrică faţă de punctele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Dacă diferenţa divizată $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$ a funcţiei $f(x)$ nu schimbă de semn, oricare ar fi cele $n+2$ puncte distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ ale intervalului (a, b), zicem că funcţia este *de ordinul n* în acest interval. Mai exact, zicem că $f(x)$ este o funcţie *convexă, neconcavă, polinomială, neconvexă* sau *concavă de ordinul n*, în intervalul (a, b), dacă avem

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] >, \geq, =, \leq \text{ sau } < 0$$

în acest interval (7).

Funcţia polinomială de ordinul n este un polinom de gradul n. Reciproc, orice polinom de gradul n este o funcţie (polinomială) de ordinul n. Caracterul de convexitate de ordinul n al unei funcţii nu se schimbă prin adăogarea unui polinom de gradul n.

Funcţiile definite astfel se bucură de următoarea proprietate:

O funcţie de ordinul n nu poate lua în mai mult de $n+2$ puncte consecutive valori diferite de zero şi cu semne alternate.

Demonstraţia e imediată şi se bazează pe formula

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} f(\alpha_j) V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_k) \tag{16}$$

care ne va folosi şi mai jos.

Dacă proprietatea nu ar fi adevărată ar exista cel puţin $n+3$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+3}$ în care $f(x)$ să ia valori diferite de zero şi cu semne alternate. Am avea deci

$$[\mathrm{sg}\, f(x_r)] \cdot [\mathrm{sg}\, f(x_{r+1})] = -1, \quad r = 1, 2, \ldots, n+2.$$

Dar, în virtutea formulei (16), avem

$$\mathrm{sg}\, [x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] = \mathrm{sg}\, f(x_{n+2})$$
$$\mathrm{sg}\, [x_2, x_3, \ldots, x_{n+3}; f] = \mathrm{sg}\, f(x_{n+3})$$

ceeace este în contrazicere cu proprietatea de convexitate. Proprietatea noastră este deci demonstrată.

Am făcut ipoteza restrictivă că $f(x)$ să fie diferit de zero în punctele considerate. Cetitorul poate găsi uşor cum trebue modificat enunţul în cazul când se înlătură această ipoteză. Noi nu avem nevoe de această proprietate decât sub forma enunţată.

(7) Pentru proprietăţile acestor funcţii a se vedea Tiberiu POPOVICIU „*Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*". Thèse, Paris (Iunie 1933) sau Mathematica vol. VIII pp. 1—86.

Proprietatea precedentă se aplică şi funcţiei $f-\mathrm{P}$, unde P este un polinom de gradul n. Se va aplica deci, în particular, şi funţiei $f-\mathrm{T}_n$ şi anume în punctele unde valoarea absolută a acestei diferenţe atinge valoarea μ_n. Putem dar enunţa proprietatea următoare:

Dacă T_n este polinomul de cea mai bună aproximaţie de gradul n al unei funcţii continue $f(x)$ de ordinul n (şi care nu este polinomială), există $n+2$ şi numai $n+2$ puncte consecutive unde diferenţa $f-\mathrm{T}_n$ atinge valorile $\pm\mu_n$ cu semne alternate.

Se mai poate spune că *dacă funcţia continuă $f(x)$ este de ordinul n* (şi nu este polinomială) *polinoamele T_n, T_{n+1} sunt neapărat distincte.* Cu alte cuvinte în acest caz T_{n+1} este efectiv de gradul $n+1$ şi $\mu_{n+1} < \mu_n$.

18. — A doua teoremă a D-lui E. Borel. D-l E. Borel a arătat că corespondenţa dintre o funcţie continuă şi polinomul său de cea mai bună aproximaţie este continuă.

Fie f şi f^* două funcţii continue şi T_n, T_n^* polinoamele lor de cea mai bună aproximaţie de gradul n. Fie $x'_1 < x''_1 < x'_2 < x''_2 < \ldots$ $n+2$ puncte consecutive unde $f-\mathrm{T}_n$ atinge alternativ valorile $\pm\mu_n$. Avem

$$M(|f^*-\mathrm{T}_n^*|) \leq M(|f^*-\mathrm{T}_n|) \leq M(|f-\mathrm{T}_n|) + M(|f-f^*|)$$
$$\therefore \quad M(|f^*-\mathrm{T}_n^*|) \leq \mu_n + \eta,$$

unde am pus $\eta = M(|f-f^*|)$ pentru simplificare.

Avem

$$\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_n^* = f^* - \mathrm{T}_n^* - (f-\mathrm{T}_n) + (f-f^*)$$

şi se deduce că într'un punct x'_r avem

$$\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_n^* \leq \mu_n + \eta - \mu_n + \eta = 2\eta,$$

iar într'un punct x''_r

$$\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_n^* \geq -\mu_n - \eta + \mu_n - \eta = -2\eta.$$

Ne propunem să arătăm că în cel puţin unul din intervalele (x'_1, x''_1), (x''_1, x'_2), (x'_2, x''_2), ... avem inegalitatea

$$(17) \qquad |\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_n^*| \leq 2\eta.$$

Vom presupune contrarul. Există atunci nişte puncte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, în aceste $n+1$ intervale, astfel ca

$$|\mathrm{T}_n(x_r) - \mathrm{T}_n^*(x_r)| > 2\eta, \quad r = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Avem acum după cele spuse mai sus

$$\mathrm{T}_n(x'_r) - \mathrm{T}^*(x'_r) \leq 2\eta, \quad \mathrm{T}_n(x'_{r+1}) - \mathrm{T}_n^*(x'_{r+1}) \leq 2\eta.$$

Două cazuri se pot întâmpla:

1⁰. Sau avem una din inegalităţile:

$$\mathrm{T}_n(x_{2r-1}) - \mathrm{T}_n^*(x_{2r-1}) > 2\eta, \quad \mathrm{T}_n(x_{2r}) - \mathrm{T}_n^*(x_{2r}) > 2\eta.$$

2⁰. Sau ambele inegalităţi:

$$\mathrm{T}_n(x_{2r-1}) - \mathrm{T}_n^*(x_{2r-1}) < -2\eta, \quad \mathrm{T}_n(x_{2r}) - \mathrm{T}_n^*(x_{2r}) < -2\eta$$

sunt satisfăcute.

Punctele x_{2r-1}, x_{2r} sunt în intervalul (x'_r, x'_{r+1}). Se vede atunci că în cazul 1⁰ diferenţa $\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_n^*$ are un maximum (relativ) în acest interval. In cazul 2⁰ ţinem seamă şi de relaţia

$$\mathrm{T}_n(x''_r) - \mathrm{T}_n^*(x''_r) \geq -2\eta$$

şi cum punctul x''_r este şi el în intervalul (x'_r, x'_{r+1}) vedem că şi în acest caz polinomul $\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_n^*$ are cel puţin un maximum în acest interval.

In definitiv, polinomul $\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_n^*$ are cel puţin un maximum în fiecare din intervalele (x'_1, x'_2), (x'_2, x'_3) . . . La fel se demonstrează că acest polinom are cel puţin câte un minimum (relativ) în fiecare din intervalele (x''_1, x''_2), (x''_1, x''_2), ... Polinomul nostru, care este, prin ipoteză, de gradul n şi neidentic nul, are cel puţin n maxime şi minime, ceeace este imposibil.

Este deci dovedit că inegalitatea (17) are loc în cel puţin unul din cele $n+1$ intervale considerate. Luând într'un astfel de interval $n+1$ puncte fixe şi procedând ca la Nr. 6 vedem că coeficienţii polinomului $\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_n^*$ sunt, în valoare absolută, mai mici decât un număr $2\eta\lambda$, λ fiind un număr fix.

Rezultă că

$$M(|\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_n^*|) < 2\eta\lambda\mathrm{A},$$

unde

$$\mathrm{A} = M(|x|^n + |x|^{n-1} + \cdots + 1).$$

Dacă luăm deci

$$\eta < \frac{\varepsilon}{2\lambda\mathrm{A}},$$

avem

$$M(|\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_n^*|) < \varepsilon.$$

Putem dar enunţa următoarea teoremă, pe care o vom numi a *doua teoremă a* Dlui Borel.

Fiind dat un număr pozitiv ε, se poate determina un alt număr pozitiv δ astfel ca din
$$M(|f - f^*|) < \delta$$
să rezulte
$$M(|T_n - T_n^*|) < \varepsilon.$$

19. — O consecinţă a teoremei precedente. Din teorema precedentă rezultă imediat o consecinţă importantă. Să presupunem că un şir de funcţii continue

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots f_m(x), \ldots \tag{18}$$

converge uniform către o funcţie continuă $f(x)$, în tot intervalul (a, b).

Fiind dat un număr pozitiv δ, există, în virtutea teoremei a doua a Dlui Borel, un număr pozitiv ε astfel ca din
$$M(|f - f^*|) < \delta$$
să rezulte
$$M(|T_n(x; f) - T_n(x; f^*)|) < \varepsilon.$$

Dar, în virtutea uniform convergenţei, există un număr A astfel ca pentru $m > A$ să avem
$$M(|f - f_m|) < \delta$$
deci pentru $m > A$ avem şi
$$M(|T_n(x; f) - T_n(x; f_m)|) < \varepsilon.$$

Avem prin urmare teorema:

Dacă şirul de funcţii continue (18) tinde uniform către funcţia continuă $f(x)$, şirul de polinoame $T_n(x; f_1)$, $T_n(x; f_2), \ldots, T_n(x; f_m), \ldots$ tinde către polinomul de cea mai bună aproximaţie de gradul n al funcţiei $f(x)$.

Bineînţeles că şirul în chestiune converge uniform. De altfel un şir convergent de polinoame de acelaşi grad converge uniform în intervalul (a, b).

20. — Calculul polinomului T_n. Cele ce preced permit calculul polinomului T_n cu orice aproximaţie voim. Dacă f este un polinom calculul lui T_n este o problemă pur algebrică. In adevăr, dacă într'un punct interior intervalului (a, b) avem $|f - T_n| = \mu_n$, derivata polinomului $f - T_n$ se va anula în acest punct. Să observăm însă că $|f - T_n| = \mu_n$ poate avea loc şi într'un punct extrem a sau b sau în ambele extreme ale intervalului (a, b). Polinomul T_n şi aproximaţia μ_n vor fi

determinaţi de sistemul

$$\begin{cases} f(x_r) - T_n(x_r; f) = (-1)^r\rho & r = 1, 2, \ldots, n+2 \\ f'(x_r) - T'_n(x_r; f) = 0 & x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2} \end{cases} \tag{19}$$

sau unul din sistemele ce se obţin presupunând una sau ambele egalităţi $x_1 = a$, $x_{n+2} = b$ satisfăcute şi suprimând din şirul al doilea de ecuaţii (19) cele corespunzătoare acestor indici.

Sistemul (19) precum şi celelalte trei deduse din acesta, aşa cum am arătat, ne determină coeficienţii polinomului T_n, pe ρ, precum şi punctele x_r. Se vede că avem atâtea necunoscute câte ecuaţii. Aceste sisteme admit un număr oarecare de soluţii cari se determină pe cale pur algebrică. Dintre acestea ştim că este una care ne dă pe T_n şi cea mai bună aproximaţie μ_n. Din cele ce vor urma mai jos va rezulta de altfel că există o soluţie pentru care $|\rho|$ are valoarea maximă şi această soluţie ne dă tocmai polinomul T_n.

Vom demonstra mai jos că, oricare ar fi funcţia continuă $f(x)$ şi numărul pozitiv δ, putem găsi un polinom $P(x)$ astfel ca
$$M(|f - P|) < \delta.$$

In particular deci, putem găsi un polinom P astfel ca pentru un ε pozitiv, dat dinainte, să avem
$$M(|T_n(x; f) - T_n(x; P)|) < \varepsilon,$$
deci:

Putem calcula cu orice aproximaţie voim polinoamele de cea mai bună aproximaţie ale unei funcţii continue.

21. — Cea mai bună aproximaţie a lui x^{n+1}. Ca un exemplu să ne propunem să calculăm polinomul $T_n(x; x^{n+1})$ în intervalul $(-1, 1)$. Vedem imediat că μ_n trebue să fie atins şi la extremităţile -1 şi 1 deoarece derivata lui $f - T_n$, care este un polinom de gradul n, nu se poate anula decât în cel mult n puncte. Trebue să avem
$$P^2 - \mu_n^2 = Q^2(x^2 - 1)$$
unde $P = x^{n+1} - T_n(x; x^{n+1})$ şi Q este un polinom de gradul n. Această relaţie exprimă tocmai proprietatea fundamentală a polinomului T_n. Derivând deducem
$$P.P' = Q.Q'(x^2 - 1) + xQ^2 = Q[Q'(x^2 - 1) + xQ].$$

Dar P este evident prim cu Q, rezultă deci că $P' = \lambda Q$, λ fiind o constantă (de altfel avem evident $\lambda = \pm(n + 1)$). Avem deci
$$\pm\lambda\sqrt{\mu_n^2 - P} = P'\sqrt{1 - x^2}$$

sau

$$\frac{dP}{\sqrt{\mu_n^2-P^2}}=\frac{\pm\lambda dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

de unde se vede că P este de forma

$$P=\pm\mu_n\cos(\lambda\arccos x+\alpha)$$

α fiind o nouă constantă.

P trebuind să fie un polinom de gradul $n+1$ şi să înceapă cu x^{n+1} găsim că $\alpha=0$, $\lambda=n+1$,

$$x^{n+1}-T_n(x;x^{n+1})=\frac{1}{2^n}\cos(\overline{n+1}.\arccos x)$$

şi

$$\mu_n(x^{n+1})=\frac{1}{2^n}.$$

Se poate de ducede aci foarte uşor valoarea polinomului $T_n(x;x^{n+1})$ pentru un interval oarecare (a,b). Printr'o transformare liniară, uşor de găsit, deducem

$$x^{n+1}-T_n(x;x^{n+1})=\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}\cos\left(\overline{n+1}.\arccos\frac{2x-a-b}{b-a}\right) \tag{20}$$

şi

$$\mu_n(x^{n+1})=\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Polinomul (20) este polinomul care diferă cel mai puţin de zero dintre toate polinoamele de gradul $n+1$ care încep cu x^{n+1}. Acest polinom a fost determinat pentru prima dată de către Tchebychef.

LECŢIA III

Rezultatele Dlui Ch. de la Vallée Poussin

22. — Cea mai bună aproximaţie pe $n+2$ puncte. Să considerăm acum o funcţie uniformă $f(x)$ definită numai pe $n+2$ puncte

$$x_1<x_2<\cdots<x_{n+2}. \tag{E}$$

Maximul $M(|f-P|)$ va fi definit de formula

$$M(|f-P|)=\max_{r=1,2,\ldots,n+2}(|f(x_r)-P(x_r)|)$$

Pentru toate polinoamele $P(x)$ de gradul n expresia $M(|f-P|)$ are un minimum pe care îl vom nota cu $\rho_n(f)$ sau mai simplu cu ρ_n.

Se arată uşor că acest minimum este atins de cel puţin un polinom de gradul n. Vom nota cu $E_n(x)$, sau mai simplu cu E_n, un astfel de polinom. E_n este un polinom de cea mai bună aproximaţie de gradul n al funcţiei f pe cele $n+2$ puncte (E), iar ρ_n este cea mai bună aproximaţie a lui f prin polinoame de gradul n pe cele $n+2$ puncte considerate.

Fie ξ_0 un punct la stânga lui x_1 şi ξ_{n+2} un punct la dreapta lui x_{n+2}, iar ξ_r mijlocul intervalului (x_r, x_{r+1}), $r=1,2,\ldots n+1$.

Din şirul de puncte $\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n+1},\xi_{n+2}$ putem alege un alt şir $\xi_0,\xi_{j_1},\ldots,\xi_{j_{m+1}},\xi_{n+2}$ care să ne determine m intervale consecutive

$$L_1, L_2,\ldots,L_m$$

bucurându-se de următoarele proprietăţi:

1°. Există cel puţin un interval L_s.

2°. Fiecare interval conţine sau puncte x_r unde $f-E_n=\rho_n$ sau puncte x_r unde $f-E_n=-\rho_n$ dar numai puncte de acelaşi fel. Dacă L_s conţine puncte de un fel intervalele L_{s+1} şi L_{s+1} conţin puncte de felul contrar. Pentru fixarea ideiilor vom presupune că L_1 conţine puncte unde $f-E_n=\rho_n$.

Rezultă imediat că în intervalele $L_1, L_3, L_5,\ldots$, avem

$$-\rho_n<f-E_n\le\rho_n,$$

iar în intervalele $L_2, L_4, L_6,\ldots$, avem

$$-\rho_n\le f-E_n<\rho_n.$$

Să luăm acum polinomul de gradul n

$$Q(x)=(x-\xi_{j_1})(x-\xi_{j_2})\ldots(x-\xi_{j_{m+1}})\qquad(m\le n+1)$$

şi vom determina semnul constantei λ astfel ca $\lambda Q>0$ în intervalul L_1.

Punctele (E) fiind în număr finit, se vede imediat că putem lua pe λ destul de mic în valoare absolută astfel cu în toate aceste puncte să avem

$$-\rho_n<f-E_n-\lambda Q<\rho_n$$

de unde rezultă teorema:

Dacă E_n este un polinom de cea mai bună aproximaţie de gradul n al funcţiei f pe cele $n+2$ puncte (E), *diferenţa $f-E_n$ ia valori egale şi de semne contrare în două puncte consecutive ale şirului* (E).

Lăsăm la o parte, atât aci cât şi mai jos, cazul când $\rho_n=0$. In acest caz există un polinom de gradul n care ia valorile $f(x_r)$ în punctele x_r.

23 — Determinarea polinomului E_n. Proprietatea demonstrată arată imediat că polinomul E_n este determinat complet şi în mod unic. Calculul polinomului E_n, precum şi a celei mai bune aproximaţii ρ_n, se face rezolvând sistemul

$$E_n(x_r) = f(x_r) + (-1)^r \rho'_n \qquad (\rho_n = |\rho'|)$$
$$r = 1, 2, \ldots, n+2$$

care trebue să fie compatibil.

Pentru a putea pune pe ρ_n şi polinomul E_n sub o formă explicită vom întrebuinţa notaţiile dela Nr. 16, 17 precum şi formula (16).

Avem cu aceste notaţii

(21) $$\rho'_n = \frac{(-1)^{n+1} U(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f)}{\sum_{r=1}^{n+2} V(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_{n+2})}.$$

Polinomul E_n se determină şi el uşor cu ajutorul formulei de interpolare a lui LAGRANGE

$$E_n = \sum_{r=1}^{n+2} [f(x_r) + (-1)^r \rho'^{*}_n] \frac{G(x)}{(x - x_r) G'(x_r)}$$

unde
$$G(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+2}).$$

Avem însă
$$G'(x_r) = \frac{(-1)^{n+2-r} V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})}{V(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_{n+2})}$$

aşa că putem scrie

$$E_n = \frac{(-1)^{n+2}}{V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})} \sum_{r=1}^{n+2} [\rho'_n + (-1)^r f(x_r)].$$

$$. V(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_{n+2}) \frac{G(x)}{x - x_r}.$$

Acest polinom este, în aparenţă, de gradul $n+1$ însă, în virtutea relaţiei (21), coeficientul lui x^{n+1} este nul.

Cea mai bună aproximaţie ρ_n este egală cu:

(22) $$\rho_n = \frac{|U(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f)|}{\sum_{r=1}^{n+2} V(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_{n+2})}$$

24. Prima teoremă a D-lui CH. de la VALLÉE POUSSIN. Să presupunem acum că un polinom $P(x)$ de gradul n este astfel ales încât numerile $f(x_r) - P(x_r)$, $r = 1, 2, \ldots, n+2$ să fie de semne alternate. Observăm că cea mai bună aproximaţie a lui f este egală cu aceea a lui $f - P$, prin urmare în acest caz formula (22) devine

$$\rho_n = \frac{\sum_{r=1}^{n+2} |f(x_r) - P(x_r)| \, V(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_{n+2})}{\sum_{r=1}^{n+2} V(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_{n+2})},$$

care este o valoare medie a numerilor $|f(x_r) - P(x_r)|$ şi putem aşa dar să enunţăm teorema următoare, pe care o vom numi *prima teoremă* a D-lui CH. de la VALLÉE POUSSIN:

Dacă un polinom P *de gradul* n *este astfel ca* $f - P$ *să ia valori de semne contrare în două puncte consecutive ale şirului* (E) *avem*

$$\min_{r=1,2,\ldots,n+2} (|f(x_r) - P(x_r)|) < \rho_n < \max_{r=1,2,\ldots,n+2} (|f(x_r) - P(x_r)|)$$

presupunând că numerile $|f(x_r) - P(x_r)|$ *nu sunt toate egale între ele.*

Această proprietate ne va permite să tragem o concluzie importantă relativă la cea mai bună aproximaţie într'un interval întreg.

25. — A doua teoremă a D-lui CH. de la VALLÉE POUSSIN. Să luăm funcţia f definită şi continuă în intervalul (a, b). Există, în virtutea primei teoreme a D-lui E. BOREL, o mulţime (E^*) de $n+2$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ astfel ca cea mai bună aproximaţie ρ^*_n pe aceste puncte să fie egală cu cea mai bună aproximaţie μ_n a funcţiei f în intervalul (a, b). Fie E_n polinomul de cea mai bună aproximaţie de gradul n pe (E^*).

Dacă $|f - E_n| \leq \rho^*_n$ în intervalul (a, b) atunci cea mai bună aproximaţie ρ_n pe orice mulţime (E) de $n+2$ puncte e cel mult egală cu ρ^*_n.

Să presupunem din contră că ar exista un punct x' unde $|f(x) - E_n(x)| > \rho^*_n$. Dacă x' cade între x, x_{r+1} diferenţa $f - E_n$ are acelaşi semn în x' ca şi în x_r sau în x_{r+1}. Pe baza rezultatelor din Nr. precedent, cea mai bună aproximaţie e mai mare decât ρ^*_n pe cel puţin una din mulţimile de puncte

(23) $$\begin{cases} x_1, \ldots, x_r, x', x_{r+2}, \ldots, x_{n+2} \\ x_1, \ldots, x_{r-1}, x', x_{r+1}, \ldots, x_{n+2}. \end{cases}$$

Acelaşi lucru se întâmplă dacă x' cade în afară de intervalul (x_1, x_{n+2}).

Pe de altă parte formula (22) ne arată că ρ_n este o funcţie continuă de $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ şi are un maximum atins neapărat pentru cel puţin o anumită mulţime (E).

Ţinând seamă deci de prima teoremă a D-lui BOREL putem enunţa următoarea proprietate:

Cea mai bună aproximaţie μ_n a unei funcţii continue $f(x)$ în intervalul (a, b) este egală cu cea mai bună aproximaţie pe $n+2$ puncte ale intervalului, aceste puncte fiind astfel alese încât ρ_n să aibă cea mai mare valoare posibilă.

Cu alte cuvinte
$$\mu_n(f) = \max \rho_n(f).$$

Această teoremă este adevărată şi când funcţia $f(x)$ este definită pe un număr finit de puncte sau pe o mulţime, mărginită şi închisă, oarecare.

26. Aplicaţii la funcţiile cu diferenţe mărginite. In unele cazuri formula (22) permite o limitare a celei mai bune aproximaţii.

Se zice că funcţia $f(x)$ este cu a n^a *diferenţă divizată mărginită* în intervalul (a, b) dacă expresia
$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f],$$
definită la Nr. 17, rămâne mărginită când $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sunt $n+1$ puncte distincte oarecari ale intervalului (a, b).

Numărul
$$\Delta_n[f] = \max_{\text{în } (a,b)} |[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]|$$
se numeşte a n^a *margine* sau marginea de ordinul n a funcţiei f în intervalul (a, b).

Presupunând încă $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$, formula (22) se poate scrie
$$\rho_n = \frac{V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})}{\sum_{i=1}^{n+2} V(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+2})} |[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]|.$$
Dar
$$\max_{\text{în } (a,b)} \frac{V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})}{\sum_{i=1}^{n+2} V(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+2})}$$
este egal cu cea mai bună aproximaţie a lui x^{n+1} prin polinoame de

gradul n. Acest maximum este egal deci cu (Nr. 21)
$$\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$
prin urmare:

Dacă funcţia $f(x)$ este cu a $(n+1)^a$ diferenţă divizată mărginită în intervalul (a, b), avem
$$\mu_n(f) \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \Delta_{n+1}[f].$$

In particular, dacă f admite o derivată mărginită de ordinul $n+1$ şi dacă, conform notaţiilor noastre, însemnăm cu $\Delta_0[f^{(n+1)}]$ maximul sau marginea superioară a lui $|f^{(n+1)}|$ în intervalul (a, b) avem
$$\Delta_0[f^{(n+1)}] = (n+1)!\ \Delta_{n+1}[f]$$
prin urmare:
$$\mu_n(f) \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!} \Delta_0[f^{(n+1)}]$$

27. — Modulul de oscilaţie al unei funcţii. Atât pentru a obţine o limitare a lui μ_n cât şi pentru problema care va fi tratată în lecţia următoare trebue să definim *modulul de oscilaţie* $\omega(\delta)$ al funcţiei $f(x)$. Acest modul de oscilaţie este o funcţie de δ, care prin definiţie este
$$\omega(\delta) = \max |f(x') - f(x'')|$$
când x', x'' sunt două puncte oarecari, în intervalul (a, b), astfel ca $|x' - x''| \leq \delta$.

$\omega(\delta)$ este o funcţie definită pentru $0 < \delta \leq b-a$, nedescrescătoare şi care nu devine negativă. Avem evident inegalitatea

$$|f(x') - f(x'')| \leq \omega(|x' - x''|). \tag{24}$$

Funcţia $\omega(\delta)$ se bucură de diferite proprietăţi dintre cari reamintim cele mai importante. Fiind dat un $\varepsilon > 0$, există un cuplu de două puncte $x' < x''$ astfel ca $|x' - x''| \leq \delta$ şi
$$\omega(\delta) - \varepsilon < |f(x') - f(x'')|.$$

Să împărţim intervalul (x', x'') în k părţi egale prin punctele $x' = x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k = x''$ vom avea
$$f(x') - f(x'') = \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i+1})]$$

de unde

$$|f(x') - f(x'')| \leq k\omega\left(\frac{\delta}{k}\right)$$

deci

$$\omega(\delta) < k\omega\left(\frac{\delta}{k}\right) + \varepsilon$$

oricare ar fi ε. k fiind un întreg pozitiv şi punând $k\delta$ în loc de δ avem deci

$$\omega(k\delta) \leq k\omega(\delta).$$

Dacă k este un număr pozitiv şi k' întregul cuprins în k avem

$$\omega(k\delta) \leq \omega(k'+1\delta) \leq (k'+1)\omega(\delta).$$

Rezultă că

$$\omega(k\delta) < (k+1)\omega(\delta)$$

oricare ar fi numărul pozitiv k (astfel bineînţeles ca δ şi $k\delta$ să fie $\leq b-a$). Avem deci pentru $\delta \leq b-a$

$$|f(x') - f(x'')| < \left[\frac{|x'-x''|}{\delta} + 1\right]\omega(\delta). \tag{25}$$

In fine, condiţia necesară şi suficientă ca funcţia f să fie continuă este ca $\omega(\delta) \to 0$, pentru $\delta \to 0$.

28. — Limitarea inferioară a lui μ_n. Să calculăm o limitare inferioară a lui μ_n. Când x_i sunt $n+2$ puncte date în intervalul (a, b), membrul al doilea al expresiei (22) reprezintă o limitare inferioară pentru μ_n.

Să luăm în particular,

$$x_i = a + \frac{b-a}{n+1}(i-1) \qquad i = 1, 2, \ldots, n+2$$

şi fie $f_1(x)$ o funcţie care este continuă, liniară în fiecare din intervalele (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, n+1$ şi

$$f_1(x_i) = (-1)^{n+2-i}\frac{b-a}{2(n+1)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n+2.$$

In acest caz

$$\mu_n(f_1) \geq \frac{b-a}{2(n+1)}.$$

Să calculăm modulul de oscilaţie al funcţiei $f_1(x)$.

Avem

$$\max\left|\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''}\right| = 1.$$

pentru $|x' - x''| \leq \frac{b-a}{n+1}$, deci pentru $\delta \leq \frac{b-a}{n+1}$ avem

$$\omega(\delta) = \delta.$$

Pentru $n \geq 1$ putem dar scrie

$$\mu_n(f_1) \geq \omega\left(\frac{b-a}{2(n+1)}\right) \geq \frac{n}{3n+2}\,\omega\left(\frac{b-a}{n}\right) \geq \frac{1}{5}\,\omega\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

29. — Limitarea superioară a lui μ_n. In lecţia următoare vom indica limitarea superioară a lui μ_n. Voim să indicăm aici o cale *directă* care, dacă ar putea fi urmărită până la sfârşit, ne-ar putea eventual da soluţia acestei probleme. Numitorul expresiei (22) se poate scrie sub forma

$$2D(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})$$

unde

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^n - x_1^n & (-1)^n \\ x_3 - x_2 & x_3^2 - x_2^2 & \ldots & x_3^n - x_2^n & (-1)^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n+1} - x_n & x_{n+1}^2 - x_n^2 & \ldots & x_{n+1}^n - x_n^n & -1 \\ x_{n+2} - x_{n+1} & x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+2}^n - x_{n+1}^n & 1 \end{vmatrix}.$$

E de observat că minorii ultimei coloane sunt pozitivi, căci presupunem şi aici $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2}$.

In adevăr avem

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^n - x_1^n \\ x_3 - x_2 & x_3^2 - x_2^2 & \ldots & x_3^n - x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_i - x_{i-1} & x_i^2 - x_{i-1}^2 & \ldots & x_i^n - x_{i-1}^n \\ x_{i+2} - x_{i+1} & x_{i+2}^2 - x_{i+1}^2 & \ldots & x_{i+2}^n - x_{i+1}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n+2} - x_{n+1} & x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+2}^n - x_{n+1}^n \end{vmatrix} =$$

$$= n!\int_{x_1}^{x_2}\cdots\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}}\cdots\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} V(t_1, t_2, \ldots, t_n)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n > 0.$$

Dacă scădem fiecare linie din următoarea şi ţinem seamă de (24), deducem

$$|\mathrm{U}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f)| \leq$$

$$\leq \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^n - x_1^n & (-1)^n \omega(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_2 & x_3^2 - x_2^2 & \cdots & x_3^n - x_2^n & (-1)^{n-1} \omega(x_3 - x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n+2} - x_{n+1} & x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+2}^n - x_{n+1}^n & \omega(x_{n+2} - x_{n+1}) \end{vmatrix}.$$

Ţinând seamă de (25) şi de observaţia precedentă, deducem

$$|\mathrm{U}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f)| < \left| \frac{\mathrm{D}_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})}{\delta} + \mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) \right| \omega(\delta).$$

Avem aici

$$\mathrm{D}_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^n - x_1^n & (-1)^n (x_2 - x_1) \\ x_3 - x_2 & x_3^2 - x_2^2 & \cdots & x_3^n - x_2^n & (-1)^{n-1} (x_3 - x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n+2} - x_{n+1} & x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+2}^n - x_{n+1}^n & x_{n+2} - x_{n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= 2(n!) \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_2}^{x_3} \cdots \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} \mathrm{D}(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1})\, dt_1, dt_2 \ldots dt_{n+1}.$$

Dacă deci notăm cu θ_n maximul câtului

(26)
$$\frac{\mathrm{D}_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})}{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})},$$

când punctele $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2}$ descriu intervalul (a, b), avem

$$\mu_n(f) < \left[\frac{\theta_n}{2\delta} + \frac{1}{2}\right] \omega(\delta).$$

Se poate uşor vedea că $\theta_n < b - a$, luând deci $\delta = \theta_n$, găsim

$$\mu_n(f) < \omega(\theta_n).$$

Din nefericire determinarea lui θ_n pare a fi o problema complicată. E probabil că pentru $n \to \infty$ acest număr e de ordinul lui $\frac{1}{n}$. Ar fi interesant de demonstrat, ca un prim rezultat, că $\theta_n \to 0$ pentru $n \to \infty$.

Se poate uşor arăta că dacă două sau mai multe puncte x_i tind să se confunde, expresia (26) tinde către 0. Raportul (26) este o funcţie

omogenă şi de gradul 1 în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ şi depinde numai de diferenţele $x_i - x_j$. Rezultă că maximul nu poate fi atins decât pentru $x_1 = a$, $x_{n+2} = b$.

Fie, în particular, $n = 2$. Avem punctele $x_1 = a$, $x_2 = y$, $x_3 = x$, $x_4 = b$ şi raportul (26) se scrie

$$\frac{2(y-a)(b-x)(x-y)(b-a+x-y)}{(x-a)(b-y)(b-a+y-x)}.$$

Pentru calcularea maximului se poate aplica calculul diferenţial. Anulând derivatele parţiale logaritmice găsim

$$-\frac{1}{b-x} + \frac{1}{x-y} + \frac{1}{b-a+x-y} - \frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-a+y-x} = 0$$

$$\frac{1}{y-a} - \frac{1}{x-y} - \frac{1}{b-a+x-y} + \frac{1}{b-y} - \frac{1}{b-a+y-x} = 0.$$

Adunând se găseşte

$$\frac{b-a}{(y-a)(b-y)} = \frac{b-a}{(x-a)(b-x)}$$

sau

$$(x-y)(x+y-a-b) = 0.$$

Maximul se obţine deci pentru $x + y = a + b$, adică pentru x şi y simetrici faţă de mijlocul intervalului (a, b). Se găseşte apoi că x trebue să fie rădăcina cuprinsă între $\frac{a+b}{2}$ şi b a ecuaţiei

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + (b-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^2}{4} = 0$$

deci

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

şi

$$\theta_2 = 2(b-a)(\sqrt{2} - 1)^2.$$

E important de observat că punctele x, y nu divid raţional intervalul (a, b). Mai mult, coeficienţii polinomului

$$(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(z - x_4),$$

când x_1, x_2, x_3, x_4 sunt punctele pentru cari maximul este atins, *nu sunt raţionali în raport cu a şi b*. Acest fapt, care probabil are loc pentru n oarecare, este cauza principală a dificultăţii determinării maximului θ_n.

LECŢIA IV

Teorema lui Weierstrass

30. — Teorema lui Weierstrass. K. Weierstrass a demonstrat următoarea teoremă [8]:

Orice funcţie continuă în intervalul (a, b) *este limita unui şir de polinoame, uniform convergent în acest interval.*

Demonstraţia nu se bazează pe teoria polinoamelor T_n. Rezultă însă din această teoremă că

$$\mu_n(f) \to 0, \quad \text{pentru} \quad n \to \infty \tag{27}$$

dacă funcţia este continuă.

E evident, de altfel, că pentru orice funcţie f avem

$$\mu_0 \geq \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n \geq \cdots$$

aşa că limita

$$\lim \mu_n(f) = \mu, \quad \text{pentru} \quad n \to \infty$$

există şi este ≥ 0.

Dacă $\mu = 0$ şirul de polinoame T_n converge absolut şi uniform în (a, b). Rezultă dar că pentru o funcţie discontinuă cu siguranţă avem $\mu \neq 0$. Teorema lui Weierstrass ne spune că pentru o funcţie continuă avem cu siguranţă $\mu = 0$.

Problema importantă ar fi de a demonstra relaţia (27) direct, bazându-ne numai pe proprietăţile polinoamelor T_n. Dacă de exemplu s'ar putea arăta că numărul θ_n definit la Nr. 29 tinde către zero pentru $n \to \infty$, problema ar fi rezolvată.

Inainte de a demonstra teorema lui Weierstrass vom arăta un rezultat al Dlui L. Tonelli în legătură cu o astfel de demonstraţie directă.

31. — Teorema Dlui L. Tonelli. Să presupunem că şirul de polinoame

$$T_0(x; f),\ T_1(x; f), \ldots, T_n(x; f), \ldots \tag{28}$$

converge uniform către o funcţie continuă $F(x)$ şi că avem $\mu > 0$, atunci

$$M(|f - F|) \leq M(|f - T_n|) + M(|F - T_n|) \leq \mu_n + M(|F - T_n|).$$

Se deduce uşor că

$$M(|f - F|) \leq \mu.$$

[8] K. Weierstrass „*Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente*". Werke Bd. III. p. 1–37.

$f - F$ fiind o funcţie continuă, putem determina un $\delta > 0$ astfel ca, în orice interval de lungime $\leq \delta$, oscilaţia acestei funcţii să fie mai mică decât μ. Pe de altă parte putem găsi un număr $n > \frac{b-a}{\delta}$ astfel ca să avem

$$M(|F - T_n|) < \varepsilon < \frac{\mu}{2}.$$

Ştim că există cel puţin $n + 2$ puncte în cari $\pm \mu_n$ este alternativ atins şi, din felul cum a fost ales n $\left[n > \frac{b-a}{\delta}\right]$, rezultă că există printre aceste $n + 2$ puncte cel puţin două x', x'' astfel ca

$$|x' - x''| < \delta,$$

$$f(x') - T_n(x') = \mu_n, \quad f(x'') - T_n(x'') = -\mu_n,$$

de unde

$$f(x') - F(x') = [f(x') - T_n(x')] + [T_n(x') - F(x')] > \mu_n - \varepsilon \geq \mu - \varepsilon > \frac{\mu}{2};$$

$$f(x'') - F(x'') = [f(x'') - T_n(x'')] + [T_n(x'') - F(x'')] < -\mu_n + \varepsilon \leq -\mu + \varepsilon < -\frac{\mu}{2}.$$

Rezultă că oscilaţia funcţiei $f - F$ în intervalul (x', x'') este mai mare decât μ, ceeace este imposibil. Ipoteza $\mu > 0$ nu e deci bună. Prin urmare trebue să avem $\mu = 0$. Avem aşa dar următoarea teoremă a Dlui Tonelli:

Dacă şirul de polinoame (28) *converge absolut şi uniform către o funcţie* (neapărat continuă), *această funcţie coincide cu* $f(x)$.

32. — Polinoamele Dlui S. Bernstein. Vom demonstra teorema lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor D-lui S. Bernstein. Trebue deci, înainte de toate, să dăm definiţia acestor polinoame.

Să divide intervalul (a, b) în n părţi egale şi fie

$$a_i = a + i\frac{b-a}{n}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n \quad (a_0 = a,\ a_n = b)$$

punctele de diviziune.

Un polinom de gradul n al cărui coeficienţi depind liniar şi omogen de cele $n + 1$ valori $f(a_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, se numeşte un *polinom de interpolare de gradul* n al funcţiei $f(x)$. Vom studia, in particular, polinomul de interpolare introdus de Dl S. Bernstein [9]

$$P_n(x; f) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f(a_i)\,(x-a)^i\,(b-x)^{n-i}.$$

[9] Pentru referinţe a se vedea Pólya u. Szegő „*Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*", t. I, p. 66.

E interesant de observat cum se poate obține acest polinom pe o cale oarecum geometrică.

Fie $A_0, A_1, \dots, A_n$ punctele reprezentative ale funcției $f(x)$ pentru $x=a_0, a_1, \dots, a_n$ adică punctele de coordonate $a_i, f(a_i)$. Să construim linia poligonală $A_0A_1\dots A_n$.

Să luăm pe laturile $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ ale liniei poli-

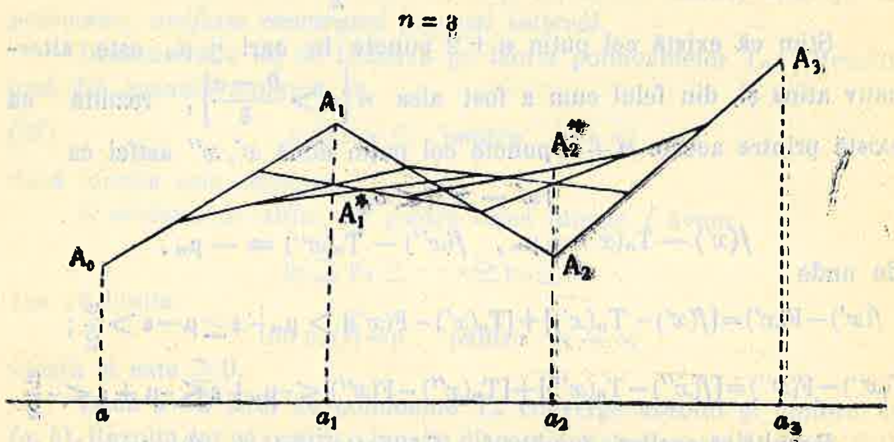

Fig. 1.

gonale punctele $A'_0, A'_1, \dots, A'_{n-1}$ cari împart aceste laturi în acelaș sens și într'un acelaș raport. Alegem acest raport astfel ca

$$A_0A'_0 = A_1A'_1 = \dots = A_{n-1}A'_{n-1} = \frac{s}{n}\cdot\frac{b-a}{n},$$

s fiind un întreg, $0 \le s \le n$. In linia poligonală $A'_0A'_1\dots A'_{n-1}$ înscriem în acelaș mod linia poligonală $A''_0A''_1\dots A''_{n-2}$ păstrând sensul și raportul împărțirii laturilor; avem deci tot

$$A'_0A''_0 = A'_1A''_1 = \dots = A'_{n-2}A''_{n-2} = \frac{s}{n}\cdot\frac{b-a}{n}.$$

Continuând acest procedeu, înscriem succesiv liniile poligonale $A_0^{(k)}A_1^{(k)}\dots A_{n-k}^{(k)}$, $k=3,4,\dots,n$. Ultima se reduce la un punct $A_0^{(n)}$. Avem

$$A_0A'_0 = A'_0A''_0 = \dots = A_0^{(n-1)}A_0^{(n)} = \frac{s}{n}\cdot\frac{b-a}{n}$$

așa că abscisa lui $A_0^{(n)}$ este tocmai

$$a + s\frac{b-a}{n} = a_s.$$

Să notăm acest punct $A_0^{(n)}$ cu A_s^*, pentru a pune în evidență numărul s, și să calculăm ordonata lui A_s^*. Pentru $i=0$ și $i=n$ punctul A_i coincide cu A_0 și A_n respectiv. In general, să notăm cu b_s ordonata lui A_s, cu $b_r^{(k)}$ ordonata lui $A_r^{(k)}$ și cu b_s^* ordonata lui A_s^*. Avem

$$b_r^{(k)} = \frac{(n-s)\,b_r^{(k-1)} + s\,b_{r+1}^{(k-1)}}{n}, \quad r=0,1,\dots,n-k,\ k=1,2,\dots,n-1 \tag{29}$$

și

$$b_s^* = \frac{(n-s)\,b_0^{(n-1)} + s\,b_1^{(n-1)}}{n}. \tag{30}$$

Din (29) deducem succesiv

$$b_r^{(1)} = \frac{(n-s)\,b_r + s b_{r+1}}{n}$$

$$b_r^{(2)} = \frac{(n-s)^2 b_r + 2s(n-s)b_{r+1} + s^2 b_{r+2}}{n^2}$$

. . . .

și în general

$$b_r^{(k)} = \frac{1}{n^k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} s^i (n-s)^{k-i} b_{r+i}, \quad r=0,1,\dots,n-k.$$

Formula (30) ne dă deci

$$b_s^* = \frac{1}{n^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} s^i (n-s)^{n-i} b_i.$$

Revenind acum la polinomul $P_n(x;f)$ observăm că avem:

$$P_n\left[a + s\,\frac{b-a}{n}; f\right] = \frac{1}{n^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} s^i (n-s)^{n-i} f(a_i).$$

Rezultă dar că *polinomul Dlui* BERNSTEIN $P_n(x;f)$ *este polinomul lui* LAGRANGE *care ia valorile* b_s^* *pentru punctele* a_s.

33.— Determinarea unei limite superioare pentru $|f(x)-P_n(x;f)|$. Să determinăm o limită superioară pentru $|f - P_n(x;f)|$. Observăm că $P_n(x;1) \equiv 1$, de unde deducem, folosindu-ne de modulul de oscilație $\omega(\delta)$ definit la No. 27,

$$|f - P_n(x;f)| = \left|\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}[f(x)-f(a_i)](x-a)^i(b-x)^{n-i}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{(b-a)^n}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\omega(|x-a_i|)(x-a)^i(b-x)^{n-i} <$$

$$< \left\{\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}|x-a_i|(x-a)^i(b-x)^{n-i} + 1\right\}\omega(\delta).$$

Să punem

(31) $$\psi(x)=\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\,|x-a_i\,|\,(x-a)^i(b-x)^{n-i}$$

şi

$$N_n=\max_{\text{în }(a,b)}\psi(x).$$

Punând în fine $\delta=2N_n$, deducem (se va vedea că efectiv $\delta\leq b-a$)

(32) $$|f-P_n(x\,;f)\,|<\frac{3}{2}\,\omega(2N_n).$$

34. — Aproximaţia dată de polinomul $P_n(x;f)$. Putem acum calcula aproximaţia dată de polinoamele $P_n(x;f)$. Să calculăm întâi funcţia $\psi(x)$. Avem în intervalul $(a_j,\,a_{j+1})$,

$$\psi(x)=\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{i=0}^{j}\binom{n}{j}(x-a_i)\,(x-a)^i(b-x)^{n-i}+$$

$$+\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{i=j+1}^{n}\binom{n}{i}(a_i-x)\,(x-a)^i(b-x)^{n-i}=$$

$$=\frac{2}{(b-a)^n}\sum_{i=0}^{j}\binom{n}{i}(x-a_i)\,(x-a)^i(b-x)^{n-i},$$

deoarece se verifică uşor că

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(a_i-x)\,(x-a)^i(b-x)^{n-i}=0.$$

Făcând calculele, găsim

$$\psi(x)=\frac{2}{(b-a)^n}\binom{n-1}{j}(x-a)^{j+1}(b-x)^{n-j}.$$

Maximul acestui polinom în intervalul $(a_j,\,a_{j+1})$ este atins pentru

$$x=\frac{(j+1)\,b+(n-j)\,a}{n+1}$$

şi are ca valoare

(33) $$2(b-a)\binom{n-1}{j}\frac{(j+1)^{j+1}(n-j)^{n-j}}{(n+1)^{n+1}}=2(b-a)\lambda_j.$$

Funcţia $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}$ este descrescătoare când $x\geq 1$ creşte. Rezultă

că avem

$$\left(\frac{j+2}{j+1}\right)^{j+2}>\left(\frac{n-j}{n-j-1}\right)^{n-j}\quad\text{pentru}\quad n>\frac{j+1}{2}$$

sau

$$\lambda_{j+1}>\lambda_j.$$

Deducem de aci că (33) atinge maximul ei pentru $j=\dfrac{n}{2}$ sau $j=\dfrac{n-1}{2}$ după cum n este par sau impar.

Avem aşa dar

$$N_n=2(b-a)\binom{n-1}{\frac{n}{2}}\frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\frac{n}{2}+1}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)^{n+1}}\qquad\text{pentru } n \text{ par}$$

$$N_n=\frac{b-a}{2^n}\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}\qquad\text{pentru } n \text{ impar.}$$

Se demonstrează imediat că

$$\sqrt{2n-1}\,N_{2n-1}>\sqrt{2n+1}\,N_{2n+1}$$

$$N_1=\frac{b-a}{2},\quad N_3=\frac{b-a}{4}$$

de unde

$$N_{2n+1}<\frac{b-a}{2\sqrt{2n+1}}$$

$$N_{2n+1}\leq\frac{\sqrt{3}(b-a)}{4\sqrt{2n+1}}\qquad\text{pentru}\quad n\geq 1.$$

Pentru n par avem

$$N_{2n}=N_{2n+1}\frac{(n+1)^{n+1}n^n}{(2n+1)^{2n+1}}2^{2n+1}<N_{2n+1}\frac{2^{2n+1}(n+1)}{(2n+1)^{2n+1}}\left(\frac{2n+1}{2}\right)^{2n}=$$

$$=N_{2n+1}\frac{2(n+1)}{2n+1}\leq\frac{\sqrt{3}(b-a)}{4\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2(n+1)}{2n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}(n+1)(a-b)}{(2n+1)\sqrt{2n+1}}<\frac{b-a}{2\sqrt{2n}}$$

deci în general

$$N_n\leq\frac{b-a}{2\sqrt{n}}.$$

Formula (32) devine deci

$$|f-P_n(x\,;f)\,|<\frac{3}{2}\,\omega\left(\frac{b-a}{\sqrt{n}}\right).$$

Dacă funcţia f este continuă $\omega\left(\frac{b-a}{\sqrt{n}}\right) \to 0$ pentru $n \to \infty$ şi teorema lui Weierstrass este demonstrată. Mai mult se vede că cea mai bună aproximaţie a unei funcţii continue prin polinoame de gradul n, adică numărul μ_n, *este cel puţin de ordinul lui* $\omega\left(\frac{b-a}{\sqrt{n}}\right)$.

Aproximaţia dată de polinoamele Dlui S. Bernstein nu se poate ameliora în general. Fie de exemplu funcţia

$$f_2(x) = \left| x - \frac{a+b}{2} \right|.$$

Avem în acest caz $\omega(\delta) = \delta$ pentru $\delta \leq \frac{b-a}{2}$.

Un calcul uşor ne arată că

$$\frac{d^2 P_n(x; f_2)}{dx^2} = \frac{n(n-1)}{(b-a)^n} \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} [f_2(a_i) - 2f_2(a_{i+1}) + f_2(a_{i+2})] (x-a)^i (b-x)^{n-i}$$

de unde

$$\frac{d^2 P_{2n}(x; f_2)}{dx^2} = \frac{d^2 P_{2n+1}(x; f_2)}{dx^2} = \frac{n}{(b-a)^{2n-1}} \binom{2n}{n} [(x-a)(b-x)]^{n-1}.$$

De aici rezultă că $P_{2n}(x; f_2) \equiv P_{2n+1}(x; f_2)$ şi că $P_{2n}(x; f_2)$ este o funcţie convexă (în sensul obicinuit) în intervalul (a, b). Avem prin urmare

$$\max_{\text{in } (a,b)} |f_2 - P_{2n}(x; f_2)| = P_{2n}\left(\frac{a+b}{2}; f_2\right) - f_2\left(\frac{a+b}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=0}^{2n} \binom{n}{i} \left| a_i - \frac{a+b}{2} \right| = \frac{b-a}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n}.$$

Avem acum

$$\frac{1}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} \sqrt{2n} > \frac{1}{2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \sqrt{2n-2}$$

deci

$$\frac{1}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} > \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

de unde

$$\max_{\text{in } (a,b)} |f_2 - P_{2n}(x; f_2)| > \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \omega\left(\frac{b-a}{\sqrt{2n}}\right),$$

ceeace probează afirmaţia noastră.

35. — Aproximaţia funcţiilor convexe de ordin superior. Polinoamele Dlui Bernstein permit încă să stabilim câteva rezultate

interesante asupra aproximării funcţiilor convexe de ordin superior ([10]). Intrebuinţând notaţiile dela No. 17 să punem

$$\Delta_k^i = [a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k}; f], \quad i = 0, 1, \ldots, n-k, \ k = 1, 2, \ldots$$

Un calcul simplu ne arată că

$$\frac{dP_n(x:f)}{dx} = \frac{1}{(b-a)^{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta_1^i (x-a)^i (b-x)^{n-1-i}$$

şi în general

$$\frac{d^k P_n(x:f)}{dx^k} = k! \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots$$

$$\cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{(b-a)^{n-k}} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-k}{i} \Delta_k^i (x-a)(b-x)^{n-k-i}.$$

Se vede imediat că dacă funcţia $f(x)$ se bucură de o proprietate de convexitate determinată, polinoamele D-lui S. Bernstein se bucură de aceeaş proprietate de convexitate. Presupunem aici că convexitatea propriu zisă şi polinomialitatea sunt cazuri particulare ale ne-concavităţii. Proprietatea rezultă din definiţia funcţiilor de ordin superior şi din faptul că dacă o funcţie este derivabilă, condiţia necesară şi suficientă ca ea să fie ne-concavă de ordinul n este ca derivata sa de ordinul $n+1$ să nu devină negativă, etc.

Putem dar enunţa proprietatea:

O funcţie continuă f, care se bucură de anumite proprietăţi de convexitate, este limita unui şir de polinoame, uniform convergent în intervalul (a, b) şi cari se bucură de aceleaş proprietăţi de convexitate.

36. — Aproximaţia funcţiilor cu diferenţe divizate mărginite. Putem deasemenea obţine şi câteva rezultate asupra funcţiilor cu diferenţe divizate mărginite. Să considerăm relaţia

$$k!\, \Delta_k[f] = \Delta_0[f^{(k)}]$$

definită la No. 26. Pentru polinomul $P_n(x; f)$ vom avea

$$k!\, \Delta_k[P_n] = \Delta_0[P_n^{(k)}]$$

de unde, ţinând seamă de (34),

$$\Delta_k[P_n] \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \Delta_k[f].$$

Se poate încă scrie

$$\Delta_k[P_n] \leq \Delta_k[f], \quad k = 0, 1; \quad \Delta_k[P_n] < \Delta_k[f], \quad k > 1.$$

([10]) Vezi Tiberiu Popoviciu *„Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur"* Mathematica t. X, p. 49–54.

Avem aşa dar proprietatea:

O funcţie continuă f care este cu a n^a diferenţă divizată mărginită, este limita unui şir de polinoame, uniform convergent în intervalul (a, b), cari au marginile de ordinul 0 şi 1 cel mult egale cu ale funcţiei iar marginile de ordin > 1 mai mici ca ale funcţiei.

37. Aproximaţia funcţiilor cu variaţia mărginită. Fie

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m \qquad (m \geq n+1)$$

un şir de puncte în intervalul (a, b).

Numărul

$$v_m = \sum_{i=1}^{m-n-1} |[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n+1}; f] - [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}; f]|$$

se numeşte a n^a variaţie a lui $f(x)$ pe punctele x_i considerate.

Dacă punem

$$\max_{\text{în } (a,b)} v_m = V_n[f],$$

maximul fiind luat când variază atât punctele x_i cât şi numărul lor, numărul $V_n[f]$ se numeşte a n^a *variaţie totală a lui $f(x)$* în intervalul (a, b). Dacă $V_n[f]$ este un număr finit funcţia se zice că este cu *a n^a variaţie mărginită.*

Avem şi aci relaţia

$$k!\, V_k[f] = V_0[f^{(k)}]$$

precum şi formula

$$V_0[f] = \int_a^b |f'|\, dx$$

bine cunoscută din teoria funcţiilor cu variaţie mărginită (de ordinul 0).

Pentru polinoamele $P_n(x; f)$ avem

$$V_k[P_n^{(k)}] = \frac{1}{k!}\int_a^b |P_n^{(k+1)}|\, dx.$$

Ţinând seamă de formula (34), deducem

$$V_k[P_n] \leq \frac{k+1}{(b-a)^{n-k-1}}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot$$

$$\sum_{i=1}^{n-k-1}\binom{n-k-1}{i}|\Delta_{k+1}^i|\int_a^b (x-a)^i(b-x)^{n-k-1-i}\,dx.$$

Insă

$$\int_a^b (x-a)^i(b-x)^{n-k-1-i}\,dx = (b-a)^{n-k}\frac{i!\,(n-i-k-1)!}{(n-k)!} = \frac{(b-a)^{n-k}}{(n-k)\binom{n-k-1}{i}}$$

deci

$$V_k[P_n] \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{(k+1)(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n-k-1}|\Delta_{k+1}^i|.$$

Dar avem şi relaţia

$$\frac{(k+1)(b-a)}{n}\Delta_{k+1}^i = \Delta_k^i - \Delta_k^{i+1}$$

prin urmare

$$\frac{(k+1)(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n-k-1}|\Delta_{k+1}^i| = \sum_{i=1}^{n-k-1}|\Delta_k^i - \Delta_k^{i+1}| \leq V_k[f].$$

Deducem deci că

$$V_k[P_n] \leq V_k[f]; \quad k=0, 1; \quad V_k[P_n] < V_k[f], \quad k > 1,$$

Avem aşa dar proprietatea:

O funcţie f continuă şi cu a n^a variaţie mărginită este limita unui şir de polinoame, uniform convergent în intervalul (a, b), cari au variaţiile totale de ordinul 0 şi 1 cel mult egale cu ale funcţiei iar variaţiile totale de ordinul > 1 mai mici ca ale funcţie.

38. — Aproximaţia funcţiilor derivabile. Să vedem în fine la ce rezultate ne duc polinoamele D-lui Bernstein pentru funcţiile derivabile. Să presupunem deci că funcţia $f(x)$ are o derivată continuă de ordinul k şi fie $\omega_k(\delta)$ modulul de oscilaţie al acestei derivate. Se ştie că avem formula mediei generalizată

$$k!\,\Delta_k^i = f^{(k)}\left(a + \frac{b-a}{n}(i+\theta k)\right), \qquad 0 < \theta < 1,$$

întrebuinţând notaţiile de mai sus.

Deducem de aci că

$$|k!\,\Delta_k^i - f^{(k)}(x)| \leq \omega_k\left(\left|x - a - \frac{b-a}{n}(i+\theta k)\right|\right) \leq$$

$$\leq \omega_k(\max(|x-a_i|, |x-a_{i+1}|, \ldots, |x-a_{i+k}|)).$$

Fie acum polinomul

$$Q_{n,k}(x;f) = \frac{P_n^{(k)}(x;f)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{1}{(b-a)^{n-k}} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} k!\, \Delta_k^i (x-a)^i (b-x)^{n-k-i}.$$

Avem

$$|f^{(k)} - Q_{n,k}(x;f)| < \left\{ \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{(b-a)^{n-k}} \sum_{i=0}^{s} \binom{n-k}{i} |x-a_i| (x-a)^i (b-x)^{n-k-i} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{(b-a)^{n-k}} \sum_{i=s+1}^{n-k} \binom{n-k}{i} |x-a_{i+k}| (x-a)^i (b-x)^{n-k-i} \right) + 1 \right\} \omega_k(\delta),$$

unde s este determinat în felul următor:

$s = j - \frac{k}{2}$ dacă k este par şi $a_j \leq x \leq a_{j+1}$

$s = j - \frac{k+1}{2}$ dacă k este impar şi $a_j \leq x \leq \frac{a_j + a_{j+1}}{2}$

$s = j - \frac{k-1}{2}$ dacă k este impar şi $\frac{a_j + a_{j+1}}{2} < x \leq a_{j+1}$.

Bineînţeles că dacă în aceste formule avem $s < 0$ sau $s \geq n-k$, primul sau al doilea termen din a doua paranteză mare dispare.

Observând că

$$|x - a_{i+1}| \leq |x - a_i| + |a_{i+k} - a_i| - |x - a_i| + \frac{k(b-a)}{n}$$

putem scrie şi

$$|f^{(k)} - Q_{n,k}(x;f)| < \left\{ \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{(b-a)^{n-k}} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} |x-a_i| (x-a)^i (b-x)^{n-k-i} + \psi_1(x) \right) + 1 \right\} \omega_k(\delta)$$

unde

$$\psi_1(x) = \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{(b-a)^{n-k-1}} \sum_{i=s+1}^{n-k} \binom{n-k}{i} (x-a)^i (b-x)^{n-k-i}$$

şi trebue să luăm $\psi_1(x) \equiv 0$ dacă $s \geq n-k$.

Avem acum

$$(35) \quad \frac{1}{(b-a)^{n-k}} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} |x-a_i| (x-a)^i (b-x)^{n-k-i} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)^{n-k}} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \left| x - a - i\frac{b-a}{n-k} \right| (x-a)^i (b-x)^{n-k-i} +$$

$$+ \frac{k}{n(n-k)(b-a)^{n-k-1}} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} i (x-a)^i (b-x)^{n-k-i}$$

ceeace rezultă imediat din relaţia

$$x - a_i = x - a - i\frac{b-a}{n} + i\frac{k(b-a)}{n(n-k)}.$$

Ştim însă dela No. 34 că

$$\frac{1}{(b-a)^{n-k}} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \left| x - a - i\frac{b-a}{n-k} \right| (x-a)^i (b-x)^{n-k-i} \leq \frac{b-a}{2\sqrt{n-k}}.$$

Pe de altă parte

$$\frac{k}{n(n-k)(b-a)^{n-k-1}} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} i (x-a)^i (b-x)^{n-k-i} = \frac{k(x-a)}{n}$$

şi vedem că membrul întâi al relaţie (35) este

$$\leq \frac{b-a}{2\sqrt{n-k}} + \frac{k(b-a)}{n}.$$

Avem acum evident şi

$$\psi_1(x) \leq \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{(b-a)^{n-k-1}} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (x-a)^i (b-x)^{n-k-i} = \frac{k(b-a)}{n}$$

de unde rezultă că

$$|f^{(k)} - Q_{n,k}(x;f)| < \left\{ \frac{1}{\delta} \left(\frac{b-a}{2\sqrt{n-k}} + \frac{2k(b-a)}{n} \right) + 1 \right\} \omega_k(\delta)$$

sau, punând $\delta = \frac{b-a}{\sqrt{n-k}}$,

$$(36) \quad |f^{(k)} - Q_{n,k}(x;f)| < \left(\frac{3}{2} + 2\frac{k\sqrt{n-k}}{n} \right) \omega_k\left(\frac{b-a}{\sqrt{n-k}} \right) \leq$$

$$\leq \frac{3+2\sqrt{k}}{2}\, \omega_k\left(\frac{b-a}{\sqrt{n-k}} \right) \qquad (n \geq k+1).$$

39. — Convergenţa derivatelor polinoamelor Dlui Bernstein. Derivata de ordinul k a funcţiei f fiind presupusă continuă, marginea superioară $\Delta_0[f^{(k)}]$ este finită. Avem

$$f^{(k)} - P_n^{(k)}(x;f) = f^{(k)} - Q_{n,k}(x;f) +$$

$$+ \left[1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \right] Q_{n,k}(x;f).$$

Rezultatele dela No. 36 ne arată că

$$|Q_{n,k}(x;f)| \leq \Delta_0[f^{(k)}]$$

şi pe de altă parte avem inegalitatea

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\leq\frac{k(k-1)}{2n}.$$

Ţinând seamă de formula (36), deducem

$$(37)\qquad |f^{(k)}-P_n^{(k)}(x;f)|<\frac{3+2\sqrt{k}}{2}\,\omega_k\left(\frac{b-a}{\sqrt{n-k}}\right)+\frac{k(k-1)}{2n}\,\Delta_0[f^{(k)}]$$

ceeace ne arată că:

Dacă funcţia $f(x)$, definită în intervalul (a, b), este continuă împreună cu primele k derivate ale sale, şirurile de polinoame $P_n(x;f)$, $P'_n(x;f),\dots P_n^{(k)}(x;f)$ tind absolut şi uniform către $f(x), f'(x), \dots, f^{(k)}(x)$ respectiv, în tot intervalul (a, b).

Dl E. Borel a pus pentru prima dată problema găsirii unui şir de polinoame uniform convergent către o funcţie continuă $f(x)$, astfel ca şirul format cu derivatele de un ordin dat k ale acestor polinoame să fie uniform convergent către derivata $f^{(k)}(x)$, presupusă continuă, a funcţiei $f(x)$. După cum se vede polinoamele Dlui Bernstein rezolvă în în mod elegant această problemă. Acest rezultat calitativ se datoreşte Dlui S. Wigert [11].

In particular, pentru derivata de ordinul întâi, termenul al doilea din membrul al doilea al inegalităţii (37) dispare aşa că

$$|f'-P'_n(x;f)|<\frac{5}{2}\,\omega_1\left(\frac{b-a}{\sqrt{n-1}}\right).$$

Putem încă observa că dacă $f^{(k)}(x)$ verifică o condiţie Lipschitz ordinară, aproximaţia lui $f^{(k)}$ prin $P_n^{(k)}(x;f)$ este de ordinul lui $\frac{1}{\sqrt{n}}$ prin urmare de acelaş ordin cu aproximaţia prin $P_n(x;f^{(k)})$.

Polinoamele Dlui S. Bernstein se mai bucură de numeroase proprietăţi cari au fost studiate mai cu seamă de Dl Bernstein însuşi precum şi de elevii Dsale.

40. — Limitarea superioară a lui μ_n. Am văzut la No. 28 că cea mai bună aproximaţie prin polinoame de gradul n a unei funcţii continue $f(x)$ este, în general, cel puţin de ordinul lui $\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$ unde

---

[11] S. Wigert. *„Sur l'approximation par polynomes des fonctions continues“*. Arkiv för Mat., Astr. och Fysik, Bd. 22 B. No. 9.

$\omega(\delta)$ este modulul de oscilaţie al lui $f(x)$. Dl D. Jackson a demonstrat pentru prima dată că *μ_n este chiar de ordinul lui $\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$* [12]. Se cunosc diferite demonstraţii ale acestui rezultat. Nu vom insista însă aici asupra acestor demonstraţii. Se poate consulta cu folos cartea citată a Dlui Ch. de la Vallée Poussin [13]. Ar fi interesant de văzut dacă numărul θ_n definit la No. 29 nu este cumva chiar de ordinul $\frac{1}{n}$. In acest caz polinoamele T_n ar fi suficiente pentru demonstrarea, atât calitativă cât şi cantitativă, a teoremei lui Weierstrass.

LECŢIA V

Cazul funcţiilor de două variabile independente

41. — Problema celei mai bune aproximaţii pentru o funcţie de două variabile reale. Rezultatele precedente se pot extinde, în mare parte, la funcţiile de mai multe şi în particular la acelea de două variabile reale. Vom examina pe scurt această generalizare. E important de observat că *unicitatea nu mai subsistă în general* chiar dacă funcţia este continuă.

Să luăm deci o funcţie reală $f(x, y)$ de două variabile reale x şi y, uniformă şi definită într'un anumit domeniu (D) mărginit şi închis. Pentru a nu complica lucrurile, vom presupune că acest domeniu este limitat de o curbă simplă şi închisă. Domeniul (D) poate fi, de exemplu, un dreptunghiu

$$(38)\qquad a\leq x\leq b,\qquad c\leq y\leq d.$$

Funcţia $f(x, y)$ va fi presupusă continuă în (D).

Problema se pune ca şi pentru cazul funcţiilor de o singură variabilă.

Considerăm mulţimea polinoamelor

$$P(x,y)=a_{00}+a_{10}\,x+a_{01}\,y+\cdots+a_{n0}\,x^n+a_{n-1\,1}\,x^{n-1}\,y+\cdots+a_{0n}\,y^n$$

de două variabile x şi y de gradul n. Un polinom al mulţimei este complet determinat de coeficienţii a_{ij}.

---

[12] D. Jackson. *„Ueber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung“*, Dissertation Göttingen 1911.

[13] loc. cit 5.

Notăm încă cu $M(f)$ maximul sau marginea superioară a funcției $f(x, y)$ în domeniul (D). Eroarea sau *aproximația* cu care polinomul $P(x, y)$ reprezintă funcția $f(x, y)$ este egală, prin definiție, cu $M(|f-P|)$. *Cea mai bună aproximație* a funcției $f(x, y)$ prin polinoame de gradul n este egală, prin definiție, cu marginea inferioară $\mu_n(f)$ sau mai simplu μ_n a lui $M(|f-P|)$ când $P(x, y)$ parcurge mulțimea polinoamelor de gradul n.

Problema care trebue acum examinată se pune ca și p ntru funcțiile de o singură variabilă:

Fiind dată funcția $f(x, y)$, să se determine polinoamele de gradul n pentru cari $M(|f-P|)$ atinge mrginea sa inferioară μ_n și să se studieze acest număr μ_n.

Problema existenței, a unicității și principalele proprietăți ale polinoamelor de cea mai bună aproximație au fost examinate de Dl L. Tonelli ([14]).

Un polinom pentru care minimul μ_n este atins se poate și aici numi un polinom de cea mai bună aproximație de gradul n al funcției f și se poate nota cu $T_n(x, y; f)$ sau mai simplu cu T_n. Vom zice și aici că un astfel de polinom este un polinom T_n.

In ce privește numărul μ_n el este pozitiv sau nul și de altfel nu se poate anula decât dacă $f(x, y)$ coincide cu un polinom de gradul n. In cele ce urmează vom presupune că suntem în cazul $\mu_n > 0$.

Dacă $P(x, y)$ este un polinom T_n al funcției $f(x, y)$, polinomul $P(x, y) + Q(x, y)$, unde $Q(x, y)$ este un polinom de gradul n, este un polinom T_n al funcției $f(x, y) + Q(x, y)$. Reciproc, orice polinom T_n al funcției $f(x, y) + Q(x, y)$ este de forma $P(x, y) + Q(x, y)$. Avem

$$\mu_n(f + Q) = \mu_n(f).$$

Deasemenea, C fiind o constantă, $CP(x, y)$ este un polinom T_n al funcției $Cf(x, y)$ și reciproc. orice polinom T_n al lui $Cf(x, y)$ este de forma $CP(x, y)$. Avem

$$\mu_n(Cf) = |C|\mu_n(f).$$

42. — Existența polinoamelor de cea mai bună aproximație. Lema preliminară dela Nr. 6 se extinde imediat:

Dacă un polinom $P(x, y)$ de gradul n rămâne mărginit de un număr A, în domeniul (D), coeficienții a_{ij} rămân mărginiți de un număr λA, unde λ nu depinde decât de n și de domeniul (D).

Demonstrația se face la fel. Luăm $N = \binom{n+2}{2}$ puncte $M_r(x_r, y_r)$,

([14]) vezi loc. cit. ([4]).

$r = 1, 2, \ldots, N$ în (D) astfel ca determinantul

$$(39) \qquad |1 \quad x_r \quad y_r \quad \ldots \quad x_r^n \quad x_r^{n-1}y_r \quad \ldots \quad y_r^n|$$

să fie diferit de zero. Rezolvăm apoi sistemul

$$a_{00} + a_{10}x_r + a_{01}y_r + \ldots + a_{n0}x_r^n + a_{n-1\,1}x_r^{n-1}y_r + \ldots + a_{0n}y_r^n = P(x_r, y_r)$$
$$r = 1, 2, \ldots, N$$

în raport cu coeficienții a_{ij} cu ajutorul regulei lui Cramer și ținem seamă de

$$|P(x_r, y_r)| < A, \qquad r = 1, 2, \ldots, N.$$

Se pot ușor alege punctele M_r astfel ca determinantul (39) să fie diferit de zero. E destul să luăm N puncte distincte formând o rețea triunghiulară astfel

$$(x_r, y_s), \quad r = 1, 2, \ldots, n+1, \quad s = r, r+1, \ldots, n+1.$$

Determinantul sistemului este atunci egal, afară poate de semn, cu

$$V(x_1, x_2)\, V(x_1, x_2, x_3) \ldots V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})\, V(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}).$$
$$.V(y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}) \ldots V(y_{n-1}, y_n, y_{n+1})\, V(y_n, y_{n+1}),$$

întrebuințând notația deja semnalată a determinatului lui Van der Monde.

Rezultatele dela Nr. 7 sunt aplicabile. $M(|f-P|)$ este o funcție continuă de coeficienții a_{ij}. Rezultă că marginea inferioară μ_n a numerilor $M(|f-P|)$ coincide cu limita lor inferioară.

Repetând acum raționamentul dela Nr. 8 putem enunța proprietatea:

Oricare ar fi funcția continuă $f(x, y)$, există cel puțin un polinom de cea mai bună aproximație de gradul n.

E de observat că acest rezultat rămâne adevărat chiar și pentru o funcție mărginită oarecare.

43. — Prima proprietate a polinoamelor de cea mai bună aproximație. Dacă $P(x, y)$ este un polinom de cea mai bună aproximație de gradul n, există cel puțin un punct (x, y) unde avem

$$(40) \qquad |f(x, y) - P(x, y)| = \mu_n.$$

Numărul acestor puncte capătă o primă precizare prin proprietatea următoare:

Dacă $P(x, y)$ este un polinom de cea mai bună aproximație de gradul n, există cel puțin $n+2$ puncte unde avem egalitatea (40).

Pentru a demonstra această proprietate să considerăm întâi $n+1$ puncte distincte $M_r(x_r, y_r)$, $r=1, 2, \ldots, n+1$ şi fie tabloul

$$\|1 \quad x_r \quad y_r \quad \ldots \quad x_r^n \quad x_r^{n-1}y_r \quad \ldots \quad y_r^n\| \tag{41}$$
$$r=1, 2, \ldots, n+1$$

cu $n=\binom{n+2}{2}$ coloane şi $n+1$ linii. Să înmulţim acest tablou cu următorul

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2i & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3i & -3 & -i & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots 1 \quad \binom{n}{1}i \quad \binom{n}{2}i^2 \ldots\ldots & i^n \end{matrix}\right\|$$

unde $i=\sqrt{-1}$.

Dacă punem $z_r=x_r+iy_r$ vedem că produsul celor două tablouri este egal cu determinantul $V(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$ şi deci este diferit de zero. Formula cunoscută a lui Cauchy ne arată atunci că *există în tabloul* (41) *cel puţin un determinant de ordinul $n+1$ diferit de zero*.

Să presupunem acum că egalitatea (40) nu are loc decât în $m \leq n+1$ puncte $M_r(x_r, y_r)$, $r=1, 2, \ldots, m$. Din proprietatea demonstrată a tabloului (41) rezultă că putem găsi în primele m linii un determinant de ordinul m diferit de zero. Fie pentru fixarea ideilor,

$$|1 \quad x_r \quad x_r^2 \quad \ldots \quad x_r^{m-2} \quad x_r y_r|, \quad r=1, 2, \ldots, m$$

un astfel de determinant.

Să construim polinomul $Q(x,y)$ de gradul n şi de forma

$$Q(x, y)=b_0+b_1 x+\cdots+b_{m-2}x^{m-2}+bxy$$

care verifică condiţiile

$$Q(x_r, y_r)=f(x_r, y_r)-P(x_r, y_r), \qquad r=1, 2, \ldots, m,$$

ceeace este posibil.

Să considerăm cercurile închise (C_r) cu centrul în M_r şi raza egală cu un număr pozitiv δ. Alegem acest număr δ astfel ca

1°. Cercurile (C_r) să nu se tae.

2°. $f(x, y)-P(x, y)$, $Q(x, y)$ să nu se anuleze în aceste cercuri.

Rezultă că în fiecare cerc funcţiile $f(x, y)-P(x, y)$; $Q(x, y)$ păstrează un acelaş semn.

Fie (D') domeniul închis care se obţine din (D) scoţând interiorul cercurilor (C_r). In acest domeniu (D') avem

$$|f(x, y)-P(x, y)| \leq \mu' < \mu_n.$$

Fie acum λ un număr pozitiv astfel ales ca

$$\lambda < \frac{\mu_n-\mu'}{2M(|Q|)}\left(<\frac{\mu_n}{M(|Q|)}\right)$$

avem atunci

$$|f(x, y)-P(x, y)-\lambda Q(x, y)| < \mu'+\frac{\mu_n-\mu'}{2}=\frac{\mu_n+\mu'}{2}<\mu_n$$

în tot domeniul (D').

Intr'un cerc (C_r) avem

$$|f(x, y)-P(x, y)-\lambda Q(x, y)| < \mu_n.$$

In adevăr fie, de exemplu,

$$f(x_r, y_r)-P(x_r, y_r)=\mu_n$$

atunci în (C_r)

$$-\mu_n < -\lambda Q(x, y) \leq f(x, y)-P(x, y)-\lambda Q(x, y) \leq f(x, y)-P(x, y) \leq \mu_n$$

egalitatea neputând avea loc decât dacă $f(x, y)-P(x, y)=0$ sau $Q(x, y)=0$, ceeace am văzut că este imposibil.

Rezultă dar că, în tot domeniul (D), avem

$$|f(x,y)-P(x, y)-\lambda Q(x, y)| < \mu_n$$

deci polinomul $P(x, y)+\lambda Q(x, y)$ dă o aproximaţie mai bună. Aceasta e în contradicţie cu ipoteza că $P(x, y)$ este un polinom T_n; astfel proprietatea e demonstrată.

44.— Complectarea rezultatului precedent. Proprietatea precedentă se poate preciza astfel:

Dacă $P(x, y)$ este un polinom T_n, există cel puţin $\left[\frac{n+2}{2}\right]$ puncte $M_r(x_r, y_r)$ unde

$$f(x_r, y_r)-P(x_r, y_r)=\mu_n$$

şi cel puţin $\left[\frac{n+2}{2}\right]$ puncte $M'_r(x'_r, y'_r)$ unde

$$f(x'_r, y'_r)-P(x'_r, y'_r)=-\mu_n.$$

$[\alpha]$ însemnează cel mai mare număr întreg cuprins în α.

Să demonstrăm de exemplu prima parte a enunţului.

Nu se poate să nu existe nici un punct M_r, căci în cazul contrar am avea

$$-\mu_n \leqq f(x, y) - P(x, y) \leqq \mu' < \mu_n \qquad \text{în (D)}$$

deci

$$-\mu_n < -\frac{\mu_n + \mu'}{2} \leq f(x, y) - P(x, y) + \frac{\mu_n - \mu'}{2} \leq \frac{\mu_n + \mu'}{2} < \mu_n$$

şi polinomul $P(x, y) - \frac{\mu_n - \mu'}{2}$ ar da o aproximaţie mai bună.

Să presupunem deci că există numai $m < \left[\frac{n+2}{2}\right]$ puncte M_r, $r = 1, 2, \dots, m$. Considerăm încă cercurile închise (C_r) definite la Nr. precedent. Luăm încă raza lor comună δ destul de mică pentru ca cercurile să nu se tae şi ca $f(x, y) - P(x, y)$ să rămână pozitivă în aceste cercuri. In fiecare cerc (C_r) luăm un punct $M_r^*(\xi_r, \eta_r)$ la distanţa $\frac{1}{4}\delta$ de M_r, şi fie (C_r^*) cercul închis cu centrul în M_r^* şi raza egală cu $\frac{3}{4}\delta = \delta^*$.

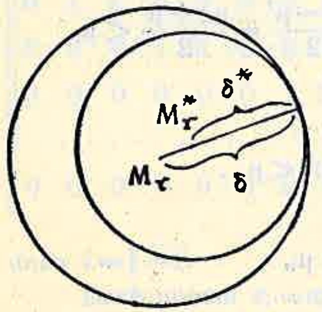

Fig. 2.

Fie acum polinomul de gradul n

$$Q(x, y) = [(x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2 - \delta^{*2}]\,[(x - \xi_2)^2 + (y - \eta_2)^2 - \delta^{*2}] \dots$$
$$\dots [(x - \xi_m)^2 + (y - \eta_m)^2 - \delta^{*2}].$$

Acest polinom nu se anulează decât pe conturul cercurilor (C_r^*). Avem $Q(x, y) < 0$ în interiorul acestor cercuri şi $Q(x, y) > 0$ în domeniul deschis (D'), care se obţine din (D) scoţând cercurile (C_r^*).

In (D') avem

$$-\mu_n \leq f(x, y) - P(x, y) \leq \mu' < \mu_n .$$

Să luăm pe λ pozitiv astfel ca

$$\lambda < \frac{\mu_n - \mu'}{2M(|Q|)} \left(< \frac{\mu_n}{M(|Q|)} \right).$$

Avem în domeniul (D')

$$f(x, y) - P(x, y) + \lambda Q(x, y) < \mu' + \frac{\mu_n - \mu'}{2} = \frac{\mu_n + \mu'}{2} < \mu_n$$

şi

$$-\mu_n < f(x, y) - P(x, y) + \lambda Q(x, y),$$

Pentru această inegalitate, e de observat, că avem sigur semnul $\leq$. Egalitatea nu ar putea însă avea loc decât dacă $Q(x, y) = 0$ dar

atunci $f(x, y) - P(x, y) > 0$. Avem aşa dar

$$|f(x, y) - P(x, y) + \lambda Q(x, y| < \mu_n$$

în (D').

In cercurile (C_r^*) avem

$$f(x, y) - P(x, y) + \lambda Q(x, y) < \mu_n$$

şi

$$-\mu_n < \lambda Q(x, y) < f(x, y) - P(x, y) + \lambda Q(x, y).$$

Rezultă dar că avem

$$|f(x, y) - P(x, y) + \lambda Q(x, y)| < \mu_n$$

peste tot în (D). Polinomul $P(x, y) - \lambda Q(x, y)$ dă deci o aproximaţie mai bună, contrar ipotezei. Această contradicţie demonstrează proprietatea.

Demonstraţia se face la fel pentru punctele M'_r.

45. — Teorema Dlui L. Tonelli. Fie $P(x, y)$ un polinom de gradul n şi E mulţimea punctelor (x', y') în cari $M|(f - P)|$ este atins. Mulţimea E poate să fie finită sau o mulţime închisă oarecare. Dl L. Tonelli a dat următoarea teoremă, care este oarecum analoagă cu prima teoremă a Dlui E. Borel (Nr. 15):

Condiţia necesară şi suficientă ca $P(x, y)$ să fie un polinom T_n este ca să nu să poată găsi nici un polinom $Q(x, y)$ de gradul n verificând condiţiile

1°. $\operatorname{sg} Q(x', y') = \operatorname{sg} (f(x', y') - P(x', y'))$,

2°. $\Gamma > |Q(x', y')| > \gamma > 0$,

în toate punctele mulţimei E.

Pentru a arăta că această condiţie este suficientă e destul să arătăm că dacă $P(x, y)$ nu este un polinom T_n putem găsi un astfel de polinom $Q(x, y)$. Să presupunem deci că

$$M(|f - P|) = \mu' > \mu_n$$

Din relaţia

$$T_n(x, y; f) - P(x, y) = f(x, y) - P(x, y) - (f(x, y) - T_n(x, y; f))$$

rezultă că

$$\operatorname{sg} (T_n(x', y'; f) - P(x', y')) = \operatorname{sg} (f(x', y') - P(x', y'))$$

$$0 < \mu' - \mu_n \leq |T_n(x', y'; f) - P(x', y')| \leq \mu' + \mu_n .$$

Putem deci lua $Q(x, y) = T_n(x, y; f) - P(x, y)$.

Să arătăm acum că această condiţia este şi necesară. Să presupunem că $P(x,y)$ este un polinom T_n şi că există un polinom $Q(x,y)$ de forma indicată. Considerăm încă cercurile închise (C′) cu centrul într'un punct (x',y') şi de rază δ. Luăm pe δ destul de mic pentru ca oscilaţia funcţiilor $f(x,y) - P(x,y)$, $Q(x,y)$ într'un cerc (C′) să fie mai mică decât $\varepsilon < \min(\mu_n, \gamma)$. Putem face astfel deoarece funcţiile noastre sunt uniform continue. Fie încă (D′) domeniul închis care se obţine din (D) scoţând interiorul cercurilor (C′). In (D′) avem

$$|f(x,y) - P(x,y)| \le \mu' < \mu_n .$$

Fie acum λ un număr pozitiv astfel ales ca

$$\lambda < \min\left(\frac{\mu_n-\mu'}{2M(|Q|)}, \frac{\mu_n-\varepsilon}{\Gamma+\varepsilon}\right);$$

avem atunci

$$|f(x,y)-P(x,y)-\lambda Q(x,y)| < \mu' + \frac{\mu_n-\mu'}{2} = \frac{\mu_n+\mu'}{2} < \mu_n$$

în (D′).

Intr'un cerc (C′) unde

$$f(x',y') - P(x',y') = \mu_n ,$$

avem

$$0 < \mu_n - \varepsilon < f(x,y) - P(x,y) \le \mu_n ,$$

$$-\lambda(\Gamma+\varepsilon) < \lambda Q(x,y) < -\lambda(\gamma-\varepsilon),$$

deci

$$0<\mu_n-\varepsilon-\lambda(\Gamma+\varepsilon) < f(x,y)-P(x,y)-\lambda Q(x,y) < \mu_n - \lambda(\gamma-\varepsilon) < \mu_n .$$

La fel arătăm că într'un cerc (C′) unde

$$f(x',y')-P(x',y') = -\mu_n$$

avem

$$-\mu_n < -\mu_n+\lambda(\gamma-\varepsilon) < f(x,y)-P(x,y)-\lambda Q(x,y) < -\mu_n+\varepsilon+\lambda(\Gamma+\varepsilon)<0.$$

Rezultă deci că în cercurile (C′),

$$|f(x,y)-P(x,y)-\lambda Q(x,y)| < \mu_n - \lambda(\gamma-\varepsilon) < \mu_n .$$

Se vede dar că pentru λ destul de mic avem

$$|f(x,y)-P(x,y)-\lambda Q(x,y)|<\mu_n ,$$

în tot domeniul (D). Această inegalitate conţine contradicţia care demonstrează teorema.

47. — Multiplicitatea polinoamelor T_n. Vom arăta acum, printr'un exemplu, că polinomul $T_n(x,y;f)$ poate să nu fie unic.

Fie $f(x)$ o funcţie continuă de o variabilă definită în intervalul (a,b) şi $T_n(x)$ polinomul său de cea mai bună aproximaţie de gradul n. Să notăm cu μ_n^* aproximaţia dată de $T_n(x)$.

Să considerăm acum funcţia

$$f(x,y)=\frac{1}{d-c}[(y-c)T_n(x)-(y-d)f(x)]$$

definită în dreptunghiul (38). Fie μ_n cea mai bună aproximaţie a lui $f(x,y)$ prin polinoame de gradul n. Avem

$$f(x,y) - T_n(x) = \frac{d-y}{d-c}(f(x)-T_n(x))$$

ceeace arată că

$$|f(x,y)-T_n(x)| \le \mu_n^*$$

egalitatea nefiind posibilă decât pentru $y = c$ şi pentru anume valori ale lui x. Avem deci sigur $\mu_n \le \mu_n^*$.

Avem acum

$$f(x,c) = f(x)$$

şi rezultă că dacă $P(x,y)$ este un polinom T_n al lui $f(x,y)$ trebue ca

$$P(x,c) \equiv T_n(x).$$

In cazul contrar ar exista cel puţin o valoare x pentru care

$$|f(x,c)-P(x,c)| > \mu_n^* .$$

Avem prin urmare

$$\mu_n = \mu_n^* .$$

Fie acum polinomul

$$P(x,y) = T_n(x) + \lambda\mu_n^*\frac{y-c}{d-c}$$

unde $|\lambda| \le 1$. Avem

$$|f(x,y)-P(x,y)| = \frac{1}{d-c}|(d-y)(f(x)-T_n(x)) - \lambda\mu_n^*(y-c)| \le$$

$$\le \frac{\mu_n^*}{d-c}[(d-y)+|\lambda|(y-c)] \le \mu_n^* = \mu_n$$

deci toate aceste polinoame sunt polinoame T_n.

Fără a insista mai mult semnalăm numai că Dl L. Tonelli a mai stabilit diferite alte proprietăţi ale polinoamelor T_n. Se poate vedea articolul citat al Dlui Tonelli.

47. — Teorema lui Weierstrass. Teorema lui Weierstrass, enunţată la Nr. 30 pentru funcţiile continue de o variabilă, rămâne adevărată. Această teoremă ne spune că dacă funcţia e continuă avem

$$\mu_n(f)\to 0 \quad \text{pentru} \quad n\to\infty .$$

Pentru simplificare să presupunem că (D) este dreptunghiul (38). In cazuri foarte generale putem reveni la acest caz prelungind convenabil funcţia $f(x, y)$. Putem demonstra teorema lui WEIERSTRASS cu ajutorul polinoamelor Dlui S. BERNSTEIN de două variabile.

Fie

$$P_{m,n}(x, y\,; f) = \frac{1}{(b-a)^m(d-c)^n}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{n}{j} f(a_i, c_j)\,(x-a)^i(b-x)^{m-i} \cdot (y-c)^j(d-y)^{n-j}$$

unde

$$a_i = a + i\,\frac{b-a}{m}, \qquad i = 0, 1, \ldots, m$$

$$c_j = c + j\,\frac{d-c}{n}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

aceste polinoame.

Pentru limitarea aproximaţiei dată de acest polinom definim modulul de oscilaţie $\omega(\delta)$ al lui $f(x, y)$ în felul următor

$$\omega(\delta) = \max |\, f(x', y') - f(x'', y'')\,|$$

când (x', y'), (x'', y'') sunt două puncte în (D) astfel ca

$$|\, x' - x''\,| + |\,y' - y''\,| \leq \delta.$$

Funcţia $\omega(\delta)$ se bucură de proprietăţi analoage cu acelea dela cazul funcţiilor de o singură variabilă. Aceste proprietăţi se demonstrează la fel. Să le reamintim aici pentru cazul a două variabile.

$\omega(\delta)$ este o funcţie definită pentru $\delta \leq b-a+d-c$, nedescrescătoare şi care nu devine negativă. Avem

$$|\, f(x', y') - f(x'', y'')\,| \leq \omega(\,|\, x' - x''\,| + |\, y' - y''\,|\,)$$

şi

$$\omega(k\delta) < (k+1)\,\omega(\delta)$$

pentru un număr pozitiv k astfel ca $k\delta$ şi δ să fie $\leq b-a+d-c$.

Condiţia necesară şi suficientă ca funcţia $f(x, y)$ să fie continuă în (D) este ca să avem $\omega(\delta) \to 0$ pentru $\delta \to 0$.

Revenind acum la problema noastră putem scrie, ţinând seamă de proprietăţile modulului de oscilaţie,

$$|\, f(x, y) - P_{m,n}(x, y\,; f)\,| \leq \frac{1}{(b-a)^m(d-c)^n}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{n}{j} \cdot |\, f(x, y) - f(a_i, c_j)\,|\,(x-a)^i(b-x)^{m-i}(y-c)^j(d-y)^{n-j}$$

şi

$$|\, f(x, y) - f(a_i, c_j)\,| < \left[\frac{|\,x-a_i\,| + |\,y-c_j\,|}{\delta} + 1\right]\omega(\delta).$$

Făcând calculele se găseşte că

$$|f(x, y) - P_{m,n}(x, y; f)| \leq \left\{\frac{1}{\delta}\left[\frac{1}{(b-a)^m}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\,|\,x-a_i\,|\,(x-a)^i(b-x)^{m-i} + \frac{1}{(d-c)^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\,|\,y-c_j\,|\,(y-c)^j(d-y)^{n-j}\right] + 1\right\}\omega(\delta).$$

Am arătat însă la Nr. 34 că

$$\frac{1}{(b-a)^m}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\,|\,x-a_i\,|\,(x-a)^i(b-x)^{m-i} \leq \frac{b-a}{2\sqrt{m}}$$

$$\frac{1}{(d-c)^n}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{i}\,|\,y-c_j\,|\,(y-c)^j(d-y)^{n-j} \leq \frac{d-c}{2\sqrt{n}}.$$

Dacă deci luăm

$$\delta = \frac{b-a}{\sqrt{m}} + \frac{d-c}{\sqrt{n}}$$

găsim

$$|\, f(x, y) - P_{m,n}(x, y\,; f)\,| < \frac{3}{2}\,\omega\left(\frac{b-a}{\sqrt{m}} + \frac{d-c}{\sqrt{n}}\right).$$

Dacă facem $m \to \infty$, $n \to \infty$ dăm peste teorema lui WEIERSTRASS.

48. — Problema celei mai bune aproximaţii pentru o funcţie de o variabilă complexă. Până acum am studiat cazul funcţiilor de variabile reale. Să examinăm pe scurt cazul funcţiilor de o variabilă complexă. O funcţie $f(x, y)$ de două variabile reale care ia valori reale sau complexe se mai poate numi şi o funcţie de variabila complexă $z = x + iy\,(i = \sqrt{-1})$. O astfel de funcţie este de forma $f_1(x, y) + if_2(x, y)$ unde f_1 şi f_2 sunt funcţii reale. Condiţia necesară şi suficientă ca funcţia $f(x, y)$ să fie continuă este ca funcţiile f_1 şi f_2 să fie continue.

Pentru prescurtare funcţia $f(x, y)$ se mai notează şi cu $f(z)$. Vom presupune ca mai sus că $f(z)$ este definită şi continuă în domeniul (D).

Să considerăm acum mulţimea polinoamelor *analitice* de gradul n.

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Un polinom al mulţimei este complet determinat de coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reali sau complexi.

Modulul unei funcţii este o funcţie reală aşa că $M(|f-P|)$ are şi aici un sens bine determinat şi reprezintă, prin definiţie, eroarea sau *aproximaţia* cu care polinomul $P(z)$ reprezintă funcţia $f(z)$ în domeniul (D). Cea mai bună aproximaţie $\mu_n(f)$, sau mai scurt μ_n, este şi aici, prin definiţie, marginea inferioară a numerilor $M(|f-P|)$ când P e de gradul n.

Problema care ne interesează se pune ca şi mai înainte:

Fiind dată o funcţie $f(z)$, să se determine polinoamele de gradul n pentru cari $M(|f-P|)$ atinge marginea sa inferioară μ_n şi să se studieze acest număr μ_n.

Definiţia unui polinom de cea mai bună aproximaţie se înţelege dela sine. Vom nota un astfel de polinom cu $T_n(z; f)$ şi vom zice că este un polinom T_n.

Se demonstrează, exact ca mai sus, că:

Orice funcţie continuă $f(z)$ admite cel puţin un polinom de cea mai bună aproximaţie de gradul n.

Acest rezultat rămâne de altfel exact pentru o funcţie mărginită oarecare.

Numărul μ_n este pozitiv sau nul şi nu se poate anula decât dacă $f(z)$ se reduce la un polinom analitic de gradul n. Vom presupune, în cele ce urmează, că $\mu_n > 0$.

Această problemă de cea mai bună aproximaţie a fost deasemenea studiată de Dl L. TONELLI în lucrarea citată.

49. — Proprietatea fundamentală a polinoamelor T_n. O primă proprietate a polinoamelor de cea mai bună aproximaţie este următoarea:

Dacă $P(z)$ este un polinom de cea mai bună aproximaţie de gradul n, există cel puţin $n+2$ puncte unde

$$|f(z)-P(z)|=\mu_n. \tag{42}$$

Să presupunem contrariul şi fie $z_1, z_2, \ldots, z_m$ punctele, în număr numai de $m \leq n+1$ unde avem egalitatea (42). Fie

$$f(z_r)-P(z_r)=\mu_n e^{i\alpha_r} \qquad r=1,2,\ldots,m.$$

Formula de interpolare a lui LAGRANGE permite să determinăm un polinom $Q(z)$ de gradul n astfel ca

$$Q(z_r)=\mu_n e^{i\alpha_r} \qquad r=1,2,\ldots,m.$$

Să punem

$$f(z)-P(z)=\mu e^{i\alpha}, \qquad Q(z)=\nu e^{i\beta}$$

unde, bineînţeles, μ, ν, α, β depind de punctul z.

Să considerăm acum cercurile închise (C_r) cu centrul în z_r şi raza δ. Luăm pe δ destul de mic pentru ca

1°. Cercurile (C_r) să nu se tae.

2°. $f(z)-P(z)$, $Q(z)$ să nu se anuleze în cercurile (C_r). Va exista atunci un număr pozitiv γ astfel ca $\mu \geq \gamma$, $\nu \geq \gamma$ în cercurile (C_r).

3°. Să avem

$$|\alpha-\alpha_r| \leq \alpha' < \frac{\pi}{4}, \quad |\beta-\alpha_r| \leq \alpha' < \frac{\pi}{4}$$

în cercurile (C_r).

Toate aceste circumstanţe se pot realiza în virtutea continuităţii funcţiilor $f(z)-P(z)$, $Q(z)$.

In tot domeniul (D') ce se obţine din (D) prin scoaterea interiorului cercurilor (C_r), avem

$$|f(z)-P(z)| \leq \mu' < \mu_n$$

μ' fiind un număr fix.

Să luăm acum un număr pozitiv λ astfel ca

$$\lambda < \min\left(\frac{\mu_n-\mu'}{2M(|Q|)}, \frac{2\gamma\cos 2\alpha'}{M(|Q|)}\right).$$

Avem

$$|f(z)-P(z)-\lambda Q(z)|^2 = |\mu e^{i\alpha}-\lambda\nu e^{i\beta}| = \mu^2+\lambda^2\mu^2-2\mu\lambda\nu\cos(\alpha-\beta).$$

Insă în cercurile (C_r)

$$\cos(\alpha-\beta) \geq \cos 2\alpha' > 0$$

şi

$$\lambda^2\nu^2-2\lambda\mu\nu\cos(\alpha-\beta) < \lambda\nu\,(\lambda M(|Q|)-2\gamma\cos 2\alpha') < 0$$

Avem deci, în cercurile (C_r),

$$|f(z)-P(z)-\lambda Q(z)| \leq \mu'' < \mu_n$$

μ'' fiind un număr fix.

Pe de altă parte în domeniul (D') avem

$$f(z)-P(z)-\lambda Q(z)| \leq \mu' + \frac{\mu_n-\mu'}{2} = \frac{\mu_n+\mu'}{2} < \mu_n.$$

Rezultă dar că în tot domeniul (D)

$$|f(z)-P(z)-\lambda Q(z)| \leq \max\left(\mu'', \frac{\mu_n+\mu'}{2}\right) < \mu_n.$$

ceeace contrazice ipoteza că $P(z)$ este un polinom T_n. Proprietatea enunţată este deci demonstrată.

50. — Unicitatea polinomului T_n. Din proprietatea precedentă rezultă imediat că:

O funcţie continuă $f(z)$ admite un singur polinom de cea mai bună aproximaţie de gradul n.

Să presupunem contrarul şi fie $P(z)$, $P_1(z)$ două polinoame T_n distincte. Polinomul $P_2 = \frac{P+P_1}{2}$ este şi el un polinom T_n, căci

$$M(|f-P_2| \le \frac{1}{2}\{M(|f-P|) + M(|f-P_1|)\} \le \mu_n .$$

Fie z' un punct unde

$$|f(z') - P_2(z')| = \mu_n .$$

Avem

$$|f(z') - P(z')| \le \mu_n, \quad |f(z') - P_1(z')| \le \mu_n$$

şi

$$\mu_n = \left| \frac{f(z')-P(z')+(f(z')-P(z'))}{2} \right| \le \frac{|f(z)-P(z')| + |f(z')-P(z')|}{2} \le \mu_n .$$

Rezultă deci că avem peste tot semnul $=$. Atunci trebue întâi ca $f(z') - P(z')$, $f(z') - P_1(z')$ să aibă acelaşi modul μ_n şi pe urmă, modulul sumei fiind egal cu suma modulelor, să aibă acelaş argument. Avem aşa dar

$$f(z') - P(z') = f(z') - P(z')$$
$$P(z') = P(z').$$

Ori, am văzut la Nr. precedent că există cel puţin $n+1$ (şi chiar cel puţin $n+2$) puncte z'. Polinoamele de gradul n, $P(z)$ şi $P_1(z)$, coincid în cel puţin $n+1$ puncte şi sunt deci identice, contrar ipotezei. Teorema este demonstrată.

51. — Teorema Dlui L. Tonelli. Dl Tonelli a găsit şi aici o teoremă, analoagă cu prima teoremă a Dlui Borel.

Fie E mulţimea punctelor z' unde $M(|f-P|)$ este atins. Avem proprietatea:

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca $P(z)$ să fie un polinom T_n este ca să nu se poată găsi nici un polinom $Q(z)$, de gradul n, astfel ca

1°. $c' > |Q(z')| > c > 0$

2°. $|\arg Q(z') - \arg(f(z') - P(z'))| < \alpha' < 90^0$

în toate punctele z' ale lui E.

Pentru a arăta că această condiţie e suficientă e destul să arătăm că, dacă $P(z)$ nu e un polinom T_n, putem construi polinomul $Q(z)$.

Să presupunem deci că

$$M(|f-P|) = \mu' > \mu_n, \quad (P(z) \not\equiv T_n(z;f)).$$

Fie A, A_1, A_2 punctele cari reprezintă pe $f(z')$, $P(z')$, $T_n(z';f)$ respectiv. Punctul A_2 este în cercul de centru A şi de raza egală cu μ_n.

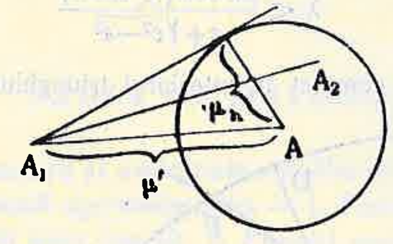

Fig. 3.

Avem

$$\mu' - \mu_n \le |T_n(z';f) - P(z')| \le \mu' + \mu_n ,$$

$$|\arg(T_n(z';f) - P(z')) - \arg(f(z') - P(z'))| \le \text{Arc}\sin\frac{\mu_n}{\mu'} < 90^0.$$

Putem deci lua $Q(z) = T_n(z;f) - P(z)$.

Rămâne să arătăm necesitatea condiţiei.

Să presupunem că ar exista un polinom $Q(z)$ care satisface proprietăţile enunţate şi fie $T_n(z;f)$ polinomul de cea mai bună aproximaţie. Putem presupune $c < \mu_n$. Unui număr pozitiv dat, $\varepsilon < \mu_n$, corespunde un alt număr pozitiv δ astfel ca oscilaţia funcţiilor $f(z) - T_n(z;f)$, $Q(z)$ să fie mai mică decât ε, într'un cerc de rază $\le \delta$. Fie apoi $\varphi(z) = f(z) - T_n(z;f) - \lambda Q(z)$, λ fiind un număr pozitiv.

Să considerăm un punct z' şi cercul închis C de centru z' şi de rază egală cu δ. Fie A punctul reprezentativ al lui $f(z') - T_n(z';f)$ şi B punctul reprezentativ al lui $Q(z')$. Când z descrie cercul C, $f(z) - T_n(z;f)$ rămâne în domeniul (A) format din partea comună a cercurilor O şi A de raze μ_n şi ε respectiv, iar $\lambda Q(z)$ rămâne în domeniul (B) format de cercul B de rază $\lambda\varepsilon$. Luăm pe λ destul de mic pentru ca (B) să nu conţină originea.

Să luăm acum pe ε destul de mic pentru ca să avem

$$\varepsilon < \min\left(c \sin\frac{90^0 - \alpha'}{2}, \ \mu_n \sin 15^0 \right)$$

şi punctul M pe cercul O, de parte opusă cu C faţă de OA, astfel ca $\sphericalangle MOA = \text{Arc}\sin\frac{\varepsilon}{c}$. Fie OP tangenta la cercul B, de parte opusă cu A faţă de OB. Avem $\sphericalangle BOP = \text{Arc}\sin\frac{\omega\varepsilon}{\omega|\varphi(z')|} < \text{Arc}\sin\frac{\varepsilon}{c}$. In fine să luăm punctul D pe cercul O, de parte opusă cu A faţă de OB, astfel ca

$$\sphericalangle \mathrm{MOD} = \alpha' + 2\,\mathrm{Arc}\sin\frac{\varepsilon}{c} < 90^0.$$

Si să notăm cu E proecţia lui M pe OD.

Dacă luăm

$$\lambda < \frac{\mu_n \cos(\sphericalangle \mathrm{MOD})}{\varepsilon + \sqrt{c^2-\varepsilon^2}}$$

domeniul (B) este complet în interiorul triunghiului MOE. Pe de altă

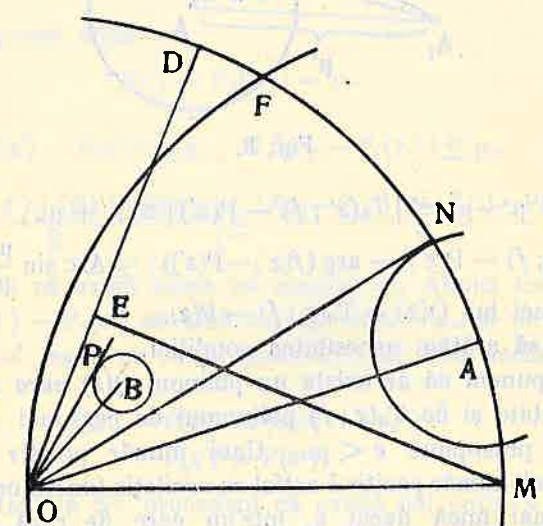

Fig. 4.

parte se vede că (A) este într'un unghiu $\mathrm{MON} = \mathrm{Arc}\sin\frac{\varepsilon}{c} + \mathrm{Arc}\sin\frac{\varepsilon}{\mu_n} < 60^0$.

Fie acum F intersecţia cercului O cu cercul descris din M ca centru şi de rază μ_n. Domeniile (A) şi (B) sunt în interiorul triunghiului mixtiliniu FOM. Se vede acum uşor că, ε şi λ fiind alese aşa cum am spus mai sus, avem

$$| f(z) - \mathrm{T}_n(z\,;f) - \lambda \mathrm{Q}(z) | < \mu_n$$

în cercurile C. In domeniul închis obţinut scoţând interiorul cercurilor C avem

$$| f(z) - \mathrm{T}_n(z\,;f) - \lambda \mathrm{Q}(z) | \leq \mu' < \mu_n\,,$$

deci

$$| f(z) - \mathrm{T}_n(z\,;f) - \lambda \mathrm{Q}(z) | < \mu_n$$

peste tot, ceeace e în contradicţie cu faptul că $\mathrm{T}_n(z\,;f)$ este polinomul de cea mai bună aproximaţie.

Proprietatea e deci complet demonstrată.

TABLA DE MATERIE

Pag.