ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

992

EXPOSÉS SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS

Publiés sous la direction de

Paul MONTEL

Membre de l'Institut

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris

XVII

# LES FONCTIONS CONVEXES

PAR

TIBERE POPOVICIU

Professeur à l'Université de Jassy



PARIS

HERMANN & Cie, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6



1944

DANS LA MÊME SÉRIE :

**THÉORIE DES FONCTIONS :**

N° 302. **Les théorèmes de la moyenne pour les polynomes**, par J. FAVARD .......... 18 fr.

N° 305. **Séries lacunaires**, par S. MANDELBROJT .......... 15 fr.

N° 329. **Les conditions de monogénéité**, par D. MENCHOFF .......... 18 fr.

N° 331. **Les fonctions polyharmoniques**, par M. NICOLESCO .......... 18 fr.

N° 441. **Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynomes**, par M. LAVRENTIEFF .......... 18 fr.

N° 450. **Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité**, par J. KARAMATA .......... 15 fr.

N° 465. **Détermination des fonctions entières par interpolation**, par W. GONTCHAROFF .......... 15 fr.

N° 472. **L'ultraconvergence des séries de Taylor**, par G. BOURION 15 fr.

N° 570. **Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes et de leurs dérivées**, par G. VALIRON .......... 22 fr.

N° 571. **La notion de capacité**, par F. VASILESCO .......... 18 fr.

N° 657. **Les fonctions multivalentes**, par M. BIERNACKI .......... 25 fr.

N° 660. **La notion de point irrégulier dans le problème de Dirichlet**, par F. VASILESCO .......... 25 fr.

N° 733. **La régularisation des fonctions**, par S. MANDELBROJT ... 15 fr.

N° 888. **Les fonctions méromorphes et leurs dérivées. Extensions d'un théorème de M. R. Nevanlinna. Applications**, par H. MILLOUX .......... 20 fr.

N° 889. **Les combinaisons exceptionnelles des fonctions entières et les fonctions algébroïdes**, par M. GHERMANESCU .......... 15 fr.

---

*Printed in France* »

# INTRODUCTION

« *Il me semble que la notion* fonction convexe *est à peu près aussi fondamentale que celles-ci* : fonction positive, fonction croissante. *Si je ne me trompe pas en ceci, la notion devra trouver sa place dans les expositions élémentaires de la théorie des fonctions réelles.* »

Depuis que JENSEN écrivait ces lignes dans son mémoire, aujourd'hui classique [27] (¹), l'importance de la notion de *convexité* s'est considérablement accrue dans beaucoup de branches des mathématiques modernes, et, en particulier, dans la géométrie et la théorie des fonctions.

Dans ce petit livre, j'expose les principales propriétés et quelques généralisations des fonctions convexes d'une ou de plusieurs variables. J'ai divisé ce travail en quatre Chapitres. J'étudie dans le premier la théorie des fonctions d'ordre $n$, dont les fonctions convexes habituelles sont un cas particulier ($n = 1$). Les fonctions d'ordre $n$ sont définies par certaines inégalités et en vérifient d'autres qui ont, surtout pour $n = 1$, de nombreuses applications. Dans le second chapitre, je passe rapidement en revue ces inégalités dont les applications sont exposées dans d'excellents ouvrages, comme par exemple dans *Inequalities* de MM. HARDY, LITTLEWOOD et PÓLYA [21 b]. Je signale aussi quelques autres propriétés des fonctions d'ordre $n$. Dans le troisième chapitre, j'examine quelques généralisations des fonctions d'ordre $n$. Le quatrième chapitre est consacré aux fonctions convexes de deux ou plusieurs variables. Je me borne presque exclusivement au cas des deux variables parce que, d'une part, les propriétés les plus simples s'étendent immédiatement au cas de plus de deux

(¹) Les nᵒˢ en caractères gras entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin.

variables et que, d'autre part, les propriétés plus compliquées n'ont pas encore été étudiées suffisamment.

La bibliographie n'a pas la prétention d'être complète. Je ne signale que les travaux effectivement utilisés pour la rédaction de ce livre.

Comme d'habitude, je ne donne pas les démonstrations ; le lecteur les trouvera dans les mémoires originaux auxquels je renvoie. J'indique brièvement les démonstrations de quelques propriétés qui ne se trouvent pas dans ces mémoires. Pour toutes les autres définitions et propriétés sans indications sur la démonstration ni références à la bibliographie, je prie le lecteur de se reporter à ma Thèse [**47 a**].

J'espère que la lecture de ce petit ouvrage sera utile à ceux qui chercheraient à combler les lacunes, encore très nombreuses, de cette théorie.

Qu'il me soit permis d'exprimer mes plus vifs remerciements à M. Paul Montel pour l'honneur qu'il m'a fait en me demandant d'écrire ce livre sur un sujet qu'il a, d'ailleurs, lui-même enrichi d'importantes contributions.

# NOTIONS PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS

Nous considérons des fonctions $f = f(x)$, réelles, de la variable réelle $x$, finies et uniformes sur un ensemble linéaire quelconque E.

Nous désignerons par $a = \min E$, $a \leqq b = \max E$ les extrémités (gauche et droite) de E. Lorsque nous dirons qu'un ensemble est fermé nous supposerons qu'il contient ses extrémités, donc qu'il est borné. Pour simplifier nous écrivons $x, y, \ldots, \in E$ au lieu de $x \in E$, $y \in E, \ldots$ et nous écrivons $x \in \cdot E$ si le point $x$ de E est à l'intérieur de l'intervalle $(a, b)$. Un sous-ensemble $E_1$ de E est *complètement intérieur* à E si ses extrémités sont à l'intérieur de l'intervalle $(a, b)$. Un tel sous-ensemble est donc toujours borné. Nous écrivons dans ce cas $E_1 \subset \cdot E$. Un sous-ensemble $E_1$ de E est une *section* de E si, ou bien il est formé par un seul point, ou bien, avec $x_1, x_2 \in E_1$, tous les points de E appartenant à l'intervalle $(x_1, x_2)$ appartiennent à $E_1$. Si une section contient ses extrémités $c \leqq d$ nous la désignerons aussi par $(cEd)$. L'intersection de deux sections est ou bien vide ou bien encore une section de E. [1]. La réunion de deux sections ayant au moins un point commun est encore une section. Deux sections dont la réunion n'est pas une section sont dites *séparées* par E, alors il existe au moins un point de E qui est à gauche de tous les points de l'une des sections et à droite de tous les points de l'autre section. Plusieurs sections de E sont des *sections séparées* de E si elles sont séparées deux à deux par E. Nous désignerons comme d'habitude par $E'$, $E''$,... les dérivés successifs de E. La *presque-fermeture* $\dot{E}$ de E est l'ensemble de tous les points de E et $E'$, sauf les extrémités de E qui n'appartiennent pas à E. Si $\dot{E} = E$, nous dirons que l'ensemble E est *presque fermé*.

Nous dirons qu'une fonction $f$ est continue sur un ensemble E si elle est continue en tout point de $E'$. Nous dirons que $f$ a une

---

[1] Une section de E est un sous-ensemble convexe par rapport à E.

dérivée (d'un certain ordre et avec une certaine définition) si cette dérivée existe en tout point $x$ où il est possible de la définir et nous dirons que $f$ a une dérivée continue sur E si cette dérivée est continue sur son ensemble de définition.

Nous désignerons par $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f]$ la *différence divisée d'ordre n* de $f$ sur les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Ces différences divisées sont définies par la relation de récurrence

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f] = \frac{[x_2, x_3, \ldots, x_{n+1} ; f] - [x_1, x_2, \ldots, x_n ; f]}{x_{n+1} - x_1},$$
$$[x ; f] = f(x),$$

et on voit qu'elles sont symétriques par rapport aux points $x_1$, $x_2, \ldots, x_{n+1}$. Désignons par $V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ le déterminant de Vandermonde des nombres $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ et par $U(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f)$ ce que devient ce déterminant si on remplace les éléments $x_i^n$ de la dernière colonne par $f(x_i)$ respectivement. Nous avons

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f] = \frac{U(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f)}{V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}.$$

Nous désignerons par $P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f \mid x)$ le polynome de Lagrange, donc le polynome de degré effectif minimum, prenant les valeurs $f(x_i)$ aux points $x_i$. C'est un polynome de degré $n$, en convenant d'appeler ainsi un polynome de degré effectif $\leqq n$.

Si nous posons $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1})$, nous avons

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f] = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)},$$

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f \mid x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\varphi(x) f(x_i)}{(x - x_i)\varphi'(x_i)}$$

et

$$f(x) - P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f \mid x) = \varphi(x)[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x ; f].$$

Sauf avis contraire, ou sauf si l'écriture n'indique pas expressément le contraire, nous supposerons dans ces notations que $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ et on a alors $V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) > 0$, donc

$$\operatorname{sg}[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f] = \operatorname{sg} U(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f),$$

($\operatorname{sg} \alpha = 1, 0, -1$ suivant que $\alpha =, >, < 0$).

Remarquons aussi l'importante propriété

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; x^m] = \begin{cases} 0, & m = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

identiquement dans les $x_i$ et qui caractérise les différences divisées.

Dans le chapitre IV, nous considérons des fonctions $f(x, y)$ réelles, des variables réelles $x$, $y$, finies et uniformes dans un certain domaine plan D. Nous supposerons toujours que D est un domaine convexe borné fermé ou non. Un sous-domaine de D est *complètement intérieur* à D si sa frontière n'a aucun point commun avec la frontière de D. Nous supposerons, d'ailleurs, toujours que le sous-domaine considéré est lui aussi convexe. Plus particulièrement, nous supposerons que D est un rectangle fermé R,

$$(a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d).$$

D'après A. MARCHAUD [36] un réseau d'ordre $(m, n)$ est un système de $m$ parallèles à l'axe $Oy$ et de $n$ parallèles à l'axe $Ox$. Les points d'intersection des droites d'un réseau sont les *nœuds* de ce réseau.

Suivant une dénomination de A. MARCHAUD [36], un *pseudo-polynome* d'ordre $(m, n)$ est une fonction de la forme

$$\sum_{i=0}^{m} x^i A_i(y) + \sum_{j=0}^{n} y^j B_j(x),$$

où $A_i(y)$ sont des fonctions d'une variable $y$ dans $(c, d)$ et $B_j(x)$ des fonctions d'une variable $x$ dans $(a, b)$. Un pseudo-polynome est donc défini dans le rectangle R. Un pseudo-polynome d'ordre $(m, n)$ est complètement déterminé par ses valeurs sur un réseau d'ordre $(m+1, n+1)$.

Considérons $(m+1)(n+1)$ points $(x_i, y_j)$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$ de R. Ce sont les nœuds du réseau $x = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$, $y = y_j$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$, d'ordre $(m+1, n+1)$. En prenant la différence divisée d'ordre $m$ de $f(x, y)$ sur les points $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$, $y$ étant regardé comme fixe, nous avons la fonction de $y$,

$$F(y) = [x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}\,;\, f(x, y)],$$

et en prenant la différence divisée d'ordre $n$ de $f(x, y)$ sur les points $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$, $x$ étant regardé comme fixe, nous avons la fonction de $x$,

$$G(x) = [y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}\,;\, f(x, y)].$$

On vérifie immédiatement que

$$[y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}\,;\, F] = [x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}\,;\, G].$$

La valeur commune de ces nombres peut être désignée par

$$\begin{bmatrix} x_1, x_2, \dots, x_{m+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \end{bmatrix}; f\Bigg]$$

et s'appelle la *différence divisée d'ordre* $(m, n)$ de $f(x, y)$ sur les points $(x_i, y_j)$ ou sur le réseau $x = x_i$, $y = y_j$, $i = 1, 2, \dots, m + 1$, $j = 1, 2, \dots, n + 1$. On peut aussi écrire la différence divisée d'ordre $(m, n)$ sous la forme d'un quotient de deux déterminants d'ordre $(m + 1)(n + 1)$, comme dans le cas d'une seule variable.

Nous désignerons aussi par

$$P\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_{m+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \end{pmatrix}; f \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right)$$

le pseudo-polynome d'ordre $(m, n)$ prenant sur le réseau $x = x_i$, $y = y_j$ les mêmes valeurs que la fonction $f(x, y)$ définie dans R.

Si nous posons

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{m+1}),$$
$$\psi(y) = (y - y_1)(y - y_2) \cdots (y - y_{n+1}),$$

nous pouvons écrire

$$\left[\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{m+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \end{matrix}; f\right] = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{f(x_i, y_j)}{\varphi'(x_i)\psi'(y_j)},$$

$$P\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{m+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \end{matrix}; f \,\middle|\, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\varphi(x) f(x_i, y)}{(x - x_i)\varphi'(x_i)} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\psi(y) f(x, y_j)}{(y - y_j)\psi'(y_j)} -$$
$$- \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\varphi(x)\psi(y) f(x_i, y_j)}{(x - x_i)(y - y_j)\varphi'(x_i)\psi'(y_j)}$$

et

$$f(x, y) - P\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{m+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \end{matrix}; f \,\middle|\, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \varphi(x)\psi(y) \left[\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{m+1}, x \\ y_1, y_2, \dots, y_{n+1}, y \end{matrix}; f\right]$$

La différence divisée d'ordre $(m + 1, n + 1)$ d'un pseudo-polynome d'ordre $(m, n)$ est nulle identiquement. Les relations

$$\left[\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{m+1} \\ y_1, y_1, \dots, y_{n+1} \end{matrix}; x^p y^q\right] =$$
$$= \begin{cases} 0, & p = 0, 1, \dots, m, \quad q = 0, 1, \dots, n, \quad p + q < m + n, \\ 1, & p = m, \quad q = n, \end{cases}$$

vérifiées identiquement en $x_i$ et $y_j$, caractérisent d'ailleurs la différence divisée d'ordre $(m, n)$.

Sauf avis contraire, ou sauf si l'écriture n'indique pas le contraire, nous supposerons que dans ces notations $x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+1}$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_{n+1}$.

Nous désignerons par $[\alpha]$ le plus grand entier $\leqq \alpha$.

Nous poserons $(m_1, n_1) <$ resp. $\leqq (m, n)$ si $m_1 \leqq m$, $n_1 \leqq n$ et $m_1 + n_1 <$ resp. $\leqq m + n$.

Enfin nous employons les abréviations max et min pour la borne supérieure et la borne inférieure et d. d. pour la différence divisée.

# CHAPITRE I

## LES FONCTIONS D'ORDRE $n$

**1. Définition.** *La fonction $f$ est dite convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe, concave d'ordre $n$ sur E si l'inégalité*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\,;\, f] >, \geqq, =, \leqq, < 0 \tag{1}$$

*est satisfaite, quels que soient les $n+2$ points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} \in$ E.*

*Toutes ces fonctions sont des fonctions d'ordre $n$* (¹).

La définition a été donnée pour $n = 1$ par L. Galvani [19]. Pour $n$ quelconque, E étant un intervalle, les fonctions d'ordre $n$ ont été introduites par E. Hopf [23], mais la généralisation sur un ensemble quelconque est essentielle pour $n > 1$ ([47 c], voir plus loin nº 5).

Pour $n = 0$ nous avons les fonctions *monotones* : croissantes, non-décroissantes, constantes, non-croissantes resp. décroissantes.

Pour $n = 1$ nous avons les fonctions convexes, non-concaves,

---

(¹) Les fonctions non-finies et d'ordre $n$ ne paraissent pas présenter jusqu'ici beaucoup d'intérêt. Dans ce cas il faut adopter les conventions habituelles sur les opérations avec les signes $\pm\infty$ (voir par exemple : C. Caratheodory *Vorlesüngen über reelle Funktionen*, pp. 14-15). Il faut d'abord écrire l'inégalité (1) sous une forme convenable. Par exemple pour $n = 1$ si nous écrivons

$$(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3) \geqq (x_3 - x_1)f(x_2), \quad x_1 < x_2 < x_3, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathrm{E}$$

il faut de plus que cette inégalité ait un sens pour tout groupe de trois points de E (tout au moins si on veut que les propriétés essentielles des fonctions convexes se maintiennent). Il faut donc qu'en deux points de E, séparés par E, la fonction ne prenne pas les deux valeurs $+\infty$ et $-\infty$. On voit alors que trois cas peuvent se présenter : 1º $f$ est finie et non-concave d'ordre 1 sur l'intersection de E avec un intervalle (vide ou non), étant égale partout à $+\infty$ en dehors de cet intervalle ; 2º $f$ est partout égale à $-\infty$ sauf peut être aux extrémités de E où elle prend des valeurs $< +\infty$ ; 3º E est formé par trois points $x_1 < x_2 < x_3$ et $f(x_2) = -\infty$, les deux valeurs aux points extrêmes $x_1$, $x_3$ ne pouvant être $+\infty$ et $-\infty$.

Nous laissons également de côté les fonctions d'ordre $n$ et non uniformes.

linéaires, non-convexes, concaves habituelles [1]. Il est parfois utile d'appeler fonctions d'ordre $-1$ les fonctions positives, non-négatives, identiquement nulles, non-positives, négatives. On voit alors sur certains énoncés, qu'ils restent vrais aussi pour $n = -1$, tout au moins avec certaines modifications faciles.

La convexité et la polynomialité d'ordre $n$ sont des cas particuliers de la non-concavité d'ordre $n$. Si $f$ est convexe, non-concave,... etc., d'ordre $n$, la fonction $-f$ est concave, non-convexe,... etc., d'ordre $n$ et réciproquement. On peut prendre comme type de fonction d'ordre $n$ la fonction non-concave d'ordre $n$.

On suppose, bien entendu, que E soit formé par au moins $n+2$ points. Dans certaines propriétés il est utile de convenir que toute fonction définie sur moins de $n+2$ points est d'ordre $n$ et indifféremment convexe ou concave.

Considérons, en particulier, la fonction $f$ définie sur $m$ points

$$(2) \qquad x_1 < x_2 < \cdots < x_m, \qquad m \geqq n+2$$

et employons les notations

$$(3) \qquad \Delta_k^i = [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}\,;f], \quad i = 1, 2, \ldots, m-k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Pour que la fonction $f$ soit convexe, non-concave,... etc., d'ordre $n$ sur (2) il faut et il suffit que l'on ait

$$(4) \qquad \Delta_{n+1}^i >, \geqq, =, \leqq \text{ resp. } < 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m-n-1$$

Cette propriété résulte du fait que toute différence divisée sur $n+2$ points de (2) est une moyenne arithmétique des différences divisée $\Delta_{n+1}^1, \Delta_{n+1}^2, \ldots, \Delta_{n+1}^{m-n-1}$, donc

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+2}}\,; f] = \sum_{i=1}^{m-n-1} A_i \Delta_{n+1}^i, \quad A_i \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{m-n-1} A_i = 1,$$

les $A_i$ étant indépendants de la fonction $f$. Si $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+2}$ on a d'ailleurs $A_{i_1} > 0$, $A_{i_{n+2}-n-1} > 0$.

On en déduit immédiatement qu'une fonction d'ordre $n$ est caractérisée par l'inégalité [47 k]

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\,; f] \cdot [x_2, x_3, \ldots, x_{n+3}\,; f] \geqq 0,$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+3} \in E.$$

(1) Beaucoup d'auteurs ne font pas de distinctions entre les fonctions convexes et les fonctions non-concaves. Plusieurs appellent convexes les fonctions concaves et vice versa. Les précisions de notre texte seront respectées tout au long de cet ouvrage.

Pour qu'une fonction $f$ ne soit pas d'ordre $n$ il faut et il suffit qu'on puisse trouver $n+3$ points $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+3}$ de E tels que l'on ait

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} ; f] \cdot [x_2, x_3, \ldots, x_{n+3} ; f] < 0.$$

Remarquons que si $f$ jouit d'une certaine propriété de convexité sur E, il en est de même sur $E_1 \subset E$. Faisons aussi cette remarque importante que toute fonction $f - P$, où P est un polynome de degré $n$ jouit de la même propriété que $f$ par rapport à tout caractère de convexité d'ordre $\geqq n$.

Enfin dans toutes les inégalités précédentes, l'expression $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} ; f]$ peut être remplacée par $U(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} ; f)$, en usant de la convention $x_1 < x_2 < \ldots \quad x_{n+2}$.

**2.** Définition (forme géométrique). *La fonction $f$ est dite convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe, concave d'ordre $n$ sur* E *suivant que l'inégalité*

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f \mid x) <, \leqq, =, \geqq, > f(x), \tag{5}$$

*est vérifiée, quels que soient* $x_{n+1} < x, \quad x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x \in E$.

Cette définition est équivalente à la définition du n° 1.

On peut remplacer l'inégalité (5) par

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f \mid x) <, \leqq, =, \geqq, > (-1)^{n-i+1} f(x)$$
$$x_i < x < x_{i+1} \quad (x < x_1 \text{ pour } i = 0), \qquad x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x \in E.$$

Pour $n = 1$ voir L. Galvani [19]. Dans ce cas, en nous limitant aux fonctions non-concaves, la propriété signifie que le point $(x, f(x))$ est non au-dessus ou non au-dessous de la droite joignant les points $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ suivant que $x$ est à l'intérieur ou à l'extérieur de l'intervalle $(x_1, x_2)$. Il en résulte que tout point de la courbe $y = f(x)$ est non-au-dessus de toute ligne polygonale inscrite, pourvu que l'abscisse de ce point soit comprise entre les abscisses des points extrêmes de la ligne polygonale.

Si $f$ est d'ordre $n$ et si $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} ; f] = 0$, elle est polynomiale d'ordre $n$ sur $(x_1 E x_{n+2})$, donc se réduit sur cette section aux valeurs d'un polynome de degré $n$.

Une fonction convexe ou concave d'ordre $n$ ne peut coïncider avec un polynome de degré $n$ en plus de $n+1$ points. La réciproque est vraie si la fonction est continue.

Supposons que E soit l'intervalle $(a, b)$ et soit F la fonction attachée à $f$, prenant au point $x$ toutes les valeurs comprises entre le minimum et le maximum de $f$ en ce point (cette fonction est en général multiforme). Pour que la fonction $f$ soit convexe ou concave d'ordre $n$ dans $(a, b)$, il faut et il suffit que la fonction attachée F ne coïncide pas avec un polynome de degré $n$ en plus de $n+1$ points [47 g]. En général, les fonctions d'ordre $n$ peuvent être caractérisées par le fait que, si un polynome de degré $n$ coïncide avec la fonction attachée F en plus de $n+1$ points, il coïncide avec F en un intervalle fermé.

**3.** — Toute fonction d'ordre $n$ est bornée sur toute section $E_1 \subset \cdot E$. Si $a, b, \in E$ la fonction est bornée sur E. Lorsque E est borné, toute fonction non-concave d'ordre impair est bornée inférieurement sur E.

Pour une fonction d'ordre $n \geqq 1$ et $c \in E'$, $c \in \cdot E$, la limite de $f(x)$ pour $E \ni x \to c$ existe. De plus, toute fonction d'ordre $n \geqq 1$ est uniformément continue sur tout $E_1 \subset \cdot E$. Pour que ce que nous avons dit ait un sens précis, il faut définir la continuité en $c \in E'$ par l'existence de la limite de $f(x)$ lorsque $E \ni x \to c$, ce qui n'est pas une extension essentielle dans le cas des fonctions d'ordre $\geqq 1$ (voir n° 5).

Si $a \in E'$ ou $a = -\infty$, $\lim f(x) = f(a+0)$ pour $E \ni x \to a$, existe ou est $+\infty$ ou $-\infty$. Si $a \in E$, on a $f(a) \leqq$ ou $\geqq f(a+0)$, suivant que $f$ est non-concave d'ordre pair ou impair. Une propriété analogue a lieu pour l'extrémité droite $b$. On a $f(b) \geqq$ ou $\leqq f(b-0)$ suivant que $f$ est non-concave ou non-convexe d'ordre $n$. Pour une fonction non-concave d'ordre 1 qui est telle que $b = +\infty$ et $\lim f(x) = +\infty$ pour $E \ni x \to b$, on peut trouver un nombre $\alpha > 0$ tel que l'on ait $f(x) > \alpha x$ pour $x$ assez grand. Si $f$ est non-concave d'ordre $n$ et si elle n'est pas non-convexe d'ordre $n-1$ sur E, on peut trouver, dans les mêmes conditions, un $\alpha > 0$ tel que l'on ait $f(x) > \alpha x^n$. En effet, on peut alors trouver $n+1$ points $x_1 < x_2 < \ldots \quad x_{n+1}$ tels que $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] > 0$ et l'inégalité de définition $U(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x; f) \geqq 0$, $x_{n+1} < x$ nous donne

$$f(x) \geqq [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] x^n + \cdots,$$

les termes non écrits formant un polynome de degré $n-1$ en $x$. Les inégalités de cette nature dépendent, en général, des caractères de convexité d'ordre $k < n$ de $f$ pour $x$ assez grand (pour ces caractères, voir n° 7).

**4.** — Supposons E fermé. Toute fonction non-concave d'ordre $n$ impair est semi-continue supérieurement, donc atteint son maximum. Mais une telle fonction peut ne pas atteindre son minimum. Telle est, par exemple, la fonction $f(0) = 1$, $f(x) = x$, $0 < x \leqq 1$ qui est non-concave d'ordre impair quelconque dans l'intervalle fermé $(0, 1)$. Une fonction d'ordre pair peut n'atteindre ni son maximum ni son minimum. Telle est la fonction $f(0) = f(2) = 0$, $f(x) = 1 - x$, $0 < x < 2$, qui est d'ordre pair ($> 0$) quelconque dans l'intervalle fermé $(0,2)$.

Soient $E_M$ l'ensemble des $x$ sur lesquels max $f$ sur E et $E_m$ l'ensemble des $x$ sur lesquels min $f$ sur E sont atteints. Si $f$ est non-concave d'ordre $n$, $E_M$ est formé par au plus $\left[\frac{n+3}{2}\right]$ sections séparées de E et, d'ailleurs, s'il n'est pas formé par une seule section, il contient au plus $n + 1$ points. L'ensemble $E_M$ ne peut être formé par au moins $\left[\frac{n+2}{2}\right]$ sections séparées de E sans contenir l'une des extrémités $a$, $b$ pour $n$ impair et l'extrémité $b$ pour $n$ pair. Si $n$ est impair et si $E_M$ est formé par $\frac{n+3}{2}$ sections séparées de E, il contient les deux extrémités $a$ et $b$. De même $E_m$ est formé par au plus $\left[\frac{n+2}{2}\right]$ sections séparées de E. Pour $n$ pair, la structure de $E_m$ résulte d'ailleurs de celle de $E_M$, car $-f(-x)$ est encore non-concave d'ordre $n$ (sur le symétrique de E par rapport à l'origine). Dans ce cas donc $E_m$ ne peut être formé par $\frac{n+2}{2}$ sections séparées de E sans contenir l'extrémité $a$. Il est à remarquer que, si $n \geqq 1$, toutes les sections composant les ensembles $E_M$, $E_m$ sont des ensembles fermés sauf peut-être celles dont une extrémité coïncide avec une extrémité de E.

La théorie précédente ne s'applique pas au cas $n = -1$.

Le nombre maximum $n + 2$ des sections séparées de $E_M + E_m$ est effectivement atteint par la fonction $f - T_n$, où $T_n$ est le polynome de meilleure approximation de degré $n$ de $f$, supposée continue sur E [47j, 47m].

Si E est un intervalle $(a, b)$ et si $n$ est impair, $E_M$ contient au plus $\frac{n+3}{2}$ points, à moins que $f$ ne soit pas une constante dans $(a, b)$. Si $n$ est pair $E_M$ a, ou bien au plus $\frac{n+2}{2}$ points, ou bien est formé par un intervalle $(c, b)$, $a \leqq c$. De même l'ensemble $E_m$ contient, ou bien au plus $\left[\frac{n+2}{2}\right]$ points, ou bien se réduit à un intervalle qui contient l'extrémité $a$ pour $n$ pair.

On peut établir des propriétés réciproques de la manière suivante. Si la fonction $f$ est continue et si, quels que soient le polynome P de degré $n$ et la section fermée $E^*$ de E, l'ensemble $E_M^*$ correspondant à $f - P$ sur $E^*$ ne peut être formé par au moins $\left[\frac{n+2}{2}\right]$ sections séparées de $E^*$ sans contenir l'une au moins des extrémités de cet ensemble pour $n$ impair et l'extrémité droite pour $n$ pair, la fonction est non-concave d'ordre $n$ sur E [47j].

Pour $n = 1$ la propriété est due à S. Saks [51 a]. Dans ce cas il suffit de supposer que $f + \alpha x$ atteigne son maximum en l'une au moins des extrémités de $E^*$, quels que soient la section fermée $E^*$ de E et le nombre $\alpha$. L'hypothèse de la continuité de $f$ peut être supprimée ici complètement

De même si $n$ est impair et si, quel que soit le polynome P de degré $n$, l'ensemble $E_m$, correspondant à $f - P$, est formé par au plus $\frac{n+1}{2}$ sections séparées de E, la fonction continue $f$ est non-concave d'ordre $n$ sur E [47j, 47n].

L'hypothèse de la continuité de $f$ ne peut être supprimée en général, mais peut être remplacée par d'autres moins restrictives. Par exemple par la semi-continuité supérieure pour le maximum et par la semi-continuité inférieure pour le minimum.

Géométriquement, la propriété du minimum est bien connue pour $n = 1$. Pour que $f$ soit non-concave d'ordre 1 il faut et il suffit que par tout point de la courbe $y = f(x)$ passe une *droite d'appui*, ce qui signifie qu'à tout $x_0 \in \cdot$ E correspond au moins une constante $\alpha$ tel que le minimum de $f + \alpha x$ soit atteint pour $x = x_0$. On peut aussi dire qu'à tout $x_0 \in \cdot$ E correspond au moins un nombre $\alpha$ tel que l'on ait

$$f(x_0) + \alpha(x_0 - x) \leqq f(x), \qquad x \in E. \tag{6}$$

Si la fonction est convexe (d'ordre 1) et si E est un intervalle, l'égalité n'est possible que pour $x = x_0$. Si E est quelconque, on peut choisir $\alpha$ de manière que l'égalité ne soit possible que pour $x = x_0$.

5. — Définition. *La fonction $f$, jouissant de certaines propriétés de convexité sur* E *sera dite prolongeable sur* $E_1$ *si on peut trouver une fonction $f_1$ définie sur la réunion de* E *et* $E_1$, *jouissant des mêmes propriétés de convexité et telle que $f_1 = f$ sur* E [47 c].

Il est à remarquer que le prolongement ne peut pas toujours s'effectuer *au sens strict*, c'est-à-dire qu'une fonction convexe (ou concave) ne peut pas se prolonger toujours en respectant la convexité (ou la concavité). Au contraire il se peut qu'une telle fonction soit prolongeable tant que fonction non-concave (non-convexe). Nous dirons alors que la fonction est prolongeable *au sens large*. Par exemple, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 \leqq x \leqq 1 \\ (x-2)^2, & 2 \leqq x \leqq 3 \end{cases}$$

est bien convexe d'ordre 1 sur la réunion des intervalles fermés (0,1), (2, 3) mais ne se prolonge sur un point de l'intervalle ouvert (1, 2) que comme une fonction *non-concave* d'ordre 1.

Toute fonction d'ordre $n \geqq 0$ est prolongeable au sens strict sur la presque fermeture $\mathring{E}$ de E. Ce prolongement est unique si $n \geqq 1$ et se fait par continuité.

Toute fonction d'ordre $n \leqq 1$ peut se prolonger dans tout l'intervalle ouvert $(a, b)$. Il suffit, en effet, de prolonger la fonction dans tout intervalle contigu $(x_1, x_2)$ de E par le polynome $P(x_1, x_2\,; f \mid x)$ [19] et ce prolongement conserve toutes les propriétés de convexité d'ordre $\leqq 1$.

En général, on ne peut pas prolonger une fonction d'ordre $n > 1$ [47 c].

En général on ne peut pas prolonger une fonction d'ordre $n$ au delà d'une extrémité de E. Pour qu'un tel prolongement soit possible au delà de $b$, il faut et il suffit que la fonction soit à $n^{\text{ème}}$ différence divisée bornée (voir n° 9) sur une section de E contenant au moins $n+1$ points et le point $b$ entre ses extrémités.

6. — Examinons, en particulier, le cas où E se réduit à l'ensemble fini (2) [47 c]. Pour que la fonction $f$, non-concave d'ordre $n$ sur (2), soit prolongeable sur le point $x_0$, $x_i < x_0 < x_{i+1}$, il faut et il suffit que les inégalités

$$[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n}, x_0\,; f] \geqq 0, \quad j = i-n, i-n+1, \ldots, i+1,$$

$$\Big(j = 1, 2, \ldots, i+1 \quad \text{si} \quad i < n+1,$$

$$j = i-n, i-n+1, \ldots, m-n \quad \text{si} \quad i > m-n-1\Big)$$

soient compatibles par rapport au nombre inconnu $f(x_0)$. On obtient facilement ces conditions (inégalités) de compatibilité, qui ne dépendent évidemment de $f$ que par l'intermédiaire de ses différences divisées d'ordre $n+1$ sur (2). En remplaçant dans ces conditions le signe $\geqq$ par $>$, on obtient, pour une fonction convexe d'ordre $n$ les conditions de prolongeabilité au sens strict. Les points $x_0$ sur lesquels une telle fonction se prolonge au sens strict forment un nombre fini d'intervalles. Les extrémités de ces intervalles ($\pm\infty$ exclus) sont des points sur lesquels la fonction ne se prolonge qu'au sens large, pourvu bien entendu que de tels intervalles existent.

En restant toujours dans le cas E = ensemble fini (2), la condition nécessaire et suffisante de prolongeabilité partout d'une fonction non-concave d'ordre $n$ est la non-concavité restreinte d'ordre $n$ sur (2) [47 c]. Cette condition peut être formulée de la manière suivante [47 h]. Quels que soient les nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ choisis de manière que l'on ait

1° $$\sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i^j = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

2° $$-\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x_i - x)^n = \sum_{i=r+1}^{m} \mu_i(x_i - x)^n \geqq 0, \qquad x \in (x_r, x_{r+1})$$
$$r = 1, 2, \ldots, m-1$$

l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i f(x_i) \geqq 0$$

est satisfaite.

Lorsqu'il est possible, le prolongement peut toujours être réalisé par une *fonction élémentaire d'ordre n*, donc une fonction dont la dérivée d'ordre $n-1$ est représentée par une ligne polygonale. De plus, on peut toujours prolonger une fonction convexe d'ordre 0 ou 1 par un polynome [47 p].

Comme cas limite, on peut chercher une fonction d'ordre $n$ dans l'intervalle $(a, b)$ prenant avec ses $n$ premières dérivées les valeurs données

$$a_i = f^{(i)}(a), \qquad b_i = f^{(i)}(b), \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

aux extrémités $a$ et $b$. La condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une telle fonction est que le point $M_n\left(\frac{c_1}{c_0}, \frac{c_2}{c_0}, \ldots, \frac{c_n}{c_0}\right)$ soit à l'intérieur, ou sur certaines parties de la frontière, du plus petit domaine convexe $W_n$ contenant la courbe

$$y_i = (b - x)^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad a \leqq x \leqq b,$$

dans l'espace ordinaire à $n$ dimensions, avec

$$c_i = i\,!\,[b_{n-i} - \sum_{k=0}^{i} \frac{(b-a)^k}{k\,!} a_{n-i+k}], \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \qquad c_0 > 0.$$

Ce résultat est dû, en partie, à S. Kakeya [30 b]. Si $M_n$ est à l'intérieur de $W_n$, il y a une infinité de solutions. Sur la frontière, le problème est ou bien impossible ou bien admet une seule solution.

Il est à remarquer que le problème de prolongement d'une fonction définie sur (2) est étroitement lié au problème des moments dans un intervalle $(c, d)$.

$$\int_c^d \psi_i(t)d\alpha(t) = \Delta^i_{n+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m - n - 1,$$

avec les notations (3) et en posant

$$c \leqq x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leqq d, \quad \varphi_i(t) = (t - x_i)(t - x_{i+1}) \cdots (t - x_{i+n+1})$$

et

$$\psi_i(t) = \begin{cases} 0, & t \in (c, x_i), \quad t \in (x_{i+n+1}, d), \\ \displaystyle\sum_{r=k+1}^{n+1} \frac{(x_{i+r} - t)^n}{\varphi_i'(x_{i+r})}, & t \in (x_{i+k}, x_{i+k+1}), \quad k = 0, 1, \ldots, n, \end{cases}$$
$$i = 1, 2, \ldots, m - n - 1.$$

7. — Nous dirons que l'ensemble E est décomposé en $m$ sous-ensembles consécutifs

(7) $$E_1, E_2, \ldots, E_m$$

si tout point de E appartient à un $E_i$ et tout point de $E_i$ est à gauche de tout point de $E_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, m - 1$. Les ensembles (7) sont donc $m$ sections de E, deux à deux non séparées par E, n'ayant aucun point commun et épuisant complètement l'ensemble E.

Si $f$ est d'ordre $n$ sur E, on peut décomposer cet ensemble en au plus $k + 1$ sous-ensembles consécutifs sur chacun desquels la fonction soit d'ordre $n - k$. Pour $n = k = 1$ voir L. Galvani [19].

La propriété est vraie pour $k = 1, 2, \ldots, n + 1$ et elle résulte du fait que, si (2) est un sous-ensemble fini quelconque de E et si nous employons les notations (3), la suite

$$\Delta^1_{n-k+1}, \ \Delta^2_{n-k+1}, \quad \ldots, \quad \Delta^{m-n+k-1}_{n-k+1} \tag{8}$$

présente au plus $k$ variations de signes.

Pour une fonction d'ordre $n$ et pour un $k$ donné, il existe une infinité de décompositions (7) (E étant infini), telle que sur chaque $E_i$ la fonction soit d'ordre $n - k$. Le nombre $m$ des sous-ensembles $E_i$ a alors un minimum $h$. Si $m = h$, la fonction n'est d'ordre $n - k$ sur aucun des ensembles $E_i + E_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, h - 1$. La fonction est alors alternativement non-concave et non-convexe d'ordre $n - k$ sur les ensembles $E_i$. D'ailleurs, si $h = k + 1$ et si $f$ est non-concave d'ordre $n$ sur E, elle est non-concave d'ordre $n - k$ sur $E_h$.

Réciproquement, pour que la fonction soit d'ordre $n$ sur E, il suffit que, quels que soient le polynome P de degré $n$ et le sous-ensemble fini (2) de E, la suite (8), correspondant à (2) et à la fonction $f - P$, présente au plus $k$ variations de signes. Dans cet énoncé on peut, d'ailleurs, ne considérer que les suites (2) ayant $n + 3$ points [47 k].

Les fonctions qui admettent une décomposition (7) de la nature précédente constituent une importante généralisation des fonctions d'ordre $n$. Nous les étudierons dans un autre travail. Remarquons seulement que [47 n].

La condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse décomposer E en au plus deux sous-ensembles consécutifs tel que sur chacun la fonction soit monotone, la monotonie étant de sens opposés sur les deux sous-ensembles, est que $f$ ou $-f$ vérifie l'inégalité

$$f(x_2) \leqq \max\,[f(x_1), f(x_3)], \qquad x_1 < x_2 < x_3, \qquad x_1, x_2, x_3 \in E.$$

Dans cette classe entrent non seulement les fonctions d'ordre 1, mais aussi toutes celles qui sont non-négatives et dont la $p^{\text{ème}}$ puissance, $p > 1$, est d'ordre 1.

8. — Le voisinage $V^k_x$ d'un point $x$ est une section de E ayant au moins $k$ points à gauche et au moins $k$ points à droite de $x$. Si par exception, il n'y a que $r < k$ ($r \geqq 0$) points à gauche (à droite)

de $x$, $V_x^k$ doit contenir tous ces points et en plus au moins $2k - r$ points à droite (à gauche) de $x$. Le voisinage $V_a^k$ doit contenir avec $x_1 \in V_a^k$ tous les points de l'intervalle fermé $(a, x_1)$ appartenant à E. Il en est de même pour un $V_b^k$.

Définition. — *La fonction $f$ est dite localement convexe, non-concave,..., etc., d'ordre $n$ sur E si à tout $x \in \mathring{E}$ correspond un voisinage $V_x^k$ où la fonction est convexe, non-concave,... etc., d'ordre $n$* [47 I].

Toute fonction localement convexe, non-concave,... etc., d'ordre $n$ sur E, avec $k = \left[\frac{n+2}{2}\right]$, est convexe, non-concave, ... etc., d'ordre $n$ sur E [47 I].

Dans la définition on ne peut pas remplacer la condition $x \in \mathring{E}$ par la condition moins restrictive $x \in E$. Par exemple, avec cette nouvelle définition, la fonction

$$f(x) = 0, \qquad 0 \leqq x < 1, \qquad f(x) = x - 1, \qquad 1 < x \leqq 2$$

est localement polynomiale d'ordre $n \geqq 1$ (quel que soit $k$) et pourtant cette fonction n'est pas d'ordre $n$.

Dans le cas d'un intervalle, on peut remplacer $V_x^k$ par un voisinage au sens ordinaire. Pour $n = 1$ nous retrouvons une propriété de J. Blaquier [8].

On peut aussi imposer à un voisinage $V_x^k$ d'autres conditions entraînant la convexité. On peut dire que $f$ a localement une droite d'appui sur E si, quel que soit $x_0 \in \cdot E$, il existe un voisinage $V_{x_0}^1$ et une droite non verticale passant par le point $(x_0, f(x_0))$, laissant la courbe $y = f(x)$ non-au-dessous de cette droite pour $x \in V_{x_0}^1$. Alors toute fonction définie et continue sur l'ensemble presque fermé E, qui a localement une droite d'appui, est non-concave d'ordre 1 sur E. On peut même démontrer la propriété suivante :

Si $f$ est définie et semi-continue supérieurement sur un ensemble presque fermé E et si, quel que soit $x_0 \in \cdot E$, on peut trouver deux points $x' < x_0 < x''$ tels que dans tout voisinage $V_{x_0}^1 \subset (x', x'')$ il existe deux points $x_1, x_2, x_1 < x_0 < x_2$ vérifiant l'inégalité $[x_0, x_1, x_2 ; f] \geqq 0$, la fonction est non-concave d'ordre 1 sur E [47 I].

Pour la démonstration il suffit de remarquer que, si $f$ n'est pas non-concave d'ordre 1, on peut trouver trois points $x_1, x_2, x_3$, $x_1 < x_2 < x_3$ de E de manière que $[x_1, x_2, x_3 ; f] < 0$. Les extrémités de l'ensemble (fermé) sur lequel le maximum ($> 0$) de la fonction $f(x) - \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} f(x_1) - \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3)$ sur la section $(x_1 E x_2)$ est atteint, sont des points $x_0 \in \cdot E$ pour lesquels on ne peut pas trouver les points $x'$, $x''$ satisfaisant à la propriété demandée.

La propriété d'être d'ordre $n$ n'est pas une propriété locale. Mais, si à tout $x \in \dot{E}$ correspond un voisinage $V_x^k$, avec $k = \left[\frac{n+3}{2}\right]$, où $f$ est convexe ou concave d'ordre $n$, cette fonction est convexe ou concave d'ordre $n$ sur E [47 I].

9. — Dans l'étude des fonctions d'ordre $n$ il est tout indiqué d'introduire deux autres classes de fonctions déjà considérées par E. Hopf [23] dans le cas d'un intervalle.

Définition. — *La $n^{\text{ème}}$ borne de la fonction $f$ sur* E *est définie par*

$$\Delta_n = \Delta_n[f ; E] = \max_{(E)} |[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f]|.$$

Si $\Delta_n$ *est un nombre fini la fonction est dite à $n^{\text{ème}}$ différence divisée bornée sur* E.

Définition. — *La $n^{\text{ème}}$ variation totale de la fonction $f$ sur* E *est définie par*

$$V_n = V_n[f ; E] = \max \sum_{i=1}^{m-n-1} |\Delta_n^{i+1} - \Delta_n^i|,$$

*le maximum étant pris pour tous les sous-ensembles finis* (2) *de* E.

*Si* $V_n$ *est un nombre fini la fonction est dite à $n^{\text{ème}}$ variation bornée sur* E.

Nous supposerons que E soit borné.

Si $n = 1$, nous avons les fonctions vérifiant une condition de Lipschitz ordinaire et une généralisation des fonctions à variation bornée déjà donnée par Ch. de la Vallée Poussin [62], F. Riesz [50 a] et A. Winternitz [65].

Sur l'ensemble fini (2), $\Delta_n$ coïncide avec le maximum des nombres $|\Delta_n^1|, |\Delta_n^2|, \ldots, |\Delta_n^{m-n}|$. De là résulte que, si E est quelconque, on peut trouver un $x_0$ de la fermeture de E tel que dans tout voisinage $V_{x_0}^k$, avec $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$, on ait $\Delta_n[f; V_{x_0}^k] = \Delta_n[f; E]$ [47 I]. On en déduit que si $f$ est à $n^{\text{ème}}$ d. d. bornée dans le voisinage (au sens ordinaire) de tout point $x \in E'$, elle est à $n^{\text{ème}}$ d. d. bornée sur E.

Toute fonction à $n^{\text{ème}}$ d. d. bornée est aussi à $(n-1)^{\text{ème}}$ d. d. bornée donc, en particulier, est bornée.

Toute fonction à $n^{\text{ème}}$ variation bornée est aussi à $n^{\text{ème}}$ d. d. bornée et à $(n-1)^{\text{ème}}$ variation bornée. De même toute fonction à $n^{\text{ème}}$ d. d. bornée est à $(n-1)^{\text{ème}}$ variation bornée.

Toute fonction d'ordre $n$ est à $n^{\text{ème}}$ variation bornée, donc aussi à $n^{\text{ème}}$ d. d. bornée sur toute section $E_1 \subset \cdot E$. D'ailleurs si $\Delta_n$ est fini on peut trouver un nombre $\alpha$ tel que $f + \alpha x^n$ (par exemple $\alpha = |\Delta_n|$) soit d'ordre $n-1$. Pour qu'il en soit ainsi il suffit même que les d. d. d'ordre $n$ soient bornées supérieurement ou inférieurement.

Toute fonction $f$ à $n^{\text{ème}}$ variation bornée est la différence de deux fonctions non-concaves d'ordre $-1, 0, 1, \ldots, n$ et dont les $n^{\text{ème}}$ variations totales ne dépassent pas celle de $f$. Ce résultat a été obtenu par E. Hopf [23] dans le cas d'un intervalle et pour $n = 1$ par A. Winternitz [65]. Pour $n = 0$, on obtient un théorème classique de C. Jordan sur les fonctions à variation bornée habituelles. Dans le cas général il existe une telle décomposition $f = \varphi - \psi$, où les fonctions $\varphi$, $\psi$ sont les plus petites possibles. Pour $n = 0, 1$ G. Ascoli [1 a, 1 b] a retrouvé ces propriétés par des considérations très intéressantes.

**10.** — Nous allons maintenant étudier les dérivées des fonctions d'ordre $n$. Nous supposerons E fermé et $f$ bornée sur E.

Nous allons adopter une définition directe de la $n^{\text{ème}}$ dérivée, plus restrictive que la définition habituelle, mais qui s'impose dans l'étude des fonctions d'ordre $n$.

Par définition, la $n^{\text{ème}}$ dérivée $f^{(n)} = f^{(n)}(x)$ au point $x \in E'$ est la limite, si elle existe, de $n!\,[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ lorsque les points $x_i$ tendent d'une manière quelconque vers $x$. La $n^{\text{ème}}$ dérivée peut ainsi être définie en tout point de E' tandis que la $n^{\text{ème}}$ dérivée au sens ordinaire ne se définit que sur les points de $E^{(n)}$.

Pour que $f^{(n)}$ existe en un point $x \in E'$ il faut et il suffit qu'à tout $\varepsilon > 0$ corresponde un voisinage V (au sens ordinaire) tel que l'on ait

$$(9) \qquad |[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] - [x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}; f]| < \varepsilon$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} \in V.$$

Pour que $f^{(n)}$ soit continue sur E' il faut et il suffit que cette condition soit réalisée uniformément sur E'. D'ailleurs, si $f^{(n)}$ existe en tout point de E' elle est continue sur E'. Si $f^{(n)}$ existe en un $x_0 \in E'$ la fonction est à $n^{\text{ème}}$ d. d. bornée dans le voisinage de $x_0$, donc si $f^{(n)}$ existe en tout point de E', la fonction $f$ est à $n^{\text{ème}}$ d. d. bornée sur E. Il est clair, d'autre part, que si $f$ est à $(n+1)^{\text{ème}}$ d. d. bornée sur E, $f^{(n)}$ existe en tout point de E'.

Les relations qui existent entre $f^{(n)}$ et la $n^{\text{ème}}$ dérivée au sens ordinaire ont été étudiées dans le cas d'un intervalle par Th. J. Stieltjes [56], E. Hopf [23], Ph. Franklin [17] et dans le cas d'un ensemble E quelconque par nous-même. En particulier, si $f^{(n)}$ existe en un point $x_0 \in E^{(n)}$, la dérivée d'ordre $n$ au sens ordinaire existe aussi en ce point et lui est égale.

On peut aussi définir une dérivée directe d'ordre $n$ à gauche $f_g^{(n)}$ et une dérivée directe d'ordre $n$ à droite $f_d^{(n)}$ au point $x \in E'$. Par définition $f_g^{(n)}(x)$ $[f_d^{(n)}(x)]$ est égale à la limite, si elle existe, de $n! [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ lorsque les points $x_i \leqq x$ $[x_i \geqq x]$ de E tendent, d'une manière quelconque vers $x$. Pour l'existence de ces dérivées il y a des conditions nécessaires et suffisantes analogues à celle exprimée par l'inégalité (9). Il est clair que si $x \in E'$ n'est limite que d'un côté, on ne définit que la $n^{\text{ème}}$ dérivée de ce côté, qui est alors identique à $f^{(n)}$. Si $x \in E'$ est limite de deux côtés et $f^{(n)}(x)$ existe, $f_g^{(n)}(x)$, $f_d^{(n)}(x)$ existent aussi et lui sont égales. Mais $f_g^{(n)}(x)$, $f_d^{(n)}(x)$ peuvent exister et même être égales sans que $f^{(n)}(x)$ existe. Par exemple, pour la fonction $f(x) = |x|$, $x \in (-1, 1)$, $f_g''(0)$, $f_d''(0)$ existent et sont toutes les deux égales à zéro, mais $f''(0)$ n'existe pas. On voit aussi que, si $f_g^{(n)}$ $[f_d^{(n)}]$ existe en tout point de E', c'est une fonction continue à gauche (à droite) sur E'.

11. — Passons aux fonctions d'ordre $n$. Toute fonction d'ordre $n > 1$ a des dérivées continues d'ordre $1, 2, \ldots, n-1$ sur toute sec-

tion $E_1 \in \cdot E$. On peut même démontrer que, si $f$ est d'ordre $n \geqq 1$ dans l'intervalle $(a, b)$, elle a des dérivées continues d'ordre $\alpha < n$ $(\alpha > 0)$ au sens de LIOUVILLE-RIEMANN dans tout $(c, d) \subset \cdot(a, b)$. Il en est, d'ailleurs, ainsi pour toute fonction à $n^{\text{ème}}$ d. d. bornée, comme l'a montré P. MONTEL [39 a]. Dans ce cas les dérivées d'ordre entier existent et sont continues dans tout l'intervalle $(a, b)$ et A. MARCHAUD [36] a montré qu'il en est ainsi aussi pour les dérivées d'ordre non entier.

Toute fonction d'ordre $n > 1$ a une dérivée à gauche d'ordre $n$ et une dérivée à droite d'ordre $n$, continues à gauche resp. à droite sur toute section $E_1 \subset \cdot E$. Bien entendu $f_g^{(n)}$ $(f_d^{(n)})$ n'est pas définie en un point $x \in E'$ qui est limite seulement de droite (de gauche), mais alors $f^{(n)} = f_d^{(n)}$ $(f^{(n)} = f_g^{(n)})$ existe en ce point. Pour que ce que nous dirons ici soit cohérent nous pourrons supposer que $f_g^{(n)}$ $(f_d^{(n)})$ soit prolongée par $f^{(n)}$ sur ces points. L'existence des dérivées d'ordre $n$ résulte du fait que la d. d. $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\,;\, f]$ est monotone, de même sens, par rapport à chacune des variable $x_i$. D'ailleurs, $f_g^{(n)}, f_d^{(n)}$ coïncident avec la dérivée à gauche et la dérivée à droite de $f^{(n-1)}$ en un point $x \in E''$. Si en un point $x \in E'$ on a $f_g^{(n)} = f_d^{(n)}$, la dérivée d'ordre $n$, $f^{(n)}$ existe aussi et leur est égale. La dérivée $f^{(n)}$ est continue sur tout $E_1 \subset E$ sur lequel elle existe, comme l'a remarqué L. GALVANI [19] pour $n = 1$. Si $x < x'$, $x, x' \in E'$, on a

$$f_d^{(n)}(x) \leqq [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\,;\, f] \leqq f_g^{(n)}(x'), \qquad x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in (xEx')$$

et

$$f_g^{(n)}(x) \leqq f_d^{(n)}(x) \leqq f_g^{(n)}(x') \leqq f_d^{(n)}(x'),$$

pourvu que $f$ soit non-concave d'ordre $n$ sur E. L'ensemble des $x$ sur lequel $f_g^{(n)} \neq f_d^{(n)}$ est d'ailleurs au plus dénombrable, comme l'ont remarqué F. BERNSTEIN [5] et L. GALVANI [19] pour $n = 1$. Pour $n = 1$ l'existence des dérivées de deux côtés a été établie déjà par O. STOLZ [57] et J. L. W. V. JENSEN [27].

Si $f$ est non-concave d'ordre $n$, $f^{(k)}$ est non-concave d'ordre $n-k$. De même, $f_g^{(n)}, f_d^{(n)}$ sont non-décroissantes et $f^{(n+1)}, f_g^{(n+1)}$, $f_d^{(n+1)}$ sont non-négatives partout où elles existent.

Il reste à examiner ce qui se passe aux extrémités de E. Si

$a \in E'$ la d. d. $n\,![x_1, x_2, \ldots x_{n+1}\,;\,f]$ tend vers une limite ou vers $+\infty$, ou $-\infty$, si les $x_i \neq a$ tendent vers $a$. Si $a \in E''$ cette limite coïncide avec la limite, au sens propre ou impropre, de $f_g^{(n)}$ et de $f_d^{(n)}$ lorsque $E' \ni x \neq a$ tend vers $a$. Si, de plus, la fonction est continue en $a$ et si la limite existe (au sens propre ou impropre), $f_d^{(n)}(a)$, donc $f^{(n)}(a)$ existe (au sens propre ou impropre) et est égale à cette limite. Il est clair d'ailleurs que cette limite est $< +\infty$ si la fonction est non-concave d'ordre $n$ et est $\quad -\infty$ si la fonction est non-convexe d'ordre $n$. Si la fonction est à $k^{\text{ème}}$ d. d. bornée au voisinage de $a$, toutes les dérivées $f^{(i)}(a)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ existent et ceci pour $k \leqq n$. On peut faire des remarques analogues relativement à l'extrémité $b$.

D'après une remarque (dans le cas $n = 1$, hypothèse qui d'ailleurs n'est pas ici essentielle) de W. Blaschke et G. Pick [9], si $f$ est d'ordre 1 sur E et si $a \in E''$, on a

$$(x - a)f_g'(x) \to 0, \qquad (x - a)f_d'(x) \to 0,$$

si $E' \ni x \neq a$ tend vers $a$. Compte tenant des résultats du n° 7 et des inégalités entre les dérivées d'une fonction d'ordre $n$ (voir plus loin n° 16), nous pouvons démontrer que dans le cas d'une fonction d'ordre $n$ ($\geqq 1$) nous avons de même,

$$(x - a)^k f^{(k)}(x) \to 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, n - 1,$$

$$(x - a)^n f_g^{(n)}(x) \to 0, \qquad (x - a)^n f_d^{(n)}(x) \to 0,$$

lorsque $E' \ni x \neq a$ tend vers $a$. Une propriété analogue a lieu à l'extrémité droite $b$ de E. Il ne faut pas oublier que nous supposons E fermé, donc borné, donc $f$ est bornée sur E.

Dans le cas E = intervalle ouvert $(a, b)$, les propriétés sont plus précises. Pour que $f$ soit non-concave resp. convexe d'ordre $n > 1$ il faut et il suffit que $f^{(k)}$, $k \leqq n - 1$, existe dans $(a, b)$ et soit non-concave d'ordre $n - k$. De même, il faut et il suffit que $f^{(n)}$ existe et soit non-décroissante resp. croissante, sauf peut-être sur un ensemble au plus dénombrable (pour $n = 1$ voir [19]). Si $f^{(n+1)}$ existe, la condition $f^{(n+1)} \geqq 0$ est nécessaire et suffisante pour la non-concavité et $f^{(n+1)} > 0$ est suffisante pour la convexité de $f$. Nous avons aussi dans ce cas $n\Delta_n[f\,;\,E] = \Delta_{n-1}[f'\,;\,E]$ et $nV_n[f\,;\,E] = V_{n-1}[f'\,;\,E]$, quelles que soient les bornes et les variations totales finies ou infinies.

Toujours d'après L. Galvani [19], l'existence d'un unique $\xi$,

$x_1 < \xi < x_2$ pour tout $x_1, x_2 \in (a, b)$ dans la formule des accroissements finis $[x_1, x_2\,;\, f] = f'(\xi)$, est nécessaire et suffisante pour la convexité ou la concavité d'ordre 1 de la fonction dérivable $f$ dans $(a, b)$. A. Terracini [58], remarque, d'ailleurs, qu'on a $\xi \gtreqless \frac{x_1 + x_2}{2}$ suivant que $f'' \cdot f''' \gtreqless 0$, en supposant l'existence de ces dérivées.

Si $f$ est d'ordre $n > 2$ et $\Delta_0$ est le maximum de $|f|$ dans l'intervalle fermé $(a, b)$, on a

$$(10)\quad |f'| \leqq \frac{An^2\Delta_0}{b-a}, \quad |f'\sqrt{(x-a)(b-x)}| \leqq Bn\Delta_0, \quad x \in (a+\lambda, b-\lambda)$$

avec

$$A = 8(7+4\sqrt{3})/3 < 38, \qquad B = 2(7+4\sqrt{3}) < 28,$$
$$\lambda = (b-a)\left(1 - \cos\frac{\pi}{2n}\right)\Big/\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right).$$

Les inégalités (10) sont analogues aux inégalités

$$|f| \leqq \frac{2n^2\Delta_0}{b-a}, \qquad |f'\sqrt{(x-a)(b-x)}| \leqq n\Delta_0, \qquad x \in (a, b)$$

de A. Markoff [37] et S. Bernstein [7 b], lorsque $f$ est un polynome de degré $n$.

P. Montel [39 b] a remarqué, dans le cas $n = 0$, que l'intégrale $\int_a^x f(t)dt$, d'une fonction non-concave resp. convexe d'ordre $n$, est non-concave resp. convexe d'ordre $n+1$. On voit, d'ailleurs, que si $k$ est un entier positif, et $f$ sommable et non-concave d'ordre $n$ dans $(a, b)$ $(n \geqq 1)$, l'intégrale d'ordre $k$

$$\int_a^x (x-t)^{k-1} f(t)dt$$

est non-concave d'ordre $n+k$ dans $(a, b)$.

Si $\varphi(t)$ est une fonction non-décroissante et bornée dans l'intervalle $(a, b)$, l'intégrale de Stieltjes

$$(11)\qquad f(x) = \int_a^b G_n(x, t)\,d\varphi(t),$$

où

$$G_n(x, t) = \frac{1}{n!}\left[\frac{|x-t| + x - t}{2}\right]^n,$$

existe et représente une fonction non-concave d'ordre $n$ à $n^{\text{ème}}$ d. d. bornée dans $(a, b)$. On voit, d'ailleurs, que si $n > 1$,

$$f^{(k)}(x) = \int_a^b G_{n-k}(x, t) d\varphi(t), \qquad k = 1, 2, \cdots, n-1$$

et si $n \geqq 1$,

$$f_g^{(n)}(x) = \varphi(x-0) - \varphi(a), \qquad f_d^{(n)}(x) = \varphi(x+0) + \varphi(a)$$

pour tout $x \in (a, b)$.

Réciproquement, toute fonction non-concave d'ordre $n$ $(\geqq 1)$ et à $n^{\text{ème}}$ d. d. bornée dans $(a, b)$ peut se mettre, à un polynome additif de degré $n$ près, sous la forme (11). Il suffit de prendre, par exemple, $\varphi(t) = f_d^{(n)}(t)$ et d'ajouter le polynome

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^i}{i\,!} f^{(i)}(a).$$

W. Blaschke et G. Pick [9] ont démontré, dans le cas $n = 1$ que la représentation par une intégrale de Stieltjes est toujours possible. En effet, l'intégrale

$$\Phi(t) = \int_c^t (x-a)(b-x) d f_d{}'(x),$$

où $c = \dfrac{a+b}{2}$, existe pour $a < t < b$ et est une fonction non-décroissante, bornée dans l'intervalle ouvert $(a, b)$. En prenant pour $\Phi(a)$ une valeur convenable $\leqq \Phi(a+0)$ et pour $\Phi(b)$ une valeur convenable $\geqq \Phi(b-0)$, nous avons la représentation

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b H(x, t) d\Phi(t),$$

avec

$$H(x, t) = \begin{cases} \dfrac{x-b}{b-t}, & t \leqq x, \\[2mm] \dfrac{a-x}{t-a}, & t \geqq x, \end{cases}$$

valable pour tout point $x$ intérieur à l'intervalle $(a, b)$.

**12.** — On peut étudier aussi des dérivées définies autrement. Pour simplifier supposons $f$ définie dans l'intervalle borné $(a, b)$. Supposons qu'à tout $x \in (a, b)$ corresponde un ensemble $e$ de couples de points $(x', x'')$, tels que $x' < x < x''$ et que tout voisinage $V_x^1$ contienne au moins un couple $(x', x'')$. Le max. et le min. de $2[x', x, x''\,;\, f]$ tendent, pour $\lambda \to 0$, lorsque les points $x', x'', (x', x'') \in e$ restent dans l'intervalle $(x - \lambda, x + \lambda)$, vers les limites (propres ou impropres) $\overline{D}^2 f(x)$, $\underline{D}^2 f(x)$. Nous pouvons appeler $\overline{D}^2 f(x)$ *une dérivée seconde supérieure généralisée en* $x$ *et* $\underline{D}^2 f(x)$ *une dérivée seconde inférieure généralisée* en $x$. Si, en tout point $x \in \cdot(a, b)$, nous avons défini les nombres $\overline{D}^2 f(x)$, $\underline{D}^2 f(x)$, nous avons une dérivée seconde supérieure resp. inférieure généralisée dans $(a, b)$. Si $f$ est deux fois dérivable on a évidemment $\overline{D}^2 f(x) = \underline{D}^2 f(x) = f''(x)$.

Nous avons alors la propriété suivante :

Si $f$ est semi-continue supérieurement et s'il existe une dérivée seconde supérieure $\overline{D}^2 f(x)$ telle que

$$\overline{D}^2 f(x) \geqq 0, \qquad x \in \cdot(a, b),$$

la fonction $f$ est non-concave d'ordre 1 dans $(a, b)$.

En effet, soit $\mu = \min \overline{D}^2 f(x)$ dans $(a, b)$. Nous avons $\mu \geqq 0$. Si $\mu > 0$, la propriété résulte de la propriété démontrée à la fin du nº 8. Pour $\mu = 0$, la propriété résulte du fait qu'alors $f + \alpha x^2$ où $\alpha > 0$ est dans le cas $\mu > 0$. Les fonctions $f + \alpha x^2$, $\alpha > 0$ sont donc non-concaves d'ordre 1, il en est de même pour leur limite $f$ si $\alpha \to 0$ (voir plus loin nº 17).

Dans le cas particulier $x' = x - h$, $x'' = x + h$, $0 < h < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\overline{D}^2 f(x)$, $\underline{D}^2 f(x)$ sont les dérivées secondes généralisées habituelles et la propriété précédente est due à S. Saks [51 a].

## CHAPITRE II

# PROPRIÉTÉS DIVERSES DES FONCTIONS D'ORDRE $n$

**13.** — Pour une fonction non-concave d'ordre 1 nous avons l'inégalité classique

$$(12) \quad f\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_mx_m}{p_1 + p_2 + \cdots + p_m}\right) \leqq \frac{p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \cdots + p_mf(x_m)}{p_1 + p_2 + \cdots + p_m},$$

où $p_i > 0$, donnée dans un cas particulier par O. Hölder [22], et dans le cas général par J. L. W. V. Jensen [27]. Si $f$ est convexe l'égalité n'est possible que pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_m$.

A. del Chiaro [15] a généralisé cette inégalité par la suivante

$$(13) \qquad f\left[\frac{\int p\varphi dx}{\int pdx}\right] \leqq \frac{\int pf(\varphi)dx}{\int pdx},$$

les intégrales étant prises de $a$ à $b$ et où $p(x)$ est sommable et presque partout $> 0$, $\varphi(x)$ mesurable et bornée dans $(a, b)$, $f(x)$ non-concave d'ordre 1 dans $(m, M)$, $m = \min \varphi$, $M = \max$ . Si $f$ est convexe et $\varphi$ n'est pas presque partout une constante, nous avons le signe $<$ dans (13). Dans des cas particuliers, l'inégalité (13) a déjà été signalée par J. L. W. V. Jensen [27] et G. Pólya [46 a].

Toutes ces inégalités résultent du principe suivant : Soit $f$ non-concave d'ordre 1 sur E et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions $\varphi$ d'une ou de plusieurs variables, définies sur un ensemble E* de manière que : 1° $\varphi$ est uniforme et toutes ses valeurs appartiennent à E, 2° si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$, on a aussi $k\varphi_1 \in \mathcal{F}$, $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathcal{F}$, $k$ étant une constante réelle, 3° si $\varphi \in \mathcal{F}$, on a aussi $f(\varphi) \in \mathcal{F}$, 4° $1 \in \mathcal{F}$. Soit alors $\Omega[\varphi]$ une opération fonctionnelle linéaire non-négative, définie pour la famille $\mathcal{F}$, dont les valeurs appartiennent à E et telle que $\Omega[1] = 1$. On a donc :

1° $\Omega[k\varphi] = k\,\Omega[\varphi]$ si $k$ est une constante,

2° $\Omega[\varphi_1 + \varphi_2] = \Omega[\varphi_1] + \Omega[\varphi_2]$,

3° $\Omega[\varphi] \geqq 0$ si $\varphi \geqq 0$.

L'inégalité

$$f(\Omega[\varphi]) \leqq \Omega[f(\varphi)],$$

résulte alors de (6) comme l'a remarqué B. JESSEN [28 a]. En particularisant la famille $\mathcal{F}$ et en choisissant convenablement l'opération $\Omega$, E. J. MCSHANE [38] a obtenu diverses inégalités et a aussi étudié les cas où le signe = a lieu. En particulier, la famille peut être formée par une certaine classe de fonctions d'un nombre quelconque $m$ de variables et l'opération $\Omega$ exprimée par une intégrale $m$-uple.

H. P. MULHOLLAND [40] démontre que, pour que l'on ait

$$f\left(\frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i}\right) \leqq A\,\frac{\Sigma p_i f(Bx_i)}{\Sigma p_i}, \qquad p_i > 0,$$

A, B étant deux constantes positives données, il faut et il suffit qu'on puisse trouver une fonction $\varphi$ non-concave d'ordre 1 telle que

$$\varphi(x) \leqq f(x) \leqq A\varphi(Bx).$$

Considérons la moyenne quasi-arithmétique

$$\mathfrak{M}_\varphi = \varphi^{-1}\left(\frac{\Sigma p_i \varphi(x_i)}{\Sigma p_i}\right), \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{M}_\varphi = \varphi^{-1}\left(\int_0^1 \varphi(g)\,dx\right),$$

$g$ étant une fonction convenable de $x$ et $\varphi^{-1}$ la fonction inverse de $\varphi$. B. JESSEN [28 a, 28 b] démontre que si $\varphi$, $\psi$ sont continues, $\varphi$ monotone, $\psi$ croissante, l'inégalité $\mathfrak{M}_\varphi \leqq \mathfrak{M}_\psi$ pour tous les $x_i, p_i > 0$ ou les fonctions $g$, revient à l'inégalité de Jensen. Il faut et il suffit en effet, pour qu'il en soit ainsi, que $\psi(\varphi^{-1})$ soit non-concave d'ordre 1. K. KNOPP [32 a] remarque, d'ailleurs, que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right) \leqq \psi^{-1}\left(\frac{\psi(x) + \psi(y)}{2}\right),$$

pour tous les $x$, $y$ dans l'intervalle de définition des fonctions.

14. — Des inégalités limitant supérieurement le second nombre de (12) ou de (13) ont été établies sous certaines hypothèses restrictives faites sur les $x_i$ ou sur les fonctions $p$, $\varphi$.

Soit $f$ continue et non-concave d'ordre 1 dans l'intervalle fermé $(0, 1)$ (1). Posons

$$A = \int_0^1 \varphi dx, \qquad A_f = \int_0^1 f(\varphi) dx,$$

où, pour simplifier, nous pouvons supposer $\varphi$ continue dans $(0,1)$, telle que $0 \leqq \alpha \leqq \varphi \leqq \beta \leqq 1$, $\alpha < \beta$. L'inégalité de Jensen s'écrit alors $B_f = A_f - f(A) \geqq 0$. Si, de plus, $\varphi$ est non-concave d'ordre $0, 1, \dots, n$ nous avons [**47 r**],

$$(14) \quad A_f \leqq \int_0^1 f\left\{\alpha + j(j+1)\left[\left(A - \frac{j\alpha + \beta}{j+1}\right) + \left(\frac{(j-1)\alpha + \beta}{j} - A\right)x\right]x^{j-1}\right\} dx$$

si

$$\frac{j\alpha + \beta}{j+1} \leqq A \leqq \frac{(j-1)\alpha + \beta}{j}, \qquad 2 \leqq j \leqq n,$$

et

$$(15) \quad A_f \leqq \frac{\beta + n\alpha - (n+1)A}{\beta - \alpha} f(\alpha) + \frac{(n+1)(A - \alpha)}{n(\beta - \alpha)\sqrt[n]{\beta - \alpha}} \int_\alpha^\beta \frac{f(x)dx}{\sqrt[n]{(x - \alpha)^{n-1}}}$$

si $a \leqq A \leqq \dfrac{n\alpha + \beta}{n+1}$.

Si, de plus, la fonction $f$ est convexe, l'égalité dans (14) n'est possible que si $\varphi$ est égale au polynome qui figure comme argument de $f$ dans le second membre et dans (15) seulement si

$$\varphi = \alpha + (\beta - \alpha)\left[\frac{|x - \lambda| + x - \lambda}{2(1 - \lambda)}\right]^n, \qquad \lambda = \frac{\beta + n\alpha - (n+1)A}{\beta - \alpha}.$$

Ces résultats conduisent à la limitation supérieure de $B_f$. D'après K. Knopp [**32 b**] on a, si $\varphi$ est non-décroissante,

$$B_f \leqq \max_{(\alpha, \beta)} \left[\frac{(\beta - x)f(\alpha) + (x - \alpha)f(\beta)}{\beta - \alpha} - f(x)\right].$$

Le maximum du second membre est atteint pour une seule valeur $x_1$ de $x$, si $f$ est convexe. Le maximum de $B_f$ n'est alors atteint que par des fonctions discontinues, par exemple par

$$\varphi = \begin{cases} \alpha, & 0 \leqq x \leqq \dfrac{\beta - x_1}{\beta - \alpha}, \\ \beta, & \dfrac{\beta - x_1}{\beta - \alpha} \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

(1) On peut passer facilement à un intervalle fermé $(a, b)$ quelconque.

Lorsque $\varphi$ est continue, non-décroissante et non-concave d'ordre 1, on a [47 r],

$$B_f \leqq \max_{\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \left\{ f(\alpha) + \frac{2(x-\alpha)}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta [f(t) - f(\alpha)]dt - f(x) \right\},$$

l'égalité n'étant possible, si $f$ est convexe, que pour une seule valeur $x_0$ de $x$ et pour la fonction

$$\varphi = \alpha + (\beta - \alpha)\frac{|x-\lambda| + x - \lambda}{2(1-\lambda)}, \qquad \lambda = \frac{\beta + \alpha - 2x_0}{\beta - \alpha}.$$

Dans la démonstration que nous avons donnée à ces résultats [47 r], nous avons supposé, de plus, que $f$ a des dérivées finies en 0 et 1. On peut facilement voir que cette restriction n'est pas essentielle.

J. Favard [16] a démontré, entre autres, que

$$A_f \leqq \int_0^1 f(2xA)dx,$$

si $\varphi$, $0 \leqq m \leqq \varphi \leqq M$, est non-convexe d'ordre 1 dans $(0, 1)$ et $f$ non-concave (intégrable) dans $(0, M_1)$, $M_1 = \max(M, 2A)$. Si $f$ est, de plus, convexe l'égalité n'est possible que pour les fonctions

$$\varphi = \mu x, \quad \mu(1-x), \quad \mu[(1-2\lambda)x + \lambda - |x-\lambda|], \quad \mu > 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

**15.** — On a cherché à déterminer les inégalités de la forme

$$(16) \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i f(x_i) \geqq 0, \quad x_1 < x_2 < \cdots < x_m, \quad p_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

valables pour toutes les fonctions non-concaves d'ordre $n$. La condition nécessaire et suffisante est que l'on ait [47 h, 47 i],

$$(17) \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i x_i^k = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{r} p_i (x_i - x_{r+1})(x_i - x_{r+2}) \cdots (x_i - x_{r+n}) \leqq 0,$$

$$r = 1, 2, \ldots, m - n - 1,$$

On suppose, bien entendu, qu'il s'agit d'une fonction définie sur les points $x_i$. Lorsque la fonction est définie dans un intervalle contenant les points $x_i$, les conditions précédentes ne sont plus nécessaires pour $n > 1$. Dans ce cas les conditions nécessaires et suffisantes sont (17) et

$$-\sum_{r=1}^{r} p_i(x_i - x)^n = \sum_{i=r+1}^{m} p_i(x_i - x)^n \geqq 0, \qquad x \in (x_r, x_{r+1}),$$
$$r = 1, 2, \ldots, m - n - 1.$$

Lorsque la fonction est convexe d'ordre $n$ le signe $>$ a lieu dans (16).

Considérons $r$ points $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$ et $r$ nombres positifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Parmi tous les polynomes de degré $m$ de la forme $P(x) = x^m + \ldots$, il en existe un et un seul $P_m(x)$ rendant minimum l'expression $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i [P(x_i)]^2$. Nous avons ainsi une suite de polynomes

$$1 = P_0, P_1, \ldots, P_{r-1}, \qquad P_r = \prod_{i=1}^{r} (x - x_i),$$

qui sont orthogonaux, en ce sens que

$$\sum_{i=1}^{r} P_\alpha(x_i) P_\beta(x_i) = 0, \qquad \alpha \neq \beta.$$

Les zéros du polynome $P_m$ ($m < r$) sont tous réels, distincts et à l'intérieur de l'intervalle $(x_1, x_r)$. De plus, les zéros du polynome $P_s$, $s < m$, sont séparés par les zéros $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_m$ de $P_m$, $m \leqq r$, c'est-à-dire que la suite

$$P_s(y_1), P_s(y_2), \qquad \ldots, P_s(y_m)$$

présente $s$ variations [47 b], ce qui précise beaucoup la distribution des points $x_i$, $y_i$.

Les zéros $y_i$ de $P_m$ sont déterminés par le système

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i^s = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^s, \qquad s = 0, 1, \ldots, 2m - 1,$$

qui donne aussi les nombres positifs $\mu_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, que nous appelons les *poids* du polynome $P_m$. Les $\lambda_i$ sont les poids de $P_r$.

Toute fonction définie sur les points $x_i$, $y_i$ et non-concave d'ordre impair $n = 2m - 1$, vérifie l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i f(y_i) \leqq \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(x_i), \qquad \left(m \geqq 1, \qquad r > \frac{n+1}{2}\right).$$

Pour $r = m + 1$, l'inégalité revient à l'inégalité de définition. Si, de plus, la fonction est convexe nous avons le signe $<$ [**47 i**].

Soient, maintenant $z_1 < z_2 < \dots < z_m$ les zéros, tous réels et distincts, du polynome $P_m + \rho P_{m+1}$. Nous avons le système

$$\sum_{i=1}^{m} \nu_i z_i^s = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^s, \qquad s = 0, 1, \cdots, 2m-2,$$

qui détermine aussi les *poids* positifs $\nu_i$ du polynome $P_m + \rho P_{m+1}$.

Toute fonction non-concave d'ordre pair $n = 2m - 2$, définie sur les points $x_i$, $z_i$ vérifie l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{m} \nu_i f(z_i) \leqq \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(x_i), \qquad \left(m \geqq 1, \qquad r \geqq \frac{n+2}{2}\right)$$

pourvu que le nombre $\rho$ soit choisi de manière que $y_1 \leqq x_1$, qui pour $r = m$ revient à l'inégalité de définition. Lorsque la fonction est convexe le signe $<$ a lieu [**47 i**].

Pour $m = 1$ on peut voir aussi que, si $f$ est continue et croissante, ou décroissante, il existe un seul $z_1$ tel que

$$f(z_1) = \frac{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i}, \qquad x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_r,$$

et, si $x_1 < x_r$, on a $x_1 < z_1 < x_r$ [**21 b**].

Dans le cas $n$ quelconque, on peut faire $r \to \infty$ et obtenir ainsi des inégalités analogues à celle de J. L. W. V. Jensen [voir **47 i**].

**16.** — L'inégalité (16) peut aussi être écrite sous la forme

$$\sum_{i=1}^{m} f(x_i) \geqq \sum_{i=1}^{m} f(y_i), \tag{18}$$

$x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_m$, $y_1 \leqq y_2 \leqq \dots \leqq y_m$, si les rapports mutuels des coefficients $p_i$ sont rationnels.

Pour que cette inégalité soit vérifiée pour toute fonction $f$ non-décroissante, il faut et il suffit que $x_i \geqq y_i$, $i = 1, 2, \dots m$, les cas d'égalités étant immédiats.

G. H. Hardy, J. L. Littlewood et G. Pólya [**21 a**] et J. Kara-

MATA [31] ont examiné l'inégalité (18) pour une fonction non-concave d'ordre 1. La condition nécessaire et suffisante cherchée est alors

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_i \leqq y_1 + y_2 + \cdots + y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1,$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = y_1 + y_2 + \cdots + y_m.$$

Cette condition est équivalente à la suivante [21 b]: On peut trouver $m^2$ nombres non-négatifs $p_{ij}$ tels que

$$y_i = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \cdots + p_{im}x_m, \qquad i = 1, 2, \cdots, m,$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, m.$$

Dans cette catégorie rentre l'inégalité de K. Toda [59]

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f(x_i) \geqq \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1} f(y_i),$$

valable pour toute fonction non-concave d'ordre 1, les $y_i$ étant les zéros de la dérivée du polynome $\prod_{i=1}^{m}(x - x_i)$, l'égalité n'étant possible pour une fonction convexe, que si $x_1 = x_2 = \ldots = x_m$. Pour les fonctions de la forme $x^p$ ($p \geqq 1$ ou $p < 0$), cette inégalité a été déjà étudiée par H. E. Bray [12] et S. Kakeya [30 c].

L'inégalité de M. Petrovitch [44]

$$\sum_{i=1}^{m} f(x_i) \leqq (m-1)f(0) + f\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right), \qquad x_i \geqq 0,$$

ou l'inégalité plus générale

$$\sum p_i f(x_i) \leqq \left(\sum p_i - 1\right) f(0) + f\left(\sum p_i x_i\right), \qquad x_i \geqq 0, \qquad p_i > 0,$$

où $f$ est non-concave d'ordre 1 dans $(0, +\infty)$ fermé à gauche, peut se rattacher aux inégalités (16) et (18).

Pour que l'on ait, $\varphi$, $\psi$, étant non-décroissantes,

$$\text{(19)} \qquad \int_a^b f(\varphi)dx \leqq \int_a^b f(\psi)dx,$$

pour toute fonction $f$ continue et non-concave d'ordre 1, il faut et il suffit que

$$\int_\xi^b \varphi dx \leqq \int_\xi^b \psi dx, \qquad a \leqq \xi \leqq b \qquad (\text{pour } \xi = a, \text{ le signe est } =)$$

ou bien, sous une autre forme, équivalente à celle-ci,

$$\int_a^b |\varphi - \lambda| dx \leqq \int_a^b |\psi - \lambda| dx, \qquad (\text{pour } \lambda = 0, \text{ le signe est } =),$$

quelle que soit la constante $\lambda$ [**21 b**].

Tous ces résultats s'obtiennent facilement, en remarquant que, pour qu'une inégalité de la forme indiquée soit vraie pour toute fonction non-concave d'ordre $n$, il faut et il suffit qu'elle soit vraie pour un polynome de degré $n$ et pour les fonctions de la forme $(|x - \lambda| + x - \lambda)^n$, $\lambda$ étant une constante.

Comme une application de (19), on peut considérer l'inégalité

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt \leqq \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}, \qquad x+h, x-h \in \cdot (a, b).$$

qui est vérifiée par toute fonction non-concave d'ordre 1 dans $(a, b)$. Réciproquement, toute fonction sommable et semi-continue supérieurement, qui vérifie cette inégalité, quels que soient $x$ et $h$ possibles, est non-concave d'ordre 1 dans $(a, b)$.

T. Rado [**48 b**] a généralisé cette inégalité de la manière suivante : l'inégalité

$$(20) \qquad \left[\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} [f(t)]^\alpha dt\right]^{\frac{1}{\alpha}} \leqq \left[\frac{f(x+h)^\beta + f(x-h)^\beta}{2}\right]^{\frac{1}{\beta}},$$
$$x+h, x-h \in \cdot (a, b),$$

est vérifiée par toute fonction continue, positive et non-concave d'ordre 1 dans $(a, b)$ si, et seulement si $\alpha \leqq -2$, $\beta \geqq 0$, ou $-2 \leqq \alpha \leqq -\frac{1}{2}$, $3\beta \geqq \alpha + 2$, ou $-\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq 1$, $\beta \geqq \alpha \log 2/\log(\alpha + 1)$, ou, enfin, $\alpha \geqq 1$, $3\beta \geqq \alpha + 2$. Si $3\beta - \alpha - 2 \leqq 0$ et si la fonction continue et positive $f$ satisfait à l'inégalité (20), elle est non-concave d'ordre 1 dans $(a, b)$. Il en résulte que les fonctions continues, positives et non-concaves d'ordre 1 sont caractérisées par l'inégalité (2), si $3\beta = \alpha + 2$ et $-2 \leqq \alpha \leqq -\frac{1}{2}$ ou $\alpha \geqq 1$.

**17.** — On peut aussi établir des inégalités entre les valeurs de la fonction $f$ et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre $\leqq n$. Pour simplifier, supposons $f$ définie dans un intervalle contenant les points $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Pour que l'inégalité

$$(21) \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{k_i} p_{ij} f^{(j)}(x_i) \geqq 0, \qquad \sum_{j=0}^{k_i} |p_{ij}| \neq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

où $0 \leqq k_i \leqq n$ et $f^{(n)}$ désigne l'une des dérivées $f_g^{(n)}$, $f_d^{(n)}$ (non pas nécessairement la même pour tous les $x_i$), soit vérifiée pour toute fonction non-concave d'ordre $n$, il faut et il suffit que

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} p_{ij} s(s-1) \cdots (s-j+1) x_i^{s-j} = 0, \qquad s = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=r+1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} p_{ij} n(n-1) \cdots (n-j+1)(x_i - x)^{n-j} \geqq 0, \qquad x \in (x_r, x_{r+1}),$$

$$r = 1, 2, \ldots, m-1.$$

En particulier, dans le cas $\sum_{i=1}^{m} (k_i + 1) = n + 2$, l'inégalité (21) n'est autre que la limite de l'inégalité de définition (1) lorsque les points $x_i$ tendent l'un vers l'autre par groupes de $k_1 + 1$, $k_2 + 1$, ..., $k_m + 1$ points. On peut écrire cette inégalité sous la forme

$$[\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{k_1+1}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{k_2+1}, \ldots, \underbrace{x_m, x_m, \ldots, x_m}_{k_m+1}; f] \geqq 0$$

et le premier membre est un quotient de deux déterminants qu'on obtient facilement de la d. d. d'ordre $n+1$ par application répétée de la régle de L'Hospital. En particulier, pour $m = 2$, $k_1 = k$, nous obtenons

$$(-1)^{n-k+1} \left[ \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (n-i)!\,(b-a)^i f^{(i)}(a) - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} (n-i)!\,(b-a)^i f^{(i)}(b) \right] \geqq 0, \qquad a < b.$$

Si la fonction $f$ est convexe d'ordre $n$, dans toutes ces inégalités le signe $>$ a lieu.

**18.** — Une fonction peut jouir à la fois de plusieurs propriétés de convexité. En particulier, les fonctions qui sont non-concaves d'ordre $0, 1, \ldots, n$ s'appellent aussi $(n+1)$ — *fois monotones* et interviennent dans divers problèmes d'Analyse Mathématique. Les fonctions non-concaves de tout ordre entier non-négatifs sont aussi appelées fonctions *complètement monotones*. Nous dirons un mot sur ces fonctions au Chap. suivant.

Il existe des fonctions définies sur un ensemble fini, jouissant de plusieurs propriétés de convexité données d'avance, pourvu que, si la propriété d'ordre $n$ est de polynomialité, toute propriété d'ordre $> n$ soit aussi de polynomialité. D'ailleurs une fonction polynomiale d'ordre $n$ doit nécessairement être convexe, polynomiale ou concave d'ordre $n-1$. On peut aussi trouver des fonctions (polynomes) jouissant d'un nombre fini de propriétés de convexité ou concavité choisies arbitrairement dans un intervalle $(a, b)$ [**47 d**]

La famille des fonctions d'ordre $n$ est invariable par une transformation linéaire. Si $f$, $g$ sont des fonctions jouissant des mêmes propriétés de convexité, les fonctions $cf$, $f+g$ jouissent aussi des mêmes propriétés si $c$ est une constante positive, la convexité et la polynomialité étant regardées comme des cas particuliers de la non-concavité. On peut aussi préciser les caractères de convexité du produit $fg$ et de la fonction de fonction $f(g)$. Par exemple, si $f$ est non-concave d'ordre $-1, 0, 1, \ldots, n$ et $g$ non-concave d'ordre $-1, 0, 1, \ldots, n$ ou non-convexe d'ordre $-1, 0, 1, \ldots, n$, le produit $fg$ est aussi non-concave ou non-convexe d'ordre $-1, 0, 1, \ldots, n$. Si $f$, $g$ sont $n$-fois monotones, $f(g)$ est aussi $n$-fois monotone,... etc. De telles propriétés ont déjà été établies par J. L. W. V. Jensen [27]. pour les fonctions monotones et les fonctions d'ordre 1.

La limite d'une suite convergente $\{ f_m \}$ de fonctions jouissant des mêmes propriétés de convexité, jouit encore des mêmes propriétés. D'après P. Montel [**39 b**] si les $f_m$ sont non-concaves d'ordre 1 et également bornées sur un sous-ensemble complètement intérieur à E, $\overline{\lim}\, f_m$ et $\max f_m$ sont aussi non-concaves d'ordre 1 sur ce sous-ensemble. Ces propriétés restent vraies pour les fonctions d'ordre $-1$ ou 0 et aussi pour les fonctions qui possèdent deux ou trois propriétés d'ordre $-1$, 0 et 1, mais ne sont évidemment pas vraie pour les fonctions d'ordre $> 1$. Pour le voir, il suffit de prendre la famille de deux fonctions $x$, $-x$, qui sont d'ordre $n > 1$, mais leur fonction maximum $|x|$ n'est pas d'ordre $n > 1$ dans un intervalle contenant l'origine. G. Valiron [**61 a**] a précisé les résultats précédents en remarquant que si $f(x\,;\,t)$ est continue en $x$ et $t$ pour $a \leqq x \leqq b$, $\alpha \leqq t \leqq \beta$ et convexe d'ordre 1 en $x$ pour tout $t$, la fonction $\max f(x\,;\,t)$ sur $E_t \subset (\alpha, \beta)$ est aussi convexe d'ordre 1 dans $(a, b)$. L'exemple

$$f(x\,;\,t) = \frac{\sqrt{16-t^2} - \sqrt{16-(2x-t)^2}}{2}, \quad -1 < x < 1, \quad -1 \leqq t \leqq 1,$$

nous montre que cette propriété ne peut s'étendre au cas $n > 1$. Au contraire, comme G. VALIRON [61 a] le remarque aussi dans le cas $n = 1$, l'intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} f(x\,;\,t)dt$ est non-concave resp. convexe d'ordre $n$ si $f(x\,;\,t)$ est non-concave resp. convexe d'ordre $n$ pour tout $t$. Ici il suffit d'ailleurs que l'intégrale existe au sens de LEBESGUE, quel que soit $x$ et on peut, évidemment, remplacer $(a, b)$ par un ensemble E quelconque, et $(\alpha, \beta)$ par un ensemble mesurable quelconque.

Toute famille de fonctions non-concaves d'ordre 1 et également bornées sur E est aussi également continue donc normale sur toute section $\subset \cdot$ E. M. NICOLESCO [41] a démontré que la famille est normale pourvu que les fonctions soient également bornées supérieurement et en déduit que toute suite monotone de fonctions non-concaves d'ordre 1 qui converge en un point $x_0 \in \cdot$ E converge uniformément sur toute section $\subset \cdot$ E.

**19.** — P. MONTEL [39 b] et G. VALIRON [61 a] ont démontré que pour que $\log f$ soit non-concave resp. convexe d'ordre 1 il faut et il suffit que $e^{\alpha x} f$ soit non-concave resp. convexe d'ordre 1 pour toutes les valeurs de la constante $\alpha$.

Soit $F(t)$ une fonction croissante dans $(-\infty, +\infty)$. Si la fonction $F(f + P)$ est non-concave resp. convexe d'ordre $n$ ($\geqq 1$) sur E, quel que soit le polynome P de degré $n$ sans terme constant, la fonction $f$ est non-concave resp. convexe d'ordre $n$ sur E. En effet, si l'on détermine le polynome P tel que

$$f(x_i) + P(x_i) = \rho, \qquad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

on a

$$f(x_{n+2}) + P(x_{n+2}) = \rho + \frac{U(x_1, x_2, \dots, x_{n+2}\,;\,f)}{V(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}$$

et l'inégalité

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}\,;\,F] \geqq 0 \text{ resp. } > 0,$$

nous donne

$$F(f(x_{n+2}) + P(x_{n+2})) \geqq \text{ resp. } > F(\rho),$$

d'où la propriété. Pour $n = 0$ la propriété est banale. Si $F(f)$ est non-décroissante resp. croissante, $f$ est évidemment non-décroissante resp. croissante sur E.

Mais il y a des résultats beaucoup plus complets. Supposons $F(t)$ continue dans $(-\infty, +\infty)$, et soit $f$ une fonction continue dans l'intervalle $(a, b)$. En suivant un raisonnement de S. Saks [51 c], on peut démontrer que, si $F(f + \alpha x + \beta)$ est non-concave d'ordre 1, quelles que soient les constantes $\alpha$, $\beta$, alors : 1° F est non-concave d'ordre 1 ; 2° ou bien F est constante, ou $f$ est linéaire, ou F est non-décroissante et $f$ est non-concave d'ordre 1, ou enfin F est non-croissante et $f$ est non-convexe d'ordre 1. Si $n > 1$ les questions se présentent beaucoup plus simplement. Supposons, pour simplifier encore, que F et $f$ sont $(n + 1)$ fois dérivables. Alors, si $F(f + P)$ est non-concave d'ordre $n$, quel que soit le polynome P de degré $n$, la fonction F est *nécessairement linéaire*. Soit, en effet, $\xi$ une valeur de $t$, $x_0$ une valeur de $x$ et $\alpha$ un nombre quelconque. Nous pouvons déterminer le polynome P de manière que l'on ait

$$f(x_0) + P(x_0) = \xi, \qquad f^{(k)}(x_0) + P^{(k)}(x_0) = 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$
$$f^{(n)}(x_0) + P^{(n)}(x_0) = \alpha.$$

La formule de la dérivée $(n + 1)^{\text{ème}}$ d'une fonction de fonction nous donne alors, pour $x = x_0$,

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} F(f + P) = (n+1)\alpha F''(\xi) + A \geqq 0,$$

A étant un nombre indépendant de $\alpha$. On en déduit $F''(\xi) = 0$, donc F est linéaire. On voit d'ailleurs que, de plus, ou bien F est constante, ou bien F est non-décroissante et $f$ non-concave d'ordre $n$, ou bien F est non-croissante et $f$ non-convexe d'ordre $n$.

P. Montel [39 b] et G. Valiron [61 a] ont également démontré que, si $\log f$ est non-concave resp. convexe d'ordre 1 en $\log x$, la fonction $\log \int_0^x f(x)dx$ est aussi non-concave resp. convexe d'ordre 1 en $\log x$.

**20.** — D'après J. Pál [43], toute fonction continue non-concave d'ordre 1 dans un intervalle fermé, peut être approchée indéfiniment par des polynomes non-concaves d'ordre 1. Toute fonction $f$, continue dans l'intervalle fermé $(a, b)$ est la limite d'une suite de polynomes, jouissant des mêmes propriétés de convexité que $f$

et convergente uniformément dans tout l'intervalle [**47 d**]. Ceci est réalisé par les polynomes de S. Bernstein [**7 a**],

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_n(x\,;f) = \frac{1}{(b-a)^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)(x-a)^i(b-x)^{n-i}.$$

De plus, toute fonction continue et non-concave d'ordre $n$ dans $(a, b)$ est la limite d'une suite uniformément convergente de polynomes d'ordre $n$ dans $(-\infty, +\infty)$ [**47 o**].

La $k^{\text{ème}}$ borne de $\mathrm{P}_n$ est $\leqq$ la $k^{\text{ème}}$ borne de $f$ pour $k = 0,1$ et est en général $<$ la $k^{\text{ème}}$ borne de $f$ pour $k > 1$. De même la $k^{\text{ème}}$ variation totale de $\mathrm{P}_n$ est $\leqq$ celle de $f$ pour $k = 0,1$ et est en général $<$ que celle de $f$ pour $k > 1$ [**47 d**].

On a, d'ailleurs,

$$|f(x) - \mathrm{P}_n(x\,;f)| \leqq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{b-a}{\sqrt{n}}\right), \qquad x \in (a, b),$$

$\omega(\delta)$ étant le module d'oscillation de $f$ [**47 d**].

Toute fonction continue et d'ordre $n$ dans $(a, b)$ est la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions élémentaires (voir n° **6**) d'ordre $n$ [**47 c**]. Supposons, d'abord, que $f$ ait une dérivée continue d'ordre $n-1$ dans l'intervalle fermé $(a, b)$, c'est alors une fonction non-concave d'ordre 1. On peut trouver une ligne polygonale $y = \varphi(x)$ inscrite dans la courbe $y = f^{(n-1)}(x)$, de manière que l'on ait

$$|f^{(n-1)} - \varphi| < \frac{(n-1)\,!\,\varepsilon}{(b-a)^{n-1}}, \qquad x \in (a, b),$$

$\varepsilon > 0$ quelconque étant donné d'avance. $\varphi$ est une fonction élémentaire d'ordre 1. La fonction élémentaire d'ordre $n$

$$\varphi^*(x) = \int_a^b \mathrm{G}_{n-2}(x, t)\varphi(t)dt + \sum_{i=1}^{n-2}\frac{(x-a)^i}{i\,!}f^{(i)}(a),$$

vérifie alors l'inégalité

$$|f(x) - \varphi^*(x)| < \varepsilon, \qquad x \in (a, b).$$

Dans le cas général, il suffit de remarquer qu'on peut trouver d'abord une fonction $f_1$ ayant une $(n-1)^{\text{ème}}$ dérivée continue telle que $\max|f - f_1|$ soit aussi petit que l'on veut.

Remarquons, d'ailleurs, comme le fait L. Galvani [**19**] dans le cas $n = 1$, que pour toute fonction non-concave d'ordre $n$ dans $(a, b)$ nous avons une décomposition de la forme

$$f(x) = f^*(x) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \left[\frac{|x - x_i| + x - x_i}{2}\right]^n, \qquad x \in \cdot (a, b),$$

où $x_i \in \cdot (a, b)$, $c_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} c_i < +\infty$ et $f$ est non-concave d'ordre $n$ ayant une dérivée d'ordre $n$ continue dans l'intervalle ouvert $(a, b)$. Les $x_i$ sont les points de discontinuité de la $n^{\text{ème}}$ dérivée de $f$ et

$$c_i = \frac{1}{n!}[f_d^{(n)}(x_i) - f_g^{(n)}(x_i)].$$

**21.** — Le polynome de Tchebycheff, ou le polynome de meilleure approximation de degré $n$, $T_n$ d'une fonction continue $f$, définie sur un ensemble fermé E, est le polynome rendant minimum l'expression max $|f - P|$ sur E, où P parcourt l'ensemble des polynomes de degré $n$. Le polynome $T_n$ est caractérisé complètement par le fait que $f - T_n$ atteint les valeurs $\pm$ max $|f - T_n|$ en au moins $n + 2$ points consécutifs avec des signes alternés, comme l'a démontré E. Borel [**11**].

Si $f$ est, de plus, non-concave d'ordre $n$, ne se réduisant pas à un polynome de degré $n$, on peut trouver *seulement* $n + 2$ points consécutifs où $f - T_n = \pm$ max $|f - T_n|$ avec des signes alternés. Autrement dit, si $f$ est non-concave d'ordre $n$, sans être polynomiale d'ordre $n$, les polynomes $T_n$, $T_{n+1}$ sont distincts, donc $T_{n+1}$ est effectivement de degré $n + 1$. Réciproquement, si $f$ est une fonction continue dans l'intervalle fermé $(a, b)$ et si, quel que soit l'intervalle fermé $(c, d) \subset (a, b)$, le polynome de Tchebycheff de degré $n + 1$ de $f$ dans $(c, d)$ est effectivement de degré $n + 1$, la fonction $f$ est convexe ou concave d'ordre $n$ dans $(a, b)$ [**47** I].

On peut aussi remarquer que, si $f$ est d'ordre $n$, la valeur max $|f - T_n|$ est nécessairement atteinte aux extrémités $a$ et $b$. On a, d'ailleurs $[f(a) - T_n(a)]\,[f(b) - T_n(b)] \leqq$ ou $\geqq 0$ suivant que $n$ est pair ou impair. Réciproquement, si $f$ est continue dans l'intervalle fermé $(a, b)$ et si, quel que soit l'intervalle fermé $(c, d) \subset (a, b)$, le polynome $T_n$ de $f$ dans $(c, d)$ vérifie les égalités $|f(c) - T_n(c)| = |f(d) - T_n(d)| = \max |f - T_n|$ dans $(c, d)$, la fonction $f$ est d'ordre $n$ dans $(a, b)$ [**47** j].

**22.** — Considérons l'intégrale

$$I(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Si $f$ est mesurable et bornée dans l'intervalle fermé $(a, b)$, l'expression $I(|f - P|)$ a un minimum lorsque P parcourt l'ensemble des polynomes de degré $n$. Ce minimum est atteint par au moins un polynome $P_n$, qui est unique si $f$ est continue, comme l'a démontré D. Jackson [**26**]. En particulier, pour $f = x^{n+1}$, A. Korkine, G. Zolotareff [**31** *bis*] et M. Fujiwara [**18**] ont montré que

$$(22) \quad x^{n+1} - P_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+2}} \frac{\sin (n+2)\theta}{\sin \theta}, \qquad \theta = \operatorname{arc} \cos \frac{2x - a - b}{b - a}$$

donc $(n + 2)(x^{n+1} - P_n)$ est la dérivée du polynome

$$\frac{(b-a)^{n+2}}{2^{2n+3}} \cos (n+2)\theta$$

qui s'écarte, parmi tous ceux de la forme $x^{n+1} + \ldots$, le moins possible de zéro dans l'intervalle $(a, b)$. Les zéros du polynome (22) sont

$$t_k^{(n)} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{k}{n+2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

On peut donc dire que le minimum de $I(|x^{n+1} - P|)$ est réalisé par le polynome de Lagrange $P(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_{n+1}^{(n)} ; x^{n+1} | x)$.

Soit $n = 0$ et $f$ une fonction monotone (non constante) qu'on peut supposer être non-décroissante. Le problème revient alors à déterminer le minimum de $I(|f - \lambda|)$ comme fonction de $\lambda$. Le minimum est encore atteint par $P(t_1^{(0)} ; f | x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, ce qui résulte de l'inégalité

$$(2x - a - b)f(x) \geqq 2 \int_{\frac{a+b}{2}}^{x} f(t)dt,$$

équivalente à l'inégalité $\left[x, x, \frac{a+b}{2} ; F\right] \geqq 0$, vérifiée par la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, non-concave d'ordre 1. H. STEINHAUS [55] a démontré que, si $n = 1$, le minimum est fourni par le polynome $P(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}; f | x)$ si $f$ est d'ordre 1. Enfin, V. HRUSKA [24] a montré que, pour $n$ quelconque, le minimum est donné par le polynome $P(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_{n+1}^{(n)}; f | x)$ lorsque $f^{(n+1)}$ existe et est $\geqq 0$. On en déduit facilement que le résultat subsiste si $f$ est seulement d'ordre $n$.

## CHAPITRE III

## GÉNÉRALISATIONS DES FONCTIONS D'ORDRE $n$

**23.** — Il paraît que O. STOLZ [57] a le premier introduit les fonctions convexes, en démontrant que pour l'existence des dérivées à gauche et à droite, $f_g'$ et $f_d'$, en tout point d'un intervalle ouvert $(a, b)$ où la fonction continue $f$ est définie, il suffit qu'à tout $x$ correspond un $\eta > 0$ tel que l'on ait

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geqq (\text{ou} \leqq)\ 0, \tag{23}$$

pour $|h| < \eta$. Cet auteur démontre que (23) entraîne l'inégalité

$$[x_1, x_2, x_3 ; f] \geqq (\text{ou} \leqq)\ 0, \qquad a \leqq x_1 < x_2 < x_3 \leqq b.$$

Mais c'est J. L. W. V. JENSEN [27] qui a le premier étudié d'une façon systématique les fonctions vérifiant l'inégalité (23).

Considérons les différences d'ordre $n$,

$$\delta_h^n f(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(x+ih)$$

de la fonction $f$, définie dans l'intervalle $(a, b)$. La différence $\delta_h^n f(x)$ est, à un facteur indépendant de la fonction près, une d. d. d'ordre $n$,

$$\delta_h^n f(x) = n!\, h^n [x, x+h, x+2h, \ldots, x+nh ; f].$$

DÉFINITION. — *Nous dirons que la fonction $f$, définie dans l'intervalle $(a, b)$ est convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe resp. concave d'ordre $n$ (J), ou au sens de Jensen, dans $(a, b)$ suivant que l'inégalité*

$$\delta_h^{n+1} f(x) >, \geqq, =, \leqq \text{ resp. } < 0, \qquad x, x+(n+1)h \in (a, b), \qquad h > 0,$$

*est satisfaite.*

*Toutes ces fonctions sont des fonctions d'ordre n* (J).

On en déduit immédiatement que, pour ces fonctions, l'inégalité (1) est vérifiée, pourvu que les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ se divisent rationnellement, c'est-à-dire que les rapports $\frac{x_{n+2} - x_i}{x_i - x_1}$ soient rationnels.

La définition peut s'étendre à tout ensemble E qui est tel qu'avec $x_1, x_2 \in E$ on a toujours $\frac{x_1 + x_2}{2} \in E$. Ainsi on peut étendre la définition à tout ensemble de points rationnels, mais dans ce cas, d'après la remarque précédente, ces fonctions sont d'ordre $n$ au sens ordinaire (du chap. I).

Toute fonction convexe, non-concave,... etc. d'ordre $n$ (J) sur E est convexe, non-concave,... etc. d'ordre $n$ au sens ordinaire sur tout sous-ensemble de E dont les points se divisent rationnellement.

**24.** — Toute fonction convexe, non-concave,... etc., d'ordre $n$ au sens ordinaire dans $(a, b)$ est évidemment convexe, non-concave,... etc., d'ordre $n$ (J) dans $(a, b)$. Si $n = 0$ la réciproque est vraie naturellement puisque les deux définitions coïncident, mais si $n > 0$ la réciproque n'est vraie que si l'on fait certaines hypothèses restrictives sur la fonction $f$. Il en est ainsi si la fonction est continue dans $(a, b)$ ou plus généralement si la fonction est bornée dans $(a, b)$. J. L. W. V. Jensen [27] a démontré que pour la fonction non-concave d'ordre 1 il suffit même qu'elle soit bornée supérieurement. P. Tortorici [60 a] a donné une nouvelle démonstration de cette propriété. La propriété réciproque est vraie aussi lorsque la fonction est mesurable dans $(a, b)$, comme l'ont démontré pour $n = 1$ H. Blumberg [10] et W. Sierpinski [54 b]. W. Sierpinski [54 c] a même démontré que, pour $n = 1$ et la fonction non-concave, il suffit qu'il existe une fonction mesurable $\varphi$ telle $f \leq \varphi$. A. Ostrowski [42] démontre une propriété analogue.

L'étude des fonctions linéaires (J) revient en somme à l'étude de l'équation de Cauchy.

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \tag{24}$$

dont la solution continue est $Ax$, $A$ étant une constante. En effet, si $f$ est linéaire (J) la fonction $f(x) - f(0)$ vérifie l'équation (24). Relativement à cette équation, G. Darboux [14] démontre que la solution est encore $Ax$ pourvu que $f$ soit bornée supérieurement ou inférieurement dans un intervalle fini. D'après H. LEBESGUE [35], S. BANACH [3] et W. SIERPINSKI [54 a] il en est encore ainsi si l'on suppose $f$ mesurable. M. KAC [29] (1) en a donné récemment une élégante démonstration. M. KORMES [33] a montré qu'il suffit même que $f$ soit bornée sur un ensemble mesurable de mesure $> 0$. On peut, d'ailleurs, démontrer, pour toutes les hypothèses signalées, qu'il suffit qu'elles soient réalisées dans un intervalle si petit soit-il. De même l'hypothèse de M. KORMES est applicable à toutes les fonctions d'ordre $n$ quelconque.

Faisons une petite disgression sur les équations de la forme

$$\delta_h^n f(x) = 0. \tag{25}$$

P. MONTEL [39 a] a démontré que si $f$ est continue et (25) est vérifiée pour tout $x$ et pour deux valeurs fixes $\omega_1$, $\omega_2$ ($\neq 0$) de $h$, dont le rapport est irrationnel, la fonction $f$ est un polynome de degré $n - 1$. Il en est ainsi même si $f$ est continue seulement en $n$ points [47 e]. Nous avons étudié les généralisations de l'équation (25) dans un autre travail [47 s].

**25.** — Disons quelques mots sur les fonctions discontinues d'ordre $n$ (J). Des remarques faites plus haut il résulte que si $f$ est d'ordre $n$ ($\geqq 1$) (J), elle est uniformément continue sur l'ensemble des points qui divisent rationnellement l'intervalle $(a, b)$ et qui appartiennent à un sous-intervalle $\subset \cdot(a, b)$. On retrouve ainsi, pour $n = 1$, une propriété de F. BERNSTEIN [5].

Soit $f$ non-concave d'ordre 1 (J) dans $(a, b)$ fermé. F. BERNSTEIN et G. DOETSCH [6] ont démontré que, si $f$ n'est pas bornée inférieurement dans l'intervalle $(a, b)$, elle n'est bornée inférieurement en aucun point de $(a, b)$. Ces auteurs ont aussi démontré que, si $m(x)$ est la fonction borne inférieure de $f$ et si $f \neq m$ en un point $x \in \cdot(a, b)$, la fonction $f$ n'est bornée supérieurement en aucun point, et les points représentatifs $(x, f(x))$ de la courbe $y = f(x)$ sont partout denses au-dessus de $y = m(x)$. La fonction $m(x)$ est d'ailleurs non-concave d'ordre 1 si $f$ est bornée inférieurement.

---

(1) Les démonstrations de MM. W. SIERPINSKI et M. KAC sont particulièrement importantes puisqu'elles n'emploient pas l'axiome de Zermelo. Au contraire, les résultats qui suivent ici sont démontrés à l'aide de cet axiome (plus exactement à l'aide du fait qu'un ensemble peut être bien ordonné).

Dans le cas contraire, les points représentatifs $(x, f(x))$ sont partout denses dans la bande comprise entre les ordonnées $a$ et $b$. G. HAMEL [20] remarque aussi que, si $f$ est linéaire (J) dans $(-\infty, +\infty)$, les points représentatifs sont partout denses dans le plan.

G. HAMEL [20] a construit la fonction linéaire (J) la plus générale en résolvant l'équation (24). A une constante additive près, cette fonction est de la forme

$$f(r_1\alpha + r_2\beta + \cdots) = r_1 f(\alpha) + r_2 f(\beta) + \cdots,$$

où $r_1, r_2, \ldots$ sont des nombres rationnels, $\alpha, \beta, \ldots$ les éléments d'une *base* $\mathcal{H}$ des nombres réels, donc des nombres tels que tout $x$ peut être représenté d'une manière unique sous la forme

$$x = r_1\alpha + r_2\beta + \cdots, \qquad \alpha, \beta, \cdots \in \mathcal{H},$$

avec un nombre fini de nombre rationnels $r_1, r_2, \ldots$ non nuls et enfin $f(\alpha), f(\beta), \ldots$ sont des nombres donnés quelconques.

M. H. INGRAHAM [25] a généralisé ce résultat donnant la solution générale de l'équation (25).

**26.** — En ne considérant que des d. d. sur des points équidistants de la fonction $f$ définie dans un intervalle $(a, b)$, que nous pouvons supposer ouvert, on peut encore définir une $n^{\text{ème}}$ borne $\Delta_n^*$, qui est, par définition, le maximum de la valeur absolue de la d. d. $\frac{1}{n!\,h^n}\delta_h^n f(x)$ dans l'intervalle $(a, b)$. Si $\Delta_n^*$ est fini, la fonction $f + \Delta_n^* x^n$ est non-concave d'ordre $n-1$ (J).

Toute d. d. d'ordre $n$ de $f$, prise sur des points qui se divisent rationnellement, est comprise entre $-\Delta_n^*$ et $\Delta_n^*$, d'où l'on déduit que si $f$ est continue, $\Delta_n^* = \Delta_n$, $\Delta_n$ étant la $n^{\text{ème}}$ borne définie au n° 9. Il en résulte aussi que, si $n \geqq 2$ et si $f$ est bornée ou mesurable et $\Delta_n^*$ est fini, la fonction est continue.

S. SAKS [51 b] remarque que, si la fonction $f$ est dérivable, et

$$\varliminf_{h \to 0} h^{-3}\delta_{2h}^3 f(x-3h) \geqq 0, \qquad x \in \cdot (a, b),$$

elle est non-concave d'ordre 2 dans $(a, b)$. S. VERBLUNSKY [63 a] démontre, d'ailleurs, que, si $f$ est dérivable dans l'intervalle fermé $(a, b)$, et si la dérivée troisième généralisée

$$\lim_{h \to 0} (2h)^{-3}\delta_{2h}^3 f(x-3h) = \varphi(x), \qquad x \in \cdot (a, b)$$

existe, on a, pour $a < c < d < b$, $3h_1 = d - c$,

$$\min_{(c,\, d)} \varphi(x) \leqq [(2h_1)^{-3}\delta^3_{2h_1} f(x - 3h_1)]_{x=c} \leqq \max_{(c,\, d)} \varphi(x),$$

et trouve une propriété analogue pour la différence du quatrième ordre $\delta^4_h f(x - 2h)$ [63 **b**].

Remarquons aussi que, d'après A. Marchaud [36], si $f$ est bornée dans l'intervalle fermé $(a, b)$ et $\delta^n_h f(x) \to 0$, uniformément par rapport à $x$, la fonction est continue. De même si $h^{-n}\delta^n_h f(x) \to g(x)$, uniformément, $f$ a une $n^{\text{ème}}$ dérivée continue égale à $g(x)$. Ces résultats subsistent si on suppose la fonction $f$ mesurable [47 **q**], comme l'a démontré, pour la deuxième propriété, aussi H. Whitney [64].

**27.** — S. Bernstein [7 **b**] considère les fonctions $f$ qui vérifient les inégalités $\delta^n_h f(x) \geqq 0$, $h > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ dans un intervalle $(a, b)$. Ce sont les fonctions complètement monotones au sens du n° **17** ([1]). Ces fonctions sont donc continues et indéfiniment dérivables. De plus, S. Bernstein démontre qu'elles sont analytiques et développables suivant les puissances de $x - a$ dans un intervalle $(a - \rho, a + \rho)$, $\rho \geqq b - a$. Pour qu'une fonction soit la différence de deux fonctions complètement monotones dans $(a, b)$, il faut et il suffit qu'elle soit analytique et développable suivant les puissances de $x - a$ dans $(a - \rho, a + \rho)$, avec $\rho \geqq b - a$. Les fonctions qui sont telles que $\delta^n_h f(x)$ est de signe invariable pour chaque entier positif $n$, sont encore analytiques et développables suivant les puissances de $x - a$ dans $(a - \rho, a + \rho)$, avec $\rho \geqq \dfrac{b-a}{4}$.

S. Bernstein [7 **c**] a fait une étude systématique des fontions complètement monotones dans $(-\infty, 0)$ et a déterminé celles qui prennent, avec leurs $n$ premières ou avec toutes leurs dérivées, des valeurs données pour $x = 0$. Ce problème est étroitement lié au problème des moments puisqu'une fonction complètement monotone dans $(-\infty, 0)$ est représentable par une intégrale de la forme

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{tx} d\varphi(t),$$

où $\varphi$ est non-décroissante.

---

(1) M. S. Bernstein les appelle absolument monotones.

28. — On peut aussi généraliser les fonctions d'ordre $n$ d'une autre manière. Considérons un intervalle fini et fermé $(\alpha, \beta)$ contenant l'ensemble borné E. Soit

$$f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots \tag{26}$$

une suite finie ou infinie de fonctions définies dans $(a, b)$. On dit que ces fonctions forment *une base* lorsqu'une combinaison linéaire $c_0 f_0 + c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$, avec des coefficients constants $c_i$, est complètement déterminée par ses valeurs en $n + 1$ points distincts et ceci quels que soient $n$ et les $n + 1$ points considérés.

Désignons par $D(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ le déterminant

$$|f_0(x_i)\, f_1(x_i) \cdots f_n(x_i)|,\ i = 1, 2, \ldots, n + 1$$

et par $D(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\,;\, f)$ le déterminant

$$|f_0(x_i)\, f_1(x_i) \cdots f_n(x_i)\, f(x_i)|,\ i = 1, 2, \ldots, n + 2,$$

$f$ étant une fonction quelconque. Pour que les fonctions (26) forment une base, il faut et il suffit que l'on ait $D(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \neq 0$ pour $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in (\alpha, \beta)$ et distincts et pour $n = 0, 1, \ldots$ Nous dirons encore que les fonctions (26) forment *un système* (T) si

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) > 0,\ x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1},$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in (\alpha, \beta)\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Si les fonctions (26) sont continues et forment une base, ces fonctions forment un système (T), à condition de changer éventuellement le signe de certaines de ces fonctions.

Dans la suite nous considérons uniquement de suites (26) formant un système (T).

Définition. — *Nous dirons que la fonction $f$ est convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe, concave* (T), *ou bien par rapport aux fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_n$, sur* E, *si l'inégalité*

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\,;\, f) >, \geq, =, \leq, < 0$$

*est vérifiée, quels que soient $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$, $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} \in$* E [47 f].

Pour simplifier le langage nous dirons que toutes ces fonctions sont des *fonctions* (T).

La convexité (ou la concavité) (T) exprime en somme la propriété que $f_0, f_1, \ldots, f_n, f$ (ou $-f$) forment un système (T). Réciproquement dans un système (T) toute fonction est convexe (T) par rapport aux fonctions qui la précèdent dans la suite (26).

Une fonction polynomiale (T) se réduit aux valeurs sur E d'une combinaison linéaire $c_0 f_0 + c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$ des fonctions (26). D'ailleurs on peut caractériser géométriquement une fonction (T) à l'aide de ces combinaisons linéaires, tout comme dans le cas particulier $f_0 = 1$, $f_1 = x, \ldots, f_n = x^n, \ldots$ que nous avons jusqu'ici étudié.

Pour que toute fonction (T) soit bornée sur tout $E_1 \subset \cdot E$, il faut et il suffit que les fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_n$ soient bornées sur tout $E_1 \subset \cdot E$. Si $a, b, \in E$, la propriété s'étend à tout l'ensemble E. En particulier, pour que les fonctions d'un système (T) soient bornées, il faut et il suffit que la première fonction $f_0$ soit bornée [47 f]. On a une propriété analogue en ce qui concerne la continuité d'une fonction (T) sur un $E_1 \subset \cdot E$ si $n \geqq 1$. En particulier, les fonctions d'un système (T) sont continues dans l'intervalle ouvert $(\alpha, \beta)$ si, et seulement si, les deux premières fonctions $f_0$, $f_1$ sont continues dans cet intervalle. On a la même propriété, en prenant, au lieu de la propriété de continuité, la propriété d'être à première d. d. bornée et même, sous certaines conditions restrictives, d'être à $k^{\text{ème}}$ $(k > 1)$ d. d. bornée [47 f].

Les résultats précédents peuvent être étendus, sous certaines conditions, au cas un peu plus général où $f_0$ s'annule un nombre fini de fois dans $(\alpha, \beta)$. Si, par exemple, $n \geqq 1$ et $f_0$, $f_1$ sont continues, on peut d'abord considérer les intervalles où $f_0$ ne s'annule pas et ensuite les intervalles qui contiennent un zéro de $f_0$, et où $f_1$ ne s'annule pas, intervalles qui existent, puisque $f_0$, $f_1$ ne peuvent pas s'annuler en même temps. Dans ces intervalles il suffit d'invertir le rôle des fonctions $f_0$, $f_1$.

Les fonctions (T), dans le cas $n = 1$, ont été introduites par E. Phragmén et E. Lindelöf [45] qui ont considéré le cas

$$f_0 = \cos x, \qquad f_1 = \sin x,$$

qui a son importance dans la théorie des fonctions d'une variable complexe. Les fonctions (T) dans l'intervalle $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ sont, alors, celles pour lesquelles le déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos x_1 & \sin x_1 & f(x_1) \\ \cos x_2 & \sin x_2 & f(x_2) \\ \cos x_3 & \sin x_3 & f(x_3) \end{vmatrix}, \quad x_1 < x_2 < x_3, \quad x_1, x_2, x_3 \in (\varepsilon, \pi - \varepsilon)$$

ne change pas de signe. De ce que nous avons dit, il résulte que

$f$ est continue et même vérifie une condition de LIPSCHITZ ordinaire dans tout intervalle complètement intérieur.

A. WINTERNITZ [65] a généralisé ces résultats, en considérant le cas où $f_0$, $f_1$ sont à première variation bornée dans un intervalle $(\alpha, \beta)$ et a démontré qu'alors toute fonction (T) dans $(\alpha, \beta)$ est à première variation bornée dans tout intervalle $\subset \cdot(\alpha, \beta)$ et admet donc une dérivée à gauche et une dérivée à droite en un point $x \subset \cdot(\alpha, \beta)$ qui sont à variations bornées (d'ordre 0) dans tout intervalle $\subset \cdot(\alpha, \beta)$.

Le cas des fonctions d'ordre 1 dans (0,1) revient au cas $f_0 = 1 - x$ $f_1 = x$. J. RADON [49] a déjà démontré ces résultats dans le cas $f_0 = (1 - x)^p$, $f_1 = x^p$, $p \geqq 1$ dans (0,1). Les résultats ont aussi été retrouvés par G. POLYA [46 b] dans le cas (27) et par G. VALIRON [61 b] dans le cas général, sous une forme qui revient à celle de A. WINTERNITZ [65]. J. RADON [49], dans le cas qu'il a étudié, et A. WINTERNITZ [65] dans le cas général, ont étendu les résultats de W. BLASCHKE et G. PICK [9] (voir N° 11) sur la représentation de ces fonctions par une intégrale de Stieltjes.

On peut remarquer que les fonctions de J. RADON [49] jouissent encore de la propriété qu'on peut diviser l'intervalle (0,1) en deux intervalles partiels dans lesquels la fonction est monotone. D'ailleurs la $p^{\text{ème}}$ puissance ($p \geqq 1$) d'une fonction non-convexe d'ordre 1 et non-négative dans (0,1) est non-convexe au sens de J. RADON. Il en est de même de la $p^{\text{ème}}$ puissance d'une fonction non-concave d'ordre 1 et non-positive dans (0,1) si $p$ est un entier positif impair.

Supposons, plus généralement, que $f_0, f_1, \ldots, f_n$ sont des solutions linéairement indépendantes d'une équation différentielle linéaire d'ordre $n+1$,

$$L(y) \equiv y^{(n+1)} + \varphi_1 y^{(n)} + \varphi_2 y^{(n-1)} + \cdots + \varphi_{n+1} y = 0,$$

où les coefficients sont des fonctions continues dans $(\alpha, \beta)$. Alors toute fonction (T) est à $n^{\text{ème}}$ d. d. bornée sur tout $E_1 \subset \cdot F$.

Le cas du Chap. I correspond à l'équation $y^{(n+1)} = 0$. Le cas (27) à l'équation $y'' + y = 0$. Le cas de J. RADON à l'équation $x(1-x)y'' + (p-1)(2x-1)y' - p(p-1)y = 0$ dans un intervalle $\subset \cdot(0,1)$.

Si la fonction (T) a dans ce cas une $(n+1)^{\text{ème}}$ dérivée, la non-cavité (T) s'exprime par l'inégalité $L(f) \geqq 0$. La condition $L(f) > 0$ est suffisante pour la convexité (T).

Disons encore que S. KAKEYA [30 a] a déterminé les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction $f$ $(n+1)$ fois dérivable, telle que $L(f) \geqq 0$ et prenant, avec ses $n$ premières dérivées, les valeurs données

$$f^{(i)}(\alpha) = a_i, \qquad f^{(i)}(\beta) = b_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

ce qui généralise un problème de prolongement examiné au n° 6.

**29.** — Pour terminer avec les fonctions d'une variable disons que E. F. BECKENBACH [4] a donné une généralisation encore plus étendue. Cette généralisation est la suivante :

Considérons, dans un intervalle ouvert $(a, b)$, une famille de fonctions $F = F(x ; \lambda, \mu)$ dépendant de deux paramètres $\lambda$, $\mu$ et satisfaisant aux conditions suivantes : 1° chaque fonction de la famille est continue dans $(a, b)$ ; 2° il existe une et une seule fonction de la famille satisfaisant au système

$$F(x_1 ; \lambda, \mu) = y_1, \qquad F(x_2 ; \lambda, \mu) = y_2, \tag{28}$$

pour tout couple de points distincts $x_1$, $x_2$, de $(a, b)$ et pour tout $y_1$, $y_2$.

E. F. BECKENBACH dit alors que la fonction $f$, définie dans l'intervalle ouvert $(a, b)$, est une *fonction sous-F* si, quels que soient les points $a < x_1 < x_2 < b$, on a $f(x) \leqq F_{12}(x)$, le second membre désignant la fonction $F(x ; \lambda, \mu)$ qui vérifie les égalités (28) pour $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Le principal résultat obtenu est que toute fonction sous-F est continue dans $(a, b)$.

On peut généraliser encore, en considérant des convexités par rapport à une famille $F(x ; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1})$ dépendant de $n+1$ paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$, tels que le système

$$F(x_i ; \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}) = y_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n+1$$

ait toujours une seule fonction F comme solution. On peut aussi considérer des fonctions définies seulement sur un ensemble E quelconque appartenant à $(a, b)$.

CHAPITRE IV

# LES FONCTIONS CONVEXES DE DEUX OU PLUSIEURS VARIABLES

**30.** — Un pseudo-polynome d'ordre $(m, n)$ n'est pas nécessairement borné et encore moins continu dans R. Mais, s'il est borné resp. continu sur un réseau d'ordre $(m+1, n+1)$, il est une fonction bornée resp. continue dans R. De même si un tel pseudo-polynome admet des dérivées partielles $f_{x^r}^{(r)}$, $f_{y^s}^{(s)}$ resp. des dérivées partielles continues $f_{x^r}^{(r)}$, $f_{y^s}^{(s)}$ sur un réseau d'ordre $(m+1, n+1)$ il a dans R des dérivées partielles $f_{x^\alpha y^\beta}^{(\alpha+\beta)}$ resp. des dérivées partielles continues $f_{x^\alpha y^\beta}^{(\alpha+\beta)}$, avec $\alpha \leqq r$, $\beta \leqq s$.

Dans l'étude des fonctions $f$ dans R il est commode d'introduire le nombre

$$\Delta_{m,n} = \max_{(\mathrm{R})} \left| \begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{m+1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \end{bmatrix} ; f \right|$$

que nous appelons la *borne d'ordre* $(m, n)$ de la fonction $f$ dans R. Si $\Delta_{m,n}$ est fini la fonction est à d. d. d'ordre $(m, n)$ bornée.

En particulier, une fonction à d. d. d'ordre $(m, n)$ bornée est à $m^{\text{ème}}$ d. d. bornée par rapport à $x$ pour toutes les valeurs de $y$, mais la réciproque n'est évidemment pas vraie. Une fonction bornée est une fonction à d. d. d'ordre (0,0) bornée.

Un pseudo-polynome d'ordre $(m-1, n-1)$ est évidemment à d. d. d'ordre $(m, n)$ bornée, mais ses d. d. d'ordre $(m_1, n_1) < (m, n)$ peuvent ne pas être bornées dans R. Pour qu'il en soit ainsi pour tout ordre $\leqq (m, n)$, il faut et il suffit que ses d. d. d'ordre $(m, 0)$ et d'ordre $(0, n)$ soient bornées sur un réseau d'ordre $(m, n)$. De plus, si le pseudo-polynome est à d. d. d'ordre $(m_1, n_2)$ et d'ordre $(m_2, n_1)$ bornées, avec $m_1 \geqq m_2$, $n_1 \geqq n_2$, il est à d. d. d'ordre $(m', n')$ bornée, avec $m_1 \geqq m' \geqq m_2$, $n_1 \geqq n' \geqq n_2$.

Toute fonction à d. d. d'ordre $(m, n)$ bornée est la somme d'une fonction ayant toutes ses d. d. d'ordre $\leqq (m, n)$ bornées et d'un pseudo-polynome d'ordre $(m-1, n-1)$. Donc, pour que toutes les d. d. d'ordre $\leqq (m, n)$ d'une fonction soient bornées, il faut et il suffit que sa d. d. d'ordre $(m, n)$ soit bornée et que ses d. d. d'ordre $(m, 0)$ et d'ordre $(0, n)$ soient bornées sur un réseau d'ordre $(m, n)$.

Une fonction continue par rapport à l'une des variables et également continue par rapport à l'autre, est continue dans R. En particulier donc, une fonction à d. d. d'ordre $(1,0)$ bornés et continue par rapport à $y$ est continue dans R. Il en résulte que toute fonction à d. d. d'ordre $(m, n)$ bornée, avec $m \geqq 1$, $n \geqq 1$, continue sur un réseau d'ordre $(m, n)$, est continue dans R.

Si une fonction $f$ à d. d. d'ordre $(m, n)$ bornée a une dérivée partielle $f'_x$, cette dérivée est une fonction à d. d. d'ordre $(m-1, n)$ bornée. On en déduit que, si de plus les dérivées $f^{(m-1)}_{x^{m-1}}$, $f^{(n-1)}_{y^{n-1}}$ sont continues sur un réseau d'ordre $(m, n)$, la fonction a des dérivées partielles $f^{(r+s)}_{x^r y^s}$, $r \leqq m-1$, $s \leqq n-1$, à d. d. d'ordre $(m-r, n-s)$ bornées dans R.

P. Montel [39 a] et A. Marchaud [36] ont aussi démontré que, pour une fonction à d. d. d'ordre $(m, 0)$ et d'ordre $(0, n)$ bornées, toutes les dérivées partielles $f^{(r+s)}_{x^r y^s}$ existent et sont continues dans R, pourvu que $\frac{r}{m} + \frac{s}{n} < 1$. Il en résulte que, si une fonction est à d. d. d'ordre $(m+m', n)$ et d'ordre $(m, n+n')$ bornées, elle est aussi à d. d. d'ordre $(m-r, n-s)$ bornée, pourvu que

$$\frac{r}{m'} + \frac{s}{n'} > 1, \quad m \geqq m' > 0, \quad n \geqq n' > 0, \quad r \leqq m', \quad s \leqq n'.$$

31. — Passons maintenant à la définition de la convexité.

Tout d'abord la définition suivante s'impose.

Définition. — *La fonction $f$ est dite convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe, concave d'ordre $(m, n)$ dans le rectangle R si l'inégalité*

$$\left[\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{m+2} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n+2} \end{matrix}; f\right] >, \geqq, =, \leqq, < 0 \tag{29}$$

*est satisfaite, quels que soient les points $(x_i, y_j)$, $i = 1, 2, \ldots, m+2$,*

$j = 1, 2, \ldots, n + 2$, *appartenant à* R *et formant les nœuds d'un réseau d'ordre* $(m, n)$.

*Toutes ces fonctions sont des fonctions d'ordre* $(m, n)$.

Les valeurs $-1$ de $m$ et $n$ ne sont pas exclues. Une fonction convexe, non-concave,... etc. d'ordre $(m, -1)$ est une fonction qui est convexe, non-concave,... etc., d'ordre $m$ par rapport à $x$ pour toutes les valeurs de $y$.

Une fonction polynomiale d'ordre $(m, n)$ est un pseudo-polynome d'ordre $(m, n)$. Si $f$ est d'ordre $(m, n)$ et si

$$\begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{m+2} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n+2} \end{bmatrix}; f \Bigg] = 0,$$

elle se réduit à un pseudo-polynome d'ordre $(m, n)$ dans le rectangle

$$(x_1 \leqq x \leqq x_{m+2} ;\ y_1 \leqq y \leqq y_{n+2}).$$

Une définition géométrique, analogue à celle donnée dans le cas d'une seule variable, peut être obtenue à l'aide des pseudo-polynomes. Considérons le pseudo-polynome

$$P\left( \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{m+1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \end{matrix}; f \,\middle|\, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right)$$

La non-concavité resp. la convexité d'ordre $(m, n)$ s'exprime par le fait que la fonction doit être, en tout point du rectangle

$$(x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < y_{j+1})$$

non-au-dessous resp. au-dessus ou non-au-dessus resp. au-dessous du pseudo-polynome suivant que $m + n - i - j$ est pair ou impair. Ceci est valable aussi pour $i = 0, m + 1, j = 0, n + 1$, dans les rectangles

$$(a \leqq x < x_1, \quad c \leqq y < y_1), \qquad (x_{m+1} < x \leqq b, \quad c \leqq y < y_1)$$
$$(a \leqq x < x_1, \quad y_{n+1} < y \leqq d), \qquad (x_{m+1} < x \leqq b, \quad y_{n+1} < y \leqq d).$$

On en déduit immédiatement que si une fonction d'ordre $(m, n)$ est bornée sur un réseau

$$x = x_i, \quad y = y_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m + 2, \quad j = 1, 2, \ldots, n + 2,$$

d'ordre $(m + 2, n + 2)$, elle est bornée dans les rectangles

$$(a \leqq x \leqq b, \quad y_1 \leqq y \leqq y_{n+2}), \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_{m+2}, \quad c \leqq y \leqq d).$$

On peut encore voir facilement que, lorsque les d. d. d'ordre $(m + 1, n)$ et $(m, n + 1)$, d'une fonction d'ordre $(m, n)$, sont bornées sur un réseau

$$x = x_i, \quad y = y_j, \quad i = 1, 2, \ldots, 2m + 2, \quad j = 1, 2, \ldots, 2n + 2,$$

d'ordre $(2m+2, 2n+2)$, ces d. d. sont bornées dans le rectangle

$$(x_{m+1} \leqq x \leqq x_{m+2}, \quad y_{n+1} \leqq y \leqq y_{n+2}). \tag{30}$$

Pour que, de plus, les d. d. de tout ordre $< (m+1, n+1)$ soient bornées dans le rectangle (30), il faut et il suffit que les d. d. d'ordre $(m+1, 0)$ et d'ordre $(0, n+1)$ soient bornées sur un réseau d'ordre $(m+1, n+1)$ dont les nœuds appartiennent à (30).

Les propriétés de dérivabilité des fonctions d'ordre $(m, n)$ résultent de celles des fonctions à d. d. bornées. Si la dérivée $f^{(r+s)}_{x^r y^s}$, $r \leqq m+1$, $s \leqq n+1$, $r+s < m+n+2$ existe, c'est une fonction d'ordre $(m-r, n-s)$, présentant le même caractère de convexité. Lorsque $f^{(m+n+2)}_{x^{m+1}y^{n+1}}$ existe, elle est non-négative. La condition $f^{(m+n+2)}_{x^{m+1}y^{n+1}} \geqq 0$ est, d'ailleurs, nécessaire et suffisante pour la non-concavité, et $f^{(m+n+2)}_{x^{m+1}y^{n+1}} > 0$ est suffisante pour la convexité d'ordre $(m, n)$ dans R.

Les fonctions d'ordre $(m, n)$ peuvent être définies aussi dans un domaine quelconque D.

On peut aussi définir des *fonctions d'ordre* $(m, n)$ en imposant seulement la condition que, pour tout groupe de $n+2$ valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_{n+2}$ de $y$, la fonction de $x$, $[y_1, y_2, \ldots, y_{n+2}; f]$ soit d'ordre $n$ et, pour tout groupe de $m+2$ valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{m+2}$ de $x$, la fonction de $y$, $[x_1, x_2, \ldots, x_{m+2}; f]$ soit d'ordre $m$. Nous n'insistons pas sur cette généralisation, nous considérerons seulement les cas particuliers $m = 0$, $n = 0$ aux numéros suivants.

**32.** — Faisons le changement de variables

$$x = \alpha x' + \beta y', \qquad y = \gamma x' + \delta y', \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{31}$$

Nous dirons que cette transformation définit *une direction* $t$. Ceci signifie qu'on a pris un nouveau système d'axes $Ox'y'$. En particulier, le système initial $Oxy$ définit la direction $t_0$. Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que $\alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2 + \delta^2 = 1$.

Le changement de variables (31) transforme la fonction $f$ en une fonction $f_1(x', y')$ de $x'$ et $y'$. Les d. d. de $f$ dans la direction $t$ sont alors les d. d. de $f_1$ comme fonction de $x'$, $y'$. On peut alors définir des fonctions qui présentent une propriété de convexité dans une direction quelconque, mais ces fonctions reviennent, par un changement de variables simple, aux fonctions précédemment définies.

On peut aussi considérer des fonctions qui présentent une propriété de convexité dans deux ou plusieurs directions distinctes ou non. Par exemple, une fonction qui est polynomiale (non pas nécessairement de même ordre) dans deux directions, se réduit en général à un polynome en $x$ et $y$. Il en est sûrement ainsi si les directions sont $t_0$ et $t$ avec $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$, à un nouveau changement de variables près. Si, de plus, la fonction est polynomiale d'ordre $(m, n)$ dans la direction $t_0$ et polynomiale d'ordre $(m', n')$ dans la direction $t$, elle se réduit à un polynome de degré $\leqq m + n + m' + n' + 2$. Les seules fonctions polynomiales d'ordre $(m, n)$ dans toutes les directions sont les polynomes de degré $< m + n + 1$, mais on peut trouver des polynomes de degré $m + n + 1$ polynomiales d'ordre $(m, n)$ dans une infinité de directions [47 s].

Laissons de côté ces généralités et revenons aux cas les plus simples, qui sont, d'ailleurs, les plus importants.

P. Montel [39 c] a étudié les fonctions $f$, non-concaves d'ordre 1 par rapport à $x$ pour toute valeur de $y$ et non-concave d'ordre 1 par rapport à $y$ pour toute valeur de $x$, en les appelant *doublement convexes*, fonctions qui ont été également considérées par N. Kritikos [34].

Plus généralement, nous dirons qu'une fonction $f$ est *d'ordre $n$ en $x$* resp. d'ordre $n$ en $y$ si elle est d'ordre $n$ par rapport à $x$ pour toute valeur de $y$ resp. d'ordre $n$ par rapport à $y$ pour toute valeur de $x$. Nous dirons aussi qu'une fonction est *doublement d'ordre* $[m, n]$ si elle est d'ordre $m$ en $x$ et d'ordre $n$ en $y$. Remarquons que dans ces définitions on n'exige pas que la fonction présente le même caractère de convexité d'ordre $m$ par rapport à $x$ pour toutes les valeurs de $y$ ou qu'elle présente le même caractère de convexité d'ordre $n$ par rapport à $y$ pour toutes les valeurs de $x$. En particulier si $f$ est non-concave d'ordre $n$ par rapport à $x$ (par rapport à $y$) pour toute valeur de $y$ [de $x$], nous retrouvons une fonction d'ordre $(n, 0)$ [d'ordre $(0, n)$]. Il est clair ce qu'il faut entendre par une fonction *doublement non-concave d'ordre* $[m, n]$. Les fonctions de P. Montel sont doublement non-concaves d'ordre $[1, 1]$.

On démontre que toute fonction d'ordre $m$ en $x$ et continue par rapport à $y$ est à d. d. d'ordre $(m, 0)$ bornée dans tout rectangle $\subset\cdot$ R. Il suffit même, pour qu'il en soit ainsi, que $f$ soit bornée en $y$ dans tout intervalle $\subset\cdot (c, d)$, pour toute valeur $x \in\cdot (a, b)$. Une fonction doublement d'ordre $[m, n]$, $m \geqq 1$, $n \geqq 1$ est donc à d. d. d'ordre $(m, 0)$ et d'ordre $(0, n)$ bornées, donc est continue et, d'après P. Montel [39 a], a une dérivée partielle $f^{(r+s)}_{x^r y^s}$ continue, pourvu que $\frac{r}{m} + \frac{s}{n} < 1$, dans tout rectangle complètement intérieur.

Les fonctions doublement non-concaves d'ordre $[0,0]$ ont été examinées par W. H. Young et G. C. Young [66]. Si $(x_0, y_0)$ est un point de R, ces fonctions jouissent de la propriété que, si une suite de points $(x_p, y_p)$, $p = 1, 2, \ldots$ de R tend vers $(x_0, y_0)$ de manière que l'on ait constamment $x_p > x_0$, $y_p > y_0$ ou $x_p < x_0$, $y_p < y_0$, $f(x_p, y_p)$ tend vers une limite $\geqq f(x_0, y_0)$ ou $\leqq f(x_0, y_0)$. Ces auteurs ont également étudié le cas où, de plus, la fonction est non-concave d'ordre $(0,0)$.

On peut aussi considérer des fonctions doublement polynomiales d'ordre $[m, n]$ qui sont polynomiales d'ordre $m$ en $x$ et polynomiales d'ordre $n$ en $y$. Ces sont évidemment des polynomes de degré $m$ en $x$ et de degré $n$ en $y$, donc ce qu'on peut appeler un polynome de degré $(m, n)$.

33. — On peut enfin définir des fonctions dans un domaine D, qui présentent certaines propriétés de convexité dans toute direction.

En particulier, nous dirons que $f$ est *complètement d'ordre n* dans D si elle est d'ordre $n$ sur toute droite coupant le domaine D, autrement dit elle est d'ordre $(n, 0)$ dans toute direction. Lorsque $n$ est pair il n'y a pas lieu de faire des distinctions entre la convexité et la concavité. Au contraire, si $n$ est impair, on peut définir des fonctions complètement convexes, non-concaves,... etc., d'ordre $n$.

Une fonction complètement d'ordre $n$ est, en particulier, doublement d'ordre $[n, n]$, donc elle est continue en tout point intérieur de D si $n > 0$. Une fonction complètement d'ordre 0 est bornée dans tout $D_1 \subset\cdot$ D. Une fonction complètement d'ordre $n$ a des dérivées partielles d'ordre $< n$ continues en tout point intérieur. Si, en particulier, les dérivées partielles d'ordre $n+1$ existent, la fonction

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \cos^{n-i+1}\alpha \sin^i\alpha \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-i+1} \partial y^i} \tag{32}$$

doit être de signe invariable sur toute droite faisant l'angle $\alpha$ avec l'axe $0x$. Si, de plus, la fonction est complètement non-concave d'ordre $n$ impair, pour toute $x$, $y$, le polynome (32) doit être non-négatif. En particulier, les conditions

$$f''_{x^2} \geqq 0, \qquad f''_{x^2} f''_{y^2} - (f''_{xy})^2 \geqq 0$$

sont nécessaires et suffisantes pour la complète non-concavité, et

$$f''_{x^2} > 0, \quad f''_{x^2} f''_{y^2} - (f''_{xy})^2 > 0$$

sont suffisantes pour la complète convexité d'ordre 1 de $f$, en supposant, bien entendu, que les dérivées secondes existent.

L'inégalité de J. L. W. V. Jensen [27] peut être étendue aux fonctions complètement non-concaves d'ordre 1. Nous avons l'inégalité, établie par F. Sibirani [53],

$$f\left(\frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i}, \frac{\Sigma p_i y_i}{\Sigma p_i}\right) \leqq \frac{\Sigma p_i f(x_i, y_i)}{\Sigma p_i}, \qquad p_i > 0. \tag{33}$$

E. J. McShane [38] a généralisé cette inégalité pour deux ou plusieurs variables, comme dans le cas d'une seule variable.

Une fonction complètement polynomiale d'ordre $n$ se réduit à un polynome de degré $n$ dans D.

**34.** — Si $f$, $g$ sont deux fonctions non-concaves d'ordre $(m, n)$, $cf$ et $f+g$, où $c$ est une constante positive, sont encore des fonctions non-concaves d'ordre $(m, n)$. La limite d'une suite convergente de fonctions non-concaves d'ordre $(m, n)$ est encore non-concave d'ordre $(m, n)$. D'ailleurs, toute fonction continue dans R présentant une ou plusieurs propriétés de convexité bien déterminées est la limite d'une suite uniformément convergente dans R de polynomes présentant les mêmes propriétés de convexité, comme nous le montre les polynomes de S. Bernstein de deux variables

$$\frac{1}{(b-a)^p(d-c)^q} \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \binom{p}{i}\binom{q}{j} f\left(a + i\frac{b-a}{p}, c + j\frac{d-c}{q}\right) \cdot (x-a)^i(b-x)^{p-i}(y-c)^j(d-y)^{q-j}.$$

M. Nicolesco [41] a démontré, comme dans le cas d'une variable, qu'une famille de fonctions doublement non-concaves d'ordre 1 et également bornée supérieurement dans D, est normale à l'intérieur de D, et en déduit que toute suite non-décroissante de fonctions doublement non-concaves d'ordre 1 qui converge en un point $\in \cdot$ D, converge uniformément à l'intérieur de D.

J. L. W. V. Jensen [27] a déjà remarqué qu'une fonction doublement non-concave d'ordre 1 n'est pas nécessairement complètement d'ordre 1.

F. Riesz [50 b] généralise les fonctions non-concaves d'ordre 1 d'une variable par les fonctions sous-harmoniques de deux ou plusieurs variables. Une fonction $f$ est sous-harmonique dans D si, $D_1$ étant un sous-domaine quelconque de D, elle est, en tout point de $D_1$, non au-dessus de toute fonction harmonique qu'elle ne dépasse pas en aucun point de la frontière de $D_1$. Si la fonction sous-harmonique est continue, ou plus généralement si l'intégrale suivante existe, elle est caractérisée par le fait qu'elle reste en tout point $\in \cdot$ D, non-au-dessus de sa valeur moyenne prise sur une circonférence ayant ce point pour centre et appartenant à D. La fonction sous-harmonique $f$ est donc caractérisée par l'inégalité

$$f(x, y) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)d\theta,$$

quels que soient $(x, y) \in \cdot$ D et $r <$ (si D est fermé $\leqq$) que la distance du point $(x, y)$ à la frontière de D.

L'étude des fonctions sous-harmoniques sort du cadre de ce livre. Nous nous contenterons de rappeler quelques résultats en rapport avec les fonctions convexes.

P. Montel [39 b] a démontré que toute fonction doublement non-concave d'ordre 1 est sous-harmonique. Cette propriété n'est pas vraie pour les fonctions doublement d'ordre 1.

P. Montel [39 b] et T. Rado [48 a] ont démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que $f$ soit sous-harmonique est que $e^{f + \alpha x + \beta y}$ le soit, pour toutes les valeurs des constantes $\alpha$, $\beta$. P. Montel [39 c] a montré que la propriété subsiste aussi pour les fonctions doublement non-concaves d'ordre 1 et les fonctions complètement non-concaves d'ordre 1.

Soit F$(t)$ une fonction continue dans $(-\infty, +\infty)$ et $f$ continue dans D. S. Saks [51 a] démontre que si $F(f + \alpha x + \beta y + \gamma)$ est sous-harmonique pour toutes les valeurs des constantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, la fonction F est non-concave d'ordre 1 et : 1° ou bien F est une constante ; 2° ou bien $f$ est harmonique ; 3° ou bien F est non-décroissante et $f$ est sous-harmonique ; 4° ou bien enfin F est non-croissante et $-f$ est sous-harmonique. Ces propriétés subsistent pour les fonctions doublement non-concaves d'ordre 1 et les fonctions complètement non-concaves d'ordre 1. Dans le cas 2°, la fonction harmonique doit alors être un polynome de la forme $Axy + Bx + Cy + D$, resp. un polynome de la forme $Ax + By + C$.

35. — Comme dans le cas d'une variable, on peut définir aussi des fonctions plus générales en ne considérant que des d. d. sur des réseaux formés par des droites équidistantes. Considérons la différence d'ordre $(m, n)$

$$\delta^{m, n}_{h, k} f(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{m+n-i-j} \binom{m}{i} \binom{n}{j} f(x + ih, y + jk),$$

qui est, à un facteur indépendant de la fonction près, une d. d. d'ordre $(m, n)$,

$$\delta^{m, n}_{h, k} f(x, y) = m!\, n!\, h^m k^n \begin{bmatrix} x, x+h, \cdots, x+mh \\ y, y+k, \cdots, y+nk \end{bmatrix}; f \Bigg].$$

A l'aide de ces différences, on peut définir des fonctions convexes, non-concaves,... etc., d'ordre $(m, n)$ (J) dans R, qui coïncident, d'ailleurs, avec des fonctions convexes, non-concaves,... etc. d'ordre $(m, n)$ au sens ordinaire, si la fonction est continue dans R. On peut voir facilement qu'il en est encore ainsi si la fonction est bornée ou linéairement mesurable dans R. En effet, dans ces cas, pour chaque valeur de $y$ et $k$, $y, y + (n+1)k \in (c, d)$, la fonction $\delta^{0, n+1}_{0, k} f(x, y)$ de $x$, est bornée, ou mesurable, et d'ordre $m$, donc d'ordre $m$ au sens ordinaire. Nous avons donc l'inégalité

$$\left[\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{m+2} \\ y, y+k, \ldots, y+(n+1)k \end{matrix}; f\right] \geq 0,$$

en supposant la fonction non-concave d'ordre $(m, n)$ (J). L'inégalité générale (29) résulte alors du fait qu'en fixant $x_1, x_2, \ldots, x_{m+2}$, la fonction de $y$, $[x_1, x_2, \ldots x_{m+2}\, ; f]$ est bornée, ou mesurable, non-concave d'ordre $n$ (J). Il importe de remarquer que la linéaire mesurabilité ne peut être remplacée par la mesurabilité superficielle [47 s]. Soit, en effet, $\chi(x)$ une solution discontinue, donc non mesurable, de l'équation (24) dans l'intervalle $(a, b)$, et choisie de manière que $\chi(a) = \chi(b) = 0$. On a alors $\chi(x) = 0$ en tout point $x$ qui divise rationnellement l'intervalle $(a, b)$. La fonction

$$f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) = \chi(x), \qquad x \in (a, b),$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) = \chi\left(\frac{ad - bc + y(b-a)}{d-c}\right), \qquad y \in (c, d),$$

$$f(x, y) = 0, \qquad x \neq \frac{a+b}{2}, \qquad y \neq \frac{c+d}{2},$$

est bien polynomiale d'ordre $(m, n)$ (J), $m \geqq 1$, $n \geqq 1$, mais n'est évidemment pas un pseudo-polynome.

On peut aussi définir des fonctions complètement d'ordre $n$ (J). Considérons, en particulier, le cas $n = 1$ et envisageons le cas de $m$ variables. Considérons donc une fonction $f(\mathrm{P}) = f(x_1, x_2), \ldots, x_m)$ définie, complètement non-concave d'ordre 1 (J) dans le domaine convexe et borné D. Ces fonctions sont caractérisées par l'inégalité

$$f\left(\frac{\mathrm{P}+\mathrm{P}'}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}(f(\mathrm{P}) + f(\mathrm{P}'))$$

où $\mathrm{P}, \mathrm{P}' \in \mathrm{D}$, et $\frac{\mathrm{P}+\mathrm{P}'}{2}$ est le milieu du segment PP′. Ces fonctions constituent la généralisation donnée par J. L. W. V. Jensen [27] des fonctions d'une vaiiable qu'il a étudiées. Ces fonctions sont non-concaves d'ordre 1 (J) sur toute droite coupant le domaine D. On en déduit, avec P. Tortorici [60 a], qu'une fonction complètement non-concave d'ordre 1 (J), et bornée supérieurement dans D, est complètement non-concave d'ordre 1 au sens ordinaire. Si D est fermé on peut remarquer, avec H. Blumberg [10], qu'il suffit même que la fonction soit bornée supérieurement sur la frontière F de D. En effet, soit P un point intérieur de D. Une droite passant par P coupe la frontière F en $\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_2$. Le rapport des segments $\mathrm{PP}_1$, $\mathrm{PP}_2$ varie d'une façon continue lorsque la droite tourne autour de P et n'est pas en général constant, donc prend nécessairement une valeur rationnelle. Il en résulte qu'on peut choisir les points $\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_2$ de manière que $f(\mathrm{P}) \leqq \max\,[f(\mathrm{P}_1), f(\mathrm{P}_2)]$. Ce raisonnement n'est en défaut que si D est un hyper-sphère de centre P, donc au plus pour un point, d'où la propriété. A. Colucci [13] a fait la remarque que, si $f(\mathrm{P})$ est bornée supérieurement sur un segment $A_0B_0$, elle est bornée sur tout segment parallèle à $A_0B_0$, d'extrémités $\in \cdot D$. On peut en conclure que, si $f$ est mesurable, elle est complètement non-concave d'ordre 1 au sens ordinaire.

P. Tortorici [60 b] remarque aussi que, si D est fermé, le maximum de $f(P)$, supposée continue, n'est atteint que sur la frontière, à moins que la fonction ne soit pas une constante. Si $f(P)$ atteint son minimum sur la frontière F, il en est ainsi dans tout $D_1 \subset D$, propriété qui est analogue à celle qui précise l'allure de monotonie dans le cas d'une seule variable. Cet auteur précise aussi l'ensemble des points P ou min $f(P)$ est atteint.

La surface représentative de la fonction $f(P)$ jouit de la propriété qu'en tout point correspondant à $P \in \cdot D$ il existe un hyperplan d'appui, c'est-à-dire que, par un tel point, on peut faire passer un hyperplan laissant la surface non-au-dessus. L. Galvani [19] démontre, dans le cas de deux variables, que, pour qu'un plan tangent existe en un point représentatif correspondant à P, il faut et il suffit que la fonction soit dérivable sur deux droites distinctes passant par P, donc, en particulier, que les dérivées partielles $f_x'$, $f_y'$ existent en ce point. D'ailleurs, l'ensemble des points P pour lesquels le plan tangent n'existe pas, est de première catégorie, donc est formé par la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles non-denses dans D.

Remarquons encore que, si l'ensemble où la fonction continue $f + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m$ atteint son minimum est convexe, quels que soient les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, la fonction $f$ est complètement non-concave d'ordre 1. Pour le maximum, le théorème de S. Saks [51 a] ne s'étend pas, puisque le fait que $f + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m$ atteint son maximum sur la frontière de $D_1$, quels que soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ et le domaine $D_1 \subset D$, caractérise les fonctions sous-harmoniques, qui ne sont pas, en général, complètement non-concaves d'ordre 1 [51 a].

36. — L. Galvani [19] a également défini une convexité (d'ordre 1) sur un ensemble plan E quelconque.

La fonction $f$ est non-concave sur E si, quels que soient les points $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ de E, non colinéaires, la valeur de $f$ en tout point $(x, y)$ appartenant au triangle fermé ABC, est non au-dessus du plan déterminé par les trois points représentatifs $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$, $i = 1, 2, 3$. On définit de la même manière la convexité, polynomialité,... etc., sur E.

Si $f$ est non-concave avec cette définition elle est non-concave d'ordre 1 sur tout sous-ensemble de E appartenant à une droite. L. Galvani [19] a démontré un certain nombre de propriétés de ces fonctions. Si $(x, y)$, $(x', y')$ sont deux points de E, appartenant au triangle ABC, le point $(x, y, f(x, y))$ est à l'extérieur de l'angle trièdre formé par le point $(x', y', f(x', y'))$ et les points A, B, C. La fonction est bornée dans tout triangle ABC pourvu que les points où sont prises les valeurs de $f$ appartiennent à E.

Si E se réduit à un domaine D, ces fonctions sont identiques aux fonctions complètement non-concaves d'ordre 1.

**37.** — Pour terminer, signalons encore quelques généralisations des fonctions convexes de plusieurs variables.

G. Aumann [2 a] définit la fonction non-concave $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dans le rectangle $a \leqq x_i \leqq b$, $i = 1, 2, \ldots, m$ à l'aide des moyennes qu'il a introduites [2 b]. Une moyenne $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est définie par les propriétés suivantes :

1° M est continue et symétrique en $x_i$, appartenant à l'intervalle $(a, b)$ ;

2° il existe un $\rho > 0$ tel que si $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$ on ait

$$x_n - M \geqq \rho(x_n - x_1), \qquad M - x_1 \geqq \rho(x_n - x_1),$$

3° si $x_i \leqq x'_i$, $i = 1, 2, \ldots n$, on a

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq M(x_1', x_2', \ldots, x_n').$$

De cette moyenne de $n$ nombres $x_i$ on déduit une autre de $n + 1$ nombres par le procédé suivant. Soient $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{n+1}$ des points de $(a, b)$ et posons

$$x'_{n+2-i} = M(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Alors

$$a \leqq x_1' \leqq x_2' \leqq \cdots \leqq x''_{n+1} \leqq b.$$

De ces nombres, nous déduisons par le même procédé,

$$a \leqq x_1'' \leqq x_2'' \leqq \cdots \leqq x''_{n+1} \leqq b$$

et ainsi de suite.

On a alors

$$\lim x_1^{(p)} = \lim x_2^{(p)} = \cdots = \lim x_{n+1}^{(p)} = M'(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \text{ pour } p \to \infty,$$

qui est encore une moyenne, mais de $n+1$ nombres. L'auteur l'appelle la *moyenne supérieure* (Obermittel) de $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Soient maintenant $M_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $m$ moyennes dans $(a, b)$ et $N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ une moyenne dans $(\alpha, \beta)$ où $\alpha = \min f$, $\beta = \max f$. La non-concavité de la fonction $f$ est alors définie par l'inégalité

$$f(M_1(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), M_2(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \ldots, M_m(x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})) \leqq$$
$$\leqq N(f(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{m1}), \ldots, f(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn})),$$

quels que soient $x_{ij} \in (a, b)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

G. Aumann [2 a] dit alors que $f$ est convexe par rapport à $[M_1, M_2, \ldots, M_m\ ;\ N]$ et démontre que la fonction est alors aussi convexe par rapport à $[M'_1, M'_2, \ldots, M'_m\ ;\ N']$, où $M'_i$, $N'$ sont les moyennes supérieures de $M_i$, $N$, et que, si la fonction est bornée, elle est continue. En particularisant les moyennes qui entrent dans cette définition et la fonction $f$, on obtient diverses inégalités intéressantes.

I. Schur [52] considère les fonctions symétriques $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ qui vérifient l'inégalité

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \leqq f(X_1, X_2, \ldots, X_m) \tag{34}$$

où

$$X_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad a_{ki} \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ki} = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} = 1.$$

Si une telle fonction est dérivable, on a $(x_k - x_i)(f'_{x_k} - f'_{x_i}) \leqq 0$. En supposant que $f'_{x_k} = f'_{x_i}$ entraîne $f''_{x_k^2} - 2f''_{x_k x_i} + f''_{x_i^2} < 0$, l'égalité dans (34), n'est possible que si les $X_k$ sont une permutation des $x_i$.

Cette propriété de convexité est vérifiée par les fonctions symétriques fondamentales $c_i = \Sigma x_1 x_2 \cdots x_i$, par les fonctions $\frac{c_{i+1}}{c_i}$, par les fonctions $\sum_{i=1}^{m} \varphi(x_i)$, où $\varphi$ est une fonction non-convexe d'ordre 1 et même par les fonctions

$$\sum \varphi(x_1)\varphi(x_2) \cdots \varphi(x_i)$$

si $\varphi$ est, de plus, non-négative.

# BIBLIOGRAPHIE


1. Ascoli, G. : **a.** *Sopra un nouvo algoritmo per la rappresentazione delle funzioni di variabile reale.* Annali della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa (2), **3**, 243-253 (1934). **b.** *Sulle minime maggioranti concave e l'analisi delle funzioni continue.* ibid., (2), **4**, 251-266 (1935).
2. Aumann, G. : **a.** *Konvexe Funktionen und die Induktion bei Ungleichungen zwischen Mittelwerte.* Sitzungsberichte der Bayerischen Akad. Wiss., II. 3, 403-415 (1933). **b.** *Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente I.* Math. Annalen, **109**, 235-253 (1934).
3. Banach, S. : *Sur l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$.* Fundamenta Math., **1**, 123-124 (1920).
4. Beckenbach, E. F. : *Generalized convex functions.* Bulletin Amer. Math. Soc., **43**, 363-371 (1937).
5. Bernstein, F. : *Ueber das Gaussche-Fehlergesetz.* Math. Annalen, **64**, 417-448 (1907).
6. Bernstein, F., Doetsch, G. : *Zur Theorie der konvexen Funktionen.* Math. Annalen, **76**, 514-526 (1915).
7. Bernstein, S. : **a.** *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités.* Soc. Math. Charkow, (2), **13**, 1-2 (1912). **b.** *Leçons sur les propriétés extrémales...*, Paris, Gauthier-Villars, X-207 pp. (1926). **c.** *Sur les fonctions absolument monotones.* Acta Math., **52**, 1-66 (1929).
8. Blaquier, J. : *Sobre dos condiciones caracteristicas de las funciones convexas.* Atti Congresso Bologna, **2**, 349-353 (1930).
9. Blaschke, W., Pick, G. : *Distanzschätzungen in Funktionenraum II.* Math. Annalen, **77**, 277-300 (1916).
10. Blumberg, H. : *On convex functions.* Transactions Amer. Math. Soc., **20**, 40-44 (1919).
11. Borel, E. : *Leçons sur les fonctions de variables réelles.* Paris, Gauthier-Villars, VIII-160 pp. (1905).
12. Bray, H. E. : *On the zeros of a polynomial and of its derivatives.* American Journal of Math., **53**, 864-872 (1931).
13. Colucci, A. : *Qualque osservazione sulle funzioni convesse.* Bolletino della Un. Mat. Ital., **7**, 139-142 (1928).
14. Darboux, G. : *Sur la composition des forces en statique.* Bulletin Sc. Math., **9**, 281-288 (1875).
15. Del Chiaro, A. : *Su una disuguaglianza di Jensen.* Rendiconti Accad. dei Lincei (6), **17**, 1044-1049 (1933).
16. Favard, J. : *Sur les valeurs moyennes.* Bulletin Sc. Math., **57**, 54-64 (1933).
17. Franklin, Ph. : *Derivatives of higher order as single limits.* Bulletin Amer. Math. Soc., **41**, 573-582 (1935).

18. Fujiwara, M. : *Ueber die polynome von der kleisten totalen Schwankung.* The Tôhoku Math. Journal, 3, 129-136 (1913).

19. Galvani, L. : *Sulle funzioni convesse di una o due variabili definite in un aggregato qualunque.* Rendiconti del Circ. Mat. Palermo, 41, 103-134 (1916).

20. Hamel, G. : *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$.* Math. Annalen, 60, 459-462 (1905).

21. Hardy, H. H., Littlewood, J. E., Polya, G. : a. *Some simple inequalities satisfied by convex functions.* The Messenger of Math., 58, 145-152 (1929). b. *Inequalities.* Cambridge Univ. Press, XII-314, pp. (1934).

22. Hölder, O. : *Ueber einen Mittelwertssatz.* Nachrichten Göttingen, 38-47 (1889).

23. Hopf, E. : *Ueber die zusammenhänge zwischen gewissen höheren Differenzenquotienten reeller Funktionen eines reellen Variablen und deren differenzierbarkeitseigenschaften.* Dissertation Berlin, 30 pp. (1926).

24. Hrúska, V. : *Aproximace funkci mnohoclenem $P_n(x)$ tak, aby*
$$\int_a^b |f(x) - P_n(x)|\,dx$$ *byl minimem.* Mémoires Soc. Roy. Bohême, Nr. 15, 25 pp. (1929).

25. Ingraham, M. H. : *Solution of certain functional equations relative to a general linear set.* Transactions Amer. Math. Soc., 28, 287-300 (1926).

26. Jackson, D. : *The theory of approximation.* Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., VIII-179 pp. (1930).

27. Jensen, J. L. W. V. : *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes.* Acta Math., 30, 175-193 (1906).

28. Jensen, B. : a. *Bemaerkinger om konvekse Funktioner og Uligheder imellem Middelvaerdier I.* Mat. Tidsskrift, B, 17-28 (1931). b. *Ueber die Verallgemeinerungen des arithmetischen Mittels.* Acta Litterarum ac scientiarum, 5, 108-116 (1931).

29. Kac, M. : *Une remarque sur les équations fonctionnelles.* Commentarii Math. Helvetici, 9, 170-171 (1937).

30. Kakeya, S. : a. *On linear differential inequality.* Journal Soc. phys.-math. Tôkyô (2), 8, 256-261 (1915). b. *On some Integral Equations* III. The Tôhoku Math. Journal, 8, 14-23 (1925). c. *On an inequality between the roots of en equation and its derivative.* Proceedings Phys.-Math. Soc. Japan (3), 15, 149-154 (1933).

31. Karamata, J. : *Sur une inégalité relative aux fonctions convexes.* Publications Math. Univ. Belgrade, 1, 145-148 (1932).

31*bis*. Korkine, A., Zolotareff, G. : *Sur un certain minimum.* Nouv. Annales de Math. (2), 12, 337-356 (1873).

32. Knopp, K. : a. *Neuere Sätze über Reihen mit positivem Gliedern.* Math. Zeitschrift, 30, 387-403 (1929). b. *Ueber die maximalen Abstände und Verhältnisse verschiedener Mittelwerte.* ibid., 39, 768-776 (1935).

33. Kormes, M. : *On the functional equation $f(x+y)=f(x)+f(y)$.* Bulletin Amer. Math. Soc., 32, 689-693 (1926).

34. Kritikos, N. : *Sur les fonctions multiplement convexes ou concaves.* Praktika Akad. Athenon, 7, 44-46 (1932).

35. Lebesgue, H. : *Sur les transformations ponctuelles, transformant les plans en plans, qu'on peut définir par des procédés analytiques.* Atti della R. Accad. Torino, 42, 532-539 (1907).

36. Marchaud, A. : *Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles.* Journal de Math., (9), **6**, 337-425 (1927).

37. Markoff, A. A. : *Sur une question posée par Mendeleieff.* Bulletin Acad. Sc. de St. Pétersbourg, **62**, 1-24 (1890) en russe.

38. McShane, E. J. : *Jensen's inequality.* Bulletin Amer. Math. Soc., **43**, 521-527 (1937).

39. Montel, P. : **a.** *Sur les polynomes d'approximation.* Bulletin Soc. Math. **46**, 151-192 (1918). **b.** *Sur les fonctions convexes et les fonctions sous-harmoniques.* Journal de Math., (9), **7**, 29-60 (1928). **c.** *Sur les fonctions doublement convexes et les fonctions doublement sous-harmoniques.* Praktika Akad. Athenon, **6**, 374-385 (1932). **d.** *Sur un théorème de Jacobi.* C. R. Acad. Sc. Paris, **201**, 586-588 (1935).

40. Mulholland, H. P. : *The generalization of certain inequality theorems involving powers.* Proceedings London Math. Soc., (2), **33**, 481-516 (1932).

41. Nicolesco, M. : *Familles de fonctions convexes et de fonctions doublement convexes.* Bulletin math. Soc. Roumaine des Sc., **41**, 91-98 (1939).

42. Ostrowski, A. : *Zur Theorie der konvexen Funktionen.* Commentarii Math. Helvetici, **1**, 157-159 (1929).

43. Pál, J. : *Approksimation af konvekse Funktioner ved konvekse Polynomier.* Mat. Tidsskrift, **B**, 60-65 (1925).

44. Petrovitch, M. : *Sur une fonctionnelle.* Publications Math. Univ. Belgrade. **1**, 149-156 (1932).

45. Phragmén, E., Lindelöf, E. : *Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier.* Acta Math., **31**, 381-406 (1907).

46. Pólya, G. : **a.** *Aufgabe* 427, 428. Archiv der Math. und Physik (3), **21**, 370-371 (1913). **b.** *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen.* Math. Zeitschrift, **29**, 549-640 (1929).

47. Popoviciu, T. : **a.** *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles.* Mathematica, **8**, 1-85 (1934). **b.** *Sur la distribution des zéros de certains polynomes minimisants.* Bulletin Sec. Sc. Acad. Roumaine, **16**, 214-217 (1934). **c.** *Sur le prolongement des fonctions convexes d'ordre supérieur.* Bulletin Math. Soc. Roumaine des Sc., **36**, 75-108 (1934). **d.** *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur.* Mathematica, **10**, 49-54 (1934). **e.** *Remarques sur la définition fonctionnelle d'un polynome d'une variable réelle.* ibid., **12**, 5-12 (1936). **f.** *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur.* I. ibid., **12**, 81-92 (1936). **g.** *idem.* II. ibid., **12**, 227-233 (1936). **h.** *idem* III. ibid., **16**, 74-86 (1940). **i.** *idem* IV. Disquisitiones Mathematicae, **1**, 163-171 (1940). **j.** *idem* VI. Revue Math. de l'union Interbalkanique, **2**, 31-40 (1939). **k.** *idem* VII. Bulletin Sec. Sc. Acad. Roumaine, **22**, 29-33 (1939). **l.** *idem* VIII. ibid., **22**, 34-41 (1939). **m.** *Despre cea mai bună aproximaţie a funcţiilor continue prin polinoame.* Cluj, Ardealul, 66 pp. (1937). **n.** *Deux remarques sur les fonctions convexes.* Bulletin Sec. Sc. Acad. Roumaine, **20**, 45-49 (1938). **o.** *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur.* ibid., **20**, 50-53 (1938). **p.** *Sur le prolongement des fonctions monotones et des fonctions convexes définies sur un nombre fini de points.* ibid., **20**, 54-56 (1938). **q.** *Sur les différences des fonctions d'une variable réelle.* C. R. Inst. Sc. de Roumanie, **2**, 112-114 (1938). **r.** *Sur quelques inégalités entre les fonctions convexes.* ibid., *première note*, **2**, 449-454 (1938), *deuxième note*, **2**, 454-[illegible]

(1938), *troisième note*, 3, 396-402 (1939). s. *Sur les solutions bornées et les solutions mesurables de certaines équations fonctionnelles.* Mathematica, 14, 47-106 (1938).

48. Rado, T. : a. *Remarques sur les fonctions sub-harmoniques.* C. R. Acad. Sc. Paris, 186, 346-348 (1928). b. *On convex functions.* Transactions Amer. Math. Soc., 37, 266-285 (1935).

49. Radon, J. : *Ueber eine Erweiterung des Begriffes der konvexen Funktionen mit einer Anwendung auf die Theorie der konvexen Körper.* Sitzungsberichte K. Akad. Wiss. Wien, 125, 241-258 (1916).

50. Riesz, F. : a. *Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales.* Annales Sc. Éc. Norm. Sup., (3), 28, 33-62 (1911). b. *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel.* Acta Math., 48, 329-343 (1926).

51. Saks, S. : a. *O funkcjach wypukłych i podharmonicznych.* Mathesis Polska, 6, 43-65 (1931). b. *On the generalized derivatives.* Journal London Math. Soc., 7, 247-251 (1932). c. *On subharmonic functions.* Acta Litterarum ac Scientiarum, 5, 187-193 (1932).

52. Schur, I. : *Ueber eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen auf die Determinantentheorie.* Sitzungsberichte Berl. Math. Ges., 22, 9-20 (1923).

53. Sibirani, F. : *Intorno alle funzioni convesse.* Rendiconti Ist. Lombardo (2), 40, 903-919 (1907).

54. Sierpinski, W. : a. *Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$* Fundamenta Math., 1, 116-122 (1920). b. *Sur les fonctions convexes mesurables*, ibid., 1, 125-129 (1920). c. *Sur une propriété des fonctions de M. Hamel.* ibid., 5, 334-336, (1924).

55. Steinhaus, H. : *Ueber die Approximation konvexer vermittels linearer Funktionen.* Zeitschrift für angew. Math. und Mechanik, 8, 414-415 (1928).

56. Stieltjes, Th.-J. : *Over Lagrange's interpolatie formulae.* Verslagen en Mededeelingen der K. Akad. Wetens. Amsterdam (2), 17, 239-254 (1882).

57. Stolz, O. : *Grundzüge der Differential-und Integralrechnung.* I. Leipzig, B. G. Teubner X-460 pp. (1893).

58. Terracini, A. : *Alcune considerazioni sul teorema de valor medio.* Giornale di mat. Battaglini, 51, 66-72 (1913).

59. Toda, K. : *On certain functional inequalities.* Journal of the Hiroshima Univ., A, 4, 27-40 (1934).

60. Tortorici, P. : a. *Sulle funzioni convesse.* Annali di Mat., (4), 4, 143-151 (1927). b. *Sui massimi e minimi delle funzioni convesse.* Rendiconti Accad. dei Lincei, (6), 14, 472-474 (1931).

61. Valiron, G. : a. *Remarques sur certaines fonctions convexes.* Proceedings Phys.-Math. Soc. Japan, (3), 13, 19-38 (1931). b. *Fonctions convexes et fonctions entières.* Bulletin Soc. Math., 60, 278-287 (1932).

62. Vallée Poussin, Ch. de la : *Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes.* Bulletin Acad. Sc. Belgique, 319-410 (1908).

63. Verblunsky, S. : a. *The generalized third derivative and its application to the theory of trigonometric series.* Proceedings London Math. Soc., (2) 31, 387-406 (1903). b. *The generalized fourth derivative.* Journal London Math. Soc., 6, 82-84 (1931).

64. WHITNEY, H. : *Derivatives, difference quotients and Taylor's formula* I. Bulletin Amer. Math. Soc., **40**, 89-94 (1934).

65. WINTERNITZ, A. : *Ueber eine Klasse von linearen Funktionalungleichungen und über konvexe Funktionale*. Berichte K. Ges. der Wiss. Leipzig, **69**, 349-390 (1917).

66. YOUNG, W. H., YOUNG, G. C. : *On the discontinuities of monotone functions of several variables*. Proceedings London Math. Soc., (2) **22**, 124-142 (1923).

76

# TABLE DES MATIÈRES




Imprimé par R. BUSSIÈRE
à Saint-Amand (Cher). France. — 15-11-1945.

*Dépôt légal : 4e trimestre 1945.*
*N° d'édition : 95. N° d'impression : 111 bis.*