TOMUL III, FASC. 1 MARTIE 1926.

BULETINUL SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE DIN CLUJ.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE CLUJ, ROUMANIE.

TOMUL III. — FASCICOLUL 1.

CLUJ,
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL“
STRADA MEMORANDULUI 22.

AVIZ COLABORATORILOR
Buletinului Societății de Științe din Cluj.

1. Data ce figurează sub titlul memoriului original este data depunerei manuscrisului **complect** și **gata de tipar.** Societatea, care poartă răspunderea acestei date, nu are dreptul să și-o însușească pentru comunicări verbale.

2. Manuscrisele se remit președintelui sau secretarului general; ele trebue să fie **inedite, definitive,** bine scrise și de preferință **dactilografiate** (Art. 57).

3. Tipărirea manuscriselor, cu sau fără modificări, să hotărăște de Consiliul de Administrație (Art. 56). Membrii au drept numai la 5 pagini de ședință pentru comunicări originale; despre tipărirea memoriilor mai lungi hotărăște Consiliul de Administrație (Art. 54).

4. Secretarul prepară manuscrisele pentru imprimare. Manuscrisele revin apoi la autori, cari le înapoieze secretarului cu: **bun de cules,** iscălit și datat pe primă pagină. Remanierile ulterioare se face pe contul autorului (Art. 58).

5. Autorii vor indicà pe manuscris ierarhia titlurilor prin sublinieri sau prin culori diferite; ei se vor abține de la orice altă indicație tipografică. Pentru memoriile mai lungi ei vor compune o **Tablă de materii,** ce se va tipări pe prima pagină.

6. Autorii primesc **o primă probă și o probă paginată.** Rezidenții trebue să restitue corecturile în 4 zile (Art. 58); nerezidenții în timpul fixat de secretari (Art. 58).

7. Autorii trebue să înscrie pe prima corectură: **bun de paginat** și pe proba paginată: **bun de tipărit**; aceste mențiuni vor fi iscălite și datate.

8. Autorii vor indicà pe prima probă locul unde trebue înserată fiecare figură, și vor lipì pe marginea acestei probe, în fața acestui loc, proba figurei corespunzătoare.

9. Autorii vor înscrie pe **manuscris,** și vor repetà pe proba paginată, **numărul separatelor** ce doresc, și dacă voesc **o copertă.**

Numărul separatelor nu este limitat, dar costul tipărirei lor cade integral în sarcina autorilor, cari vor plăti facturile direct tipografiei (Art. 59 și Contractul cu tipografia).

10. Autorii își iau angajamentul de a **nu vinde în nici un caz separatele** memoriilor lor. Societatea încuviințează numai distribuția gratuită a separatelor sau schimbul lor cu publicațiile similare.

11. Secretarii au dreptul de a convocà la tipografie pe autori pentru ca să dea indicații zețarilor; acei ce nu se prezintă își perd rândul; tipografii nu vor sta la dispoziția celor neconvocați.

(Hotărîrile Adunării generale din 27 Noembrie 1921).

Toate comunicările referitoare la redactarea acestui *Buletin* trebue adresate Dlui R. Jeannel, la Institutul de Speologie, strada Miko nº 5, Cluj (Telefon nº 8.53).

Les **Sociétés correspondantes** sont priées d'adresser leurs **échanges** personnellement à M. P. A. Chappuis, bibliothécaire de la Société des Sciences de Cluj, Institut de Spéologie, casuța postale 158, Cluj (Roumanie).

SUR LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE D'UN NOYAU

par

D. V. Ionesco

Reçue le 25 Janvier 1927.

Considérons les équations intégrales

$$\varphi(x) + \mu \int_a^b N(xs)\,\varphi(s)\,ds = f(x)$$

$$f(x) + \lambda \int_a^b M(xs)\,f(s)\,ds = F(x)$$

En éliminant $f(x)$ entre ces équations on trouve

$$\varphi(x) + \int_a^b P(xs)\,\varphi(s)\,ds = F(x)$$

où

$$\text{(I)} \qquad P(xy) = \lambda M(xy) + \mu N(xy) + \lambda\mu \int_a^b M(xt)\,N(ty)\,dt$$

Une propriété importante du noyau $P(xy)$ est la suivante: Sa fonction caractéristique pour la valeur 1 du paramètre est égale au produit de la fonction caractéristique $D_M(\lambda)$ du noyau $M(xy)$ par la fonction caractéristique $D_N(\mu)$ du noyau $N(xy)$, c'est-à-dire

$$\text{(II)} \qquad D_P(1) = D_M(\lambda)\,D_N(\mu)$$

Dans ce travail je présente une démonstration de ce théorème [1]

[1] J'ai donné une démonstration simple de la formule (II) en m'appuyant sur un théorème de M. Hilbert (voir mon article du *Bulletin des Sciences Mathématiques* 2e série t. L. juillet et août 1926).

en partant uniquement de la formule de définition de $D(\lambda)$ donnée par M. Fredholm, à savoir

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int_a^b\cdots\int_a^b N\begin{pmatrix}s_1\ldots s_n\\ s_1\ldots s_n\end{pmatrix}ds_1\ldots ds_n,$$

où

$$N\begin{pmatrix}x_1\ldots x_n\\ y_1\ldots y_n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}N(x_1 y_1)&\ldots&N(x_1 y_n)\\ \vdots&&\vdots\\ N(x_n y_1)&\ldots&N(x\;\;y)\end{vmatrix}$$

Ce travail est divisé en deux chapitres. Dans le premier chapitre j'établis des formules que j'utilise pour la démonstration de la formule (21), seule utile pour la suite. Dans le deuxième chapitre je fais la démonstration de la formule (II).

Notations.

1°. Le déterminant

$$\begin{vmatrix}N(x_1 y_1)&..&N(x_1 y_n)&M(x_1 \tau_1)&..&M(x_1 \tau_n)\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ N(x_n y_1)&..&N(x_n y_n)&M(x_n \tau_1)&..&M(x_n \tau_m)\\ N(\sigma_1 y_1)&..&N(\sigma_1 y_n)&M(\sigma_1 \tau_1)&..&M(\sigma_1 \tau_m)\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ N(\sigma_m y_1)&..&N(\sigma_m y_n)&M(\sigma_m \tau_1)&..&M(\sigma_m \tau_m)\end{vmatrix}$$

sera noté par le symbole

$$\left[N\begin{pmatrix}x_1&..&x_n\\ y_1&..&y_n\end{pmatrix}\;M\begin{pmatrix}\sigma_1&..&\sigma_m\\ \tau_1&..&\tau_m\end{pmatrix}\right]$$

2°. Le nombre des combinaisons qu'on fait avec n objets pris p à p sera désigné par C_n^p.

3°. Le signe $\sum\limits_{\alpha_1,..\alpha_k}^{m}$ mis devant une expression E où figurent les indices $\alpha_1,..,\alpha_k$, indique qu'il faut faire la somme de toutes les expressions E qu'on obtient en remplaçant dans E le groupe de lettres $\alpha_1,..\alpha_k$ par une quelconque des combinaisons de k nombres qu'on peut faire avec les m premiers nombres.

4°. Dans la suite on aura a considérer des intégrales multiples de forme

$$\int_a^b..\int_a^b\varphi(x_1,..x_m;y_1..y_p;z_1..z_p)\,dx_1..dx_m\,dy_1..dy_n\,dz_1..dz_p$$

Pour abréger l'écriture cette intégrale sera écrite

$$\int \varphi(x_1 \,.\,.\, x_m ; y_1 \,.\,.\, y_m ; z_1 \,.\,.\, z_p)\, d\overline{x}_m\, d\overline{y}\quad d\overline{z}_p$$

en posant

$$\begin{aligned} d\overline{x}_m &= dx_1 \,.\,.\, dx_m \\ d\overline{y}_n &= dy_1 \,.\,.\, dy_n \\ d\overline{z}_p &= dz_1 \,.\,.\, dz_p \end{aligned}$$

CHAPITRE I.

Formules préliminaires.

1. La formule suivante est fondamentale pour la suite.

$$(1)\quad \left[N\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ y_1 \ldots y_n \end{pmatrix} M\begin{pmatrix} \sigma_1 \ldots \sigma_m \\ \tau_1 \ldots \tau_m \end{pmatrix} \right] = M\begin{pmatrix} \sigma_1 \ldots \sigma_m \\ \tau_1 \ldots \tau_m \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ y_1 \ldots y_n \end{pmatrix}$$

$$- \sum_{\beta_1}^{n} \sum_{\alpha_1}^{m} M\begin{pmatrix} x_{\beta_1} & \sigma_{\alpha_2} \,.\,.\, \sigma_{\alpha_m} \\ \tau_{\alpha_1} & \tau_{\alpha_2} \,.\,.\, \tau_{\alpha} \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} \sigma_{\alpha_1} & x_{\beta_2} \,.\,.\, x_{\beta_n} \\ y_{\beta_1} & y_{\beta_2} \,.\,.\, y_{\beta_n} \end{pmatrix}$$

$$+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ (-1)^l \sum_{\beta_1, \ldots \beta_l}^{n} \sum_{\alpha_1, \ldots \alpha_l}^{m} M\begin{pmatrix} x_{\beta_1} \,.\,.\, x_{\beta^l} & \sigma_{\alpha_{l+1}} \,.\,.\, \sigma_{\alpha_m} \\ \tau_{\alpha_1} \,.\,.\, \tau_{\alpha_l} & \tau_{\alpha_{l+1}} \,.\,.\, \tau_{\alpha_m} \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} \sigma_{\alpha_1} \,.\,.\, \sigma_{\alpha_l} & x_{\beta_{l+1}} \,.\,.\, x_{\beta_n} \\ y_{\beta_1} \,.\,.\, y_{\beta_l} & y_{\beta_{l+1}} \,.\,.\, y_{\beta} \end{pmatrix}$$

$$+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Si $n > m$ le développement se termine par

$$(-1)^m \sum_{\beta_1, \ldots \beta_m}^{n} M\begin{pmatrix} x_{\beta_1} \,.\,.\, x_{\beta_m} \\ \tau_1 \,.\,.\, \tau_m \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} \sigma_1 \,.\,.\, \sigma_m & x_{\beta_{m+1}} \,.\,.\, x_{\beta_n} \\ y_{\beta_1} \,.\,.\, y_{\beta_m} & y_{\beta_{m+1}} \,.\,.\, y_{\beta_n} \end{pmatrix}.$$

et si $m > n$ le développement se termine par

$$(-1)^n \sum_{\alpha_1, \ldots \alpha_n}^{m} M\begin{pmatrix} x_1 \,.\,.\, x_n & \sigma_{\alpha_{n+1}} \ldots \sigma_{\alpha_m} \\ \tau_{\alpha_1} \,.\,.\, \tau_{\alpha_n} & \tau_{\alpha_{n+1}} \ldots \tau_{\alpha_m} \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} \sigma_{\alpha_1} \ldots \sigma_{\alpha_n} \\ y_1 \ldots y_n \end{pmatrix}.$$

Pour abréger, nous désignerons par l a l i g n e σ_α d u d é t e r m i n a n t

$$M\begin{pmatrix} \sigma_1 \,.\,.\, \sigma_m \\ \tau_1 \,.\,.\, \tau_m \end{pmatrix},$$

la ligne

$$M(\sigma_\alpha \tau_1)\, M(\sigma_\alpha \tau_2) \ldots M(\sigma_\alpha \tau_m).$$

Le principe de la démonstration de la formule (1) est le suivant: on cherche tous les termes du second membre tel que dans le déterminant $M\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_1 & \cdot & \cdot & \tau_m \end{pmatrix}$ il y ait l lignes x, $(x_{\beta_1}, \ldots x_{\beta_l})$ et $m-l$ lignes σ $(\sigma_{\alpha_{l+1}}, \ldots \sigma_{\alpha_m})$.

2. Dans la formule (1) faisons

$$x_i = y_i = s_i, \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

multiplions les deux membres par $ds_1 \ldots ds_n$ et intégrons de a à b. On obtient la formule suivante

$$\begin{aligned}
(2) \quad \int \left[N\begin{pmatrix} s_1 \ldots s_n \\ s_1 \ldots s_n \end{pmatrix} M\begin{pmatrix} \sigma_1 \ldots \sigma_m \\ \tau_1 \ldots \tau_m \end{pmatrix} \right] d\overline{s_n} &= \int M\begin{pmatrix} \sigma_1 \ldots \sigma_m \\ \tau_1 \ldots \tau_m \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} s_1 \ldots s_n \\ s_1 \ldots s_n \end{pmatrix} d\overline{s_n} \\
&- C_n^1 \sum_{\alpha_1}^{m} \int M\begin{pmatrix} t_1 & \sigma_{\alpha_2} \ldots \sigma_{\alpha_m} \\ \tau_{\alpha_1} & \tau_{\alpha_2} \ldots \tau_{\alpha_m} \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} \sigma_{\alpha_1} & s_1 \ldots s_{n-1} \\ t_1 & s_1 \ldots s_{n-1} \end{pmatrix} dt_1 \, d\overline{s_{n-1}} \\
&+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
&+ (-1)^l C_n^l \sum_{\alpha_1,\ldots\alpha_l}^{m} \int M\begin{pmatrix} t_1 \ldots t_l & \sigma_{\alpha_{l+1}} \ldots \sigma_{\alpha_m} \\ \tau_{\alpha_1} \ldots \tau_{\alpha_l} & \tau_{\alpha_{l+1}} \ldots \tau_{\alpha_m} \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} \sigma_{\alpha_1} \ldots \sigma_{\alpha_l} & s_1 \ldots s_{n-l} \\ t_1 \ldots t_l & s_1 \ldots s_{n-l} \end{pmatrix} d\overline{t_l} \, d\overline{s_{n-l}} \\
&+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot
\end{aligned}$$

En effet, il suffit de voir que si dans l'intégrale

$$\int M\begin{pmatrix} s_{\beta_1} \ldots s_{\beta_l} & \sigma_{\alpha_{l+1}} \ldots \sigma_{\alpha_m} \\ \tau_{\alpha_1} \ldots \tau_{\alpha_l} & \tau_{\alpha_{l+1}} \ldots \tau_{\alpha_m} \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} \sigma_{\alpha_1} \ldots \sigma_{\alpha_l} & s_{\beta_{l+1}} \ldots s_{\beta_n} \\ s_{\beta_1} \ldots s_{\beta_l} & s_{\beta_{l+1}} \ldots s_{\beta_n} \end{pmatrix} d\overline{s_n}$$

on fait le changement de notations

$$s_{\beta_1} = t_1, \ \ldots \ s_{\beta_l} = t_l$$
$$s_{\beta_{l+1}} = s'_1, \ \ldots \ s_{\beta_n} = s'_{n-l},$$

elle devient

$$\int M\begin{pmatrix} t_1 \ldots t_l & \sigma_{\alpha_{l+1}} \ldots \sigma_{\alpha_m} \\ \tau_{\alpha_1} \ldots \tau_{\alpha_l} & \tau_{\alpha_{l+1}} \ldots \tau_{\alpha_m} \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} \sigma_{\alpha_1} \ldots \sigma_{\alpha_l} & s'_1 \ldots s'_{n-l} \\ t_1 \ldots t_l & s'_1 \ldots s'_{n-l} \end{pmatrix} d\overline{t_l} \, d\overline{s'_{n-l}}$$

On peut écrire la formule (2) sous une forme condensée

$$(3) \qquad \int \left[N\begin{pmatrix} s_1 \ldots s \\ s_1 \ldots s_n \end{pmatrix} M\begin{pmatrix} \sigma_1 \ldots \sigma_m \\ \tau_1 \ldots \tau_m \end{pmatrix} \right] d\overline{s_n}$$

$$=\sum_{l=0}^{l=m}(-1)^l C_n^l \sum_{a_1..a_l}^{m}\int M\begin{pmatrix} t_1 \dots t_l\, \sigma_{a_{l+1}} \dots \sigma_{a_m} \\ \tau_{a_1} \dots \tau_{a_l} \tau_{a_{l+1}} \dots \tau_{a_m} \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} \sigma_{a_1} \dots \sigma_{a_l} s_1 \dots s_{n-l} \\ t_1 \dots t_l\; s_1 \dots s_{n-l} \end{pmatrix} \overline{dt_l}\, \overline{ds_{n-l}}$$

en faisant la convention que pour $l > n$, $C_n^l = 0$.

3. Dans la formule (3) faisons

$$\sigma_i = \tau_i = \theta_i, \qquad (i = 1, 2, \dots m)$$

multiplions les deux membres par $d\theta_1 \dots d\theta_m$ et intégrons de a à b. Nous obtenons la formule

$$\int \left[N\begin{pmatrix} s_1 \dots s_n \\ s_1 \dots s_n \end{pmatrix} M\begin{pmatrix} \theta_1 \dots \theta_m \\ \theta_1 \dots \theta_m \end{pmatrix} \right] \overline{ds_n}\, \overline{d\theta_m} \tag{4}$$

$$=\sum_{l=0}^{l=m}(-1)^l C_n^l C_m^l \int M\begin{pmatrix} u_1 .. u_l\; \theta_1 .. \theta_{m-l} \\ v_1 .. v_l\; \theta_1 .. \theta_{m-l} \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} v_1 .. v_l\; s_1 .. s_{n-l} \\ u_1 .. u_l\; s_1 .. s_{n-l} \end{pmatrix} \overline{du_l}\, \overline{dv_l}\, \overline{d\theta_{m-l}}\, \overline{ds_{n-l}}$$

La démonstration est immédiate.

4. Dans la formule (1) supposons le noyau $M(x\,y)$ identiquement égal au noyau $N(x\,y)$. Le premier membre de cette formule se reduira à

$$N\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n\; \sigma_1 \dots \sigma_m \\ y_1 \dots y_n\; \tau_1 \dots \tau_m \end{pmatrix}$$

Supposons encore $m=k$, $n=p+r$ et faisons

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_i = y_i = s_i & (i = 1, 2, \dots p) \\ x_{p+h} = \tau_{k+h}\,, \; y_{p+h} = \sigma_{k+h} & (h = 1\,.\,2 \dots r) \end{array} \right. \tag{5}$$

Multiplions les deux membres par $ds_1 \dots ds_p$ et intégrons de a à b. On obtient

$$\int N\begin{pmatrix} \tau_1 \dots \tau_{k+r}\, s_1 \dots s_p \\ \sigma_1 \dots \sigma_{k+r}\, s_1 \dots s_p \end{pmatrix} \overline{ds} = \int N\begin{pmatrix} \tau_1 \dots \tau \\ \sigma_1 \dots \sigma \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} \tau_{k+1} \dots \tau_{k+r}\, s_1 \dots s_p \\ \sigma_{k+1} \dots \sigma_{k+r}\, s_1 \dots s_p \end{pmatrix} \overline{ds_p}$$

$$-\sum_{a_1}^{k}\sum_{\beta_1}^{p+r}\int N\begin{pmatrix} \tau_{a_1}\; \tau_{a_2} \dots \tau_{a_k} \\ y_{\beta_1}\; \sigma_{a_2} \dots \sigma_{a_k} \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} x_{\beta_1}\; x_{\beta_2} \dots x_{\beta_{p+r}} \\ \sigma_{a_1}\; y_{\beta_2} \dots y_{\beta_{p+r}} \end{pmatrix} \overline{ds_p}$$

$$+ \dots\dots$$

$$+(-1)^l \sum_{a_1,..a_l}^{k}\sum_{\beta_1,..\beta_l}^{p+r}\int N\begin{pmatrix} \tau_{a_1} \dots \tau_{a_l} \tau_{a_{l+1}} \dots \tau_{a_k} \\ y_{\beta_1} \dots y_{\beta_l} \sigma_{a_{l+1}} \dots \sigma_{a_k} \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} x_{\beta_1} \dots x_{\beta_l} x_{\beta_{l+1}} \dots x_{\beta_{p+r}} \\ \sigma_{a_1} \dots \sigma_{a_l} y_{\beta_{l+1}} \dots y_{\beta_{p+r}} \end{pmatrix} \overline{ds_p}$$

$$+ \dots\dots$$

Dans cette formule les x et les y sont remplacés en fonction de s, σ, τ par les formules (5).

Il n'est pas difficile de montrer qu'en posant

$$
(6)\quad T^{l}_{h}(\alpha_1,\ldots\alpha_l)=C^{h}_{p}\sum_{\gamma_1,\ldots\gamma_{l-h}}^{r}\int N\begin{pmatrix}\tau_{\alpha_1}\ldots\tau_{\alpha_h}\,\tau_{\alpha_{h+1}}\ldots\tau_{\alpha_l} & \tau_{\alpha_{l+1}}\ldots\tau_{\alpha_k}\\ \theta_1\ldots\theta_h\,\sigma_{k+\gamma_1}\ldots\sigma_{h+\gamma_{l-h}} & \sigma_{\alpha_{l+1}}\ldots\sigma_{\alpha_k}\end{pmatrix}
$$

$$
N\begin{pmatrix}\theta_1\ldots\theta_h\;\tau_{k+\gamma_1}\ldots\tau_{k+\gamma_{l-h}}\ldots\tau_{k+\gamma_r}\;s_1\ldots s_{p-h}\\ \sigma_{\alpha_1}\ldots\sigma_{\alpha_h}\;\sigma_{\alpha_{l+1}}\ldots\sigma_{\alpha_l}\;\ldots\sigma_{k+\gamma_r}\;s_1\ldots s_{p-h}\end{pmatrix} d\bar{\theta}_h\,d\bar{s}_{p-h}
$$

on a

$$
(7)\quad \int N\begin{pmatrix}\tau_1\ldots\tau_{k+r}\,s_1\ldots s_p\\ \sigma_1\ldots\sigma_{k+}\;s_1\ldots s_p\end{pmatrix}d\bar{s}=T^0_0-\sum_{\alpha_1}^{k}T^1_0(\alpha_1)+T^1_1(\alpha_1)+\cdots
$$

$$
+(-1)^l\sum_{\alpha_1,\ldots\alpha_l}^{k}\left[T^l_0(\alpha_1,\ldots\alpha_l)+\cdots+T^l_l(\alpha_1\ldots\alpha_l)\right]+\cdots
$$

5. Revenons à la formule (3), supposons $m=p+k$ et posons:

$$
\sigma_{p+h}=\tau_{p+h}=\theta_h \qquad (h=1,2,\ldots k)
$$

multiplions les deux membres par $d\theta_1\ldots d\theta_k$ et intégrons de a à b. On aura

$$
\int\left[N\begin{pmatrix}s_1\ldots s_n\\ s_1\ldots s_n\end{pmatrix}M\begin{pmatrix}\sigma_1\ldots\sigma_p\,\theta_1\ldots\theta_k\\ \tau_1\ldots\tau_p\,\theta_1\ldots\theta_k\end{pmatrix}\right]d\bar{s}_n\,d\bar{\theta}_k
$$

$$
=\sum_{l=0}^{l=p-1}(-1)^l C^l_n\sum_{\alpha_1,\ldots\alpha_l}^{p+k}\int M\begin{pmatrix}t_1\ldots t_l\;\sigma_{\alpha_{l+1}}\ldots\sigma_{\alpha_{p+k}}\\ \tau_{\alpha_1}\ldots\tau_{\alpha_l}\tau_{\alpha_{l+1}}\ldots\tau_{\alpha_{p+k}}\end{pmatrix}N\begin{pmatrix}\sigma_{\alpha_1}\ldots\sigma_{\alpha_l}\,s_1\ldots s_{n-l}\\ t_1\ldots t_l\;s_1\ldots s_{n-l}\end{pmatrix}d\bar{t}_l\,d\bar{s}_{n-l}\,d\bar{\theta}_k
$$

$$
+\sum_{l=p}^{l=p+k}(-1)^l C^l_n\sum_{\alpha_1,\ldots\alpha_l}^{p+k}\int M\begin{pmatrix}t_1\ldots t_l\;\sigma_{\alpha_{l+1}}\ldots\sigma_{\alpha_{p+k}}\\ \tau_{\alpha_1}\ldots\tau_{\alpha_l}\tau_{\alpha_{l+1}}\ldots\tau_{\alpha_{p+k}}\end{pmatrix}N\begin{pmatrix}\sigma_{\alpha_1}\ldots\sigma_{\alpha_l}\,s_1\ldots s_{n-l}\\ t_1\ldots t_l\;s_1\ldots s_{n-l}\end{pmatrix}d\bar{t}_l\,d\bar{s}_{n-l}\,d\bar{\theta}_k
$$

Si l'on pose

$$
(8)\quad \left\{\begin{aligned}
S^l_h &= C^h_k\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_{l-h}}^{p}\int M\begin{pmatrix}t_1\ldots t_{l-h}\,\sigma_{\alpha_{l-h+1}}\ldots\sigma_{\alpha_p}\;u_1\ldots u_h\;\theta_1\ldots\theta_{k-h}\\ \tau_{\alpha_1}\ldots\tau_{\alpha_{l-h}}\tau_{\alpha_{l-h+1}}\ldots\tau_{\alpha_p}\;v_1\ldots v_h\;\theta_1\ldots\theta_{k-h}\end{pmatrix}\\
&\qquad N\begin{pmatrix}\sigma_1\ldots\sigma_{\alpha_{l-h}}\ldots v_1\ldots v_h\;s_1\ldots s_{n-l}\\ t_1\ldots t_{l-h}\ldots u_1\ldots u_h\;s_1\ldots s_{n-l}\end{pmatrix}d\bar{u}_h\,d\bar{v}_h\,d\bar{t}_{l-h}\,d\bar{\theta}_{k-h}\,d\bar{s}_{n-l}\\
S'^{l}_{p-h} &= S^{l}_{l-p+h}
\end{aligned}\right.
$$

on aura:

$$(9)\qquad \int \left[N \begin{pmatrix} s_1 & . & s_n \\ s_1 & . & s_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \sigma_1 \ldots \sigma_p & \theta_1 \ldots \theta_k \\ \tau_1 \ldots \tau_p & \theta_1 \ldots \theta_k \end{pmatrix} \right] \overline{ds_p}\, \overline{d\theta_k}$$

$$= \sum_{l=0}^{l=p-1} (-1)^l C_n^l \left(S_0^l + \cdots + S_l^l \right) + \sum_{l=p}^{l=p+k} (-1)^l C_n \left(S_p'^l + \cdots + S_0'^l \right)$$

6. Considérons l'intégrale

$$(10)\qquad I = \int M \begin{pmatrix} \sigma_1 \ldots \sigma_{k+r} & u_1 \ldots u_m \\ \tau_1 \ldots \tau_{k+r} & v_1 \ldots v_m \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \tau_1 \ldots \tau_{k+r} & s_1 \ldots s_p \\ \sigma_1 \ldots \sigma_{k+r} & s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} \overline{d\sigma_{k+r}}\, \overline{d\tau_{k+r}}\, \overline{ds_p}$$

et remplaçons

$$\int N \begin{pmatrix} \tau_1 \ldots \tau_{k+r} & s_1 \ldots s_p \\ \sigma_1 \ldots \sigma_{k+r} & s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} \overline{ds_p}$$

par le second membre de la formule (7). On aura

$$(11)\qquad I = D_0^0 - \sum_{\alpha_1}^{k} \left(D_0^1 + D_1^1 \right) + \cdots\cdots$$

$$+ (-1)^l \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}^{k} \left(D_0^l + D_1^l + \cdots + D_l^l \right) + \cdots\cdots$$

en posant

$$D_h^l = \int M \begin{pmatrix} \sigma_1 \ldots \sigma_{k+r} & u_1 \ldots u_m \\ \tau_1 \ldots \tau_{k+r} & v_1 \ldots v_m \end{pmatrix} T_h^l (\alpha_1 \ldots \alpha_l)\, \overline{d\sigma_{k+r}}\, \overline{d\tau_{k+r}}$$

Si on se rapporte à la formule (6) on déduit sans difficulté que

$$D_h^l = (-1)^{l-h} C_p^h C_r^{l-h} \int M \begin{pmatrix} \sigma_1 \ldots \sigma_{k+r} & u_1 \ldots u_m \\ \tau_1 \ldots \tau_{k+r} & v_1 \ldots v_m \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \tau_{\alpha_1} \ldots \tau_{\alpha_h} & \tau_{\alpha_{h+1}} \ldots \tau_{\alpha_k} \\ \theta_1 \ldots \theta_h & \sigma_{\alpha_{h+1}} \ldots \sigma_{\alpha_k} \end{pmatrix}$$

$$N \begin{pmatrix} \theta_1 \ldots \theta & \tau_{k+1} \ldots \tau_{k+r} & s_1 \ldots s_{p-h} \\ \sigma_{\alpha_1} \ldots \sigma_{\alpha_h} & \sigma_{k+1} \ldots \sigma_{k+r} & s_1 \ldots s_{p-h} \end{pmatrix} \overline{d\theta_h}\, \overline{ds_{h-p}}\, \overline{d\sigma_{k+r}}\, \overline{d\tau_{k+r}}$$

Dans la formule (11) nous voyons qu'il figure le terme

$$(12)\qquad E_h^l = \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}^{k} D_h^l$$

On montre que

$$E_h^l = (-1)^{l-h} C_p^h C_r^{l-h} C_k^l F_h$$

où

$$(14)\qquad F_h = \int M \begin{pmatrix} \sigma_1 \ldots \sigma_{k+r} & u_1 \ldots u_m \\ \tau_1 \ldots \tau_{k+r} & v_1 \ldots v_m \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \tau_1 \ldots \tau_h & \tau_{h+1} \ldots \tau_k \\ \theta_1 \ldots \theta_h & \sigma_{h+1} \ldots \sigma_k \end{pmatrix}$$

$$N\begin{pmatrix}\theta_1\,..\,\theta_h & \tau_{k+1}\,..\,\tau_{k+r} & s_1\,..\,s_{p-h}\\ \sigma_1\,..\,\sigma_h & \sigma_{k+1}\,..\,\sigma_{k+r} & s_1\,..\,s_{p-h}\end{pmatrix} d\overline{\theta}_h\, d\overline{s}_{p-h}\, d\overline{\sigma}_{k+r}\, d\overline{\tau}_{k+r}$$

Tenant compte des formules (12) et (13) la formule (11) devienent

$$\begin{aligned} I = {} & F_0\left(1+C_r^1 C_k^1 + \cdots + C_r^k C_k^k\right)\\ & - C_p^1 F_1\left(C_k^1 + C_r^1 C_k^2 + \cdots + C_r^{k-1} C_k^k\right)\\ & + \cdots\cdots\\ & + (-1)^h C_p^h F_h\left(C_k^h + C_r^1 C_k^{h+1} + \cdots + C_r^{k-h} C_k^k\right)\\ & + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Mais

$$C_k^h + C_r^1 C_k^{h+1} + \cdots + C_r^{k-h} C_k^k = C_{r+k}^{k-h}\quad ,$$

de sorte que:

$$I = \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h C_p^h C_{r+k}^{k-h} F_h$$

ou bien tenant compte des formules (10) et (14) on a:

$$\int M\begin{pmatrix}\sigma_1\,..\,\sigma_{k+r} & u_1\,..\,u_m\\ \tau_1\,..\,\tau_{k+r} & v_1\,..\,v_m\end{pmatrix} N\begin{pmatrix}\tau_1\,..\,\tau_{k+r} & s_1\,..\,s_p\\ \sigma_1\,..\,\sigma_{k+r} & s_1\,..\,s_p\end{pmatrix} d\overline{s}_p\, d\overline{\sigma}_{k+r}\, d\overline{\tau}_{k+r}$$

$$= \int M\begin{pmatrix}\sigma_1\,..\,\sigma_{k+r} & u_1\,..\,u_m\\ \tau_1\,..\,\tau_{k+r} & v_1\,..\,v_m\end{pmatrix} d\overline{\sigma}_{k+r}\, d\overline{\tau}_{k+r}\quad \Big\{\sum_{h=0}^{h=k}(-1)^h C_p^h C_{r+k}^{k-h}$$

$$\int N\begin{pmatrix}\tau_1\,..\,\tau_h & \tau_{h+1}\,..\,\tau_k\\ \theta_1\,..\,\theta_h & \sigma_{h+1}\,..\,\sigma_k\end{pmatrix} N\begin{pmatrix}\theta_1\,..\,\theta_h & \tau_{k+1}\,..\,\tau_{k+r} & s_1\,..\,s_{p-h}\\ \sigma_1\,..\,\sigma_k & \sigma_{k+1}\,..\,\sigma_{k+r} & s_1\,..\,s_{p-h}\end{pmatrix} d\overline{\theta}_h\, d\overline{s}_{p-h}\Big\}$$

Nous allons faire plus loin une application de cette formule dans le cas $p=q-r$. Remarquons que:

$$C_{q-r}^h C_{k+r}^{k-h} = \frac{C_{k+r}^r}{C_q^r} C_k^h C_q^{r+h}$$

D'où:

$$\int M\begin{pmatrix}\sigma_1\,..\,\sigma_{k+r} & u_1\,..\,u_m\\ \tau_1\,..\,\tau_{k+r} & v_1\,..\,v_m\end{pmatrix} N\begin{pmatrix}\tau_1\,..\,\tau_{k+r} & s_1\,..\,s_{q-r}\\ \sigma_1\,..\,\sigma_{k+r} & s_1\,..\,s_{q-r}\end{pmatrix} d\overline{s}_{q-r}\, d\overline{\sigma}_{k+r}\, d\overline{\tau}_{k+r} \tag{15}$$

$$= \frac{C_{k+r}^r}{C_q^r}\int M\begin{pmatrix}\sigma_1\,..\,\sigma_{k+r} & u_1\,..\,u_m\\ \tau_1\,..\,\tau_{k+r} & v_1\,..\,v_m\end{pmatrix} d\overline{\sigma}_{k+r}\, d\overline{\tau}_{k+r}\, \Big\{\sum_{h=0}^{h=k}(-1)^h C_k^h C_q^{r+h}$$

$$\int N\begin{pmatrix}\tau_1\,..\,\tau_h & \tau_{h+1}\,..\,\tau_h\\ \theta_1\,..\,\theta_h & \sigma_{h+1}\,..\,\sigma_h\end{pmatrix} N\begin{pmatrix}\theta_1\,..\,\theta_h & \tau_{h+1}\,..\,\tau_{k+r} & s_1\,..\,s_{q-r-h}\\ \sigma_1\,..\,\sigma_h & \sigma_{h+1}\,..\,\sigma_{k+r} & s_1\,..\,s_{q-r-h}\end{pmatrix} d\overline{\theta}_h\, d\overline{s}_{q-r-h}\Big\}.$$

7. Nous allons utiliser les formules précédentes à la transformation de l'intégrale

$$(16)\qquad J=\int\left[N\begin{pmatrix}s_1\,.\,.\,s_n\\ s_1\,.\,.\,s_n\end{pmatrix}M\begin{pmatrix}\sigma_1\,.\,.\,\sigma_k & \theta_1\,.\,.\,\theta_p\\ \tau_1\,.\,.\,\tau_k & \theta_1\,.\,.\,\theta_p\end{pmatrix}\right]N\begin{pmatrix}\tau_1\,.\,.\,\tau_k\\ \sigma_1\,.\,.\,\sigma_k\end{pmatrix}d\overline{s_n}\,d\overline{\theta}_p\,d\overline{\sigma}_k\,d\overline{\tau}_k$$

Remplaçons dans J l'intégrale

$$\int\left[N\begin{pmatrix}s_1\,.\,.\,s_n\\ s_1\,.\,.\,s_n\end{pmatrix}M\begin{pmatrix}\sigma_1\,.\,.\,\sigma_k & \theta_1\,.\,.\,\theta_p\\ \tau_1\,.\,.\,\tau_k & \theta_1\,.\,.\,\theta_p\end{pmatrix}\right]d\overline{s_n}\,d\overline{\theta}_p$$

par le second membre de la formule (9). On aura:

$$J=\sum_{l=0}^{l=k-l}(-1)^l C_n^l\left(A_0^l+\,.\,.\,+A_0^l\right)+\sum_{l=k}^{l=k+p}(-1)^l C_n^l\left(A'^l_k+\,.\,.\,+A'^l_0\right)$$

où on a posé d'après les formules (8):

$$(17)\quad\begin{cases}A_h^l=C_p^h\displaystyle\sum_{\alpha_1..\alpha_{l-h}}^{k}\int M\begin{pmatrix}t_1\,.\,.\,t_{l-h} & \sigma_{\alpha_{l-h+1}}\,.\,.\,\sigma_{\alpha_k} & u_1\,.\,.\,u_h & \theta_1\,.\,.\,\theta_{p-h}\\ \tau_{\alpha_1}.\,.\tau_{\alpha_{l-h}} & \tau_{\alpha_{l-h+1}}\,.\,.\,\tau_{\alpha_k} & v_1\,.\,.\,v_h & \theta_1\,.\,.\,\theta_{p-h}\end{pmatrix}\times\\ N\begin{pmatrix}\sigma_{\alpha_1}\,.\,.\,\sigma_{\alpha_{l-h}} & v_1\,.\,.\,v_h & s_1\,.\,.\,s_{n-l}\\ t_1\,.\,.\,t_{l-h} & u_1\,.\,.\,u_h & s_1\,.\,.\,s_{n-l}\end{pmatrix}N\begin{pmatrix}\tau_1\,.\,.\,\tau_k\\ \sigma_1\,.\,.\,\sigma_k\end{pmatrix}d\overline{t}_{l-h}\,d\overline{u}_h d\overline{v}\;d\overline{\theta}_{p-h}d\overline{s}_{n-l}d\overline{\sigma}_k d\overline{\tau}_k\\ A'^l_{k-h}=A_h^{l-k+h}\end{cases}$$

On démontre facilement qu'en posant

$$(18)\qquad B_h^l=\int M\begin{pmatrix}\sigma_1\,.\,.\,\sigma_{k+h} & \theta_1\,.\,.\,\theta_{p-h}\\ \tau_1\,.\,.\,\tau_{k+h} & \theta_1\,.\,.\,\theta_{p-h}\end{pmatrix}N\begin{pmatrix}t_1\,.\,.\,t_l & \tau_{k+1}\,.\,.\,\tau_{k+h} & s_1\,.\,.\,s_{n-l-h}\\ \sigma_1\,.\,.\,\sigma_l & \sigma_{k+1}\,.\,.\,\sigma_{k+h} & s_1\,.\,.\,s_{n-l-h}\end{pmatrix}$$

$$N\begin{pmatrix}\tau_1\,.\,.\,\tau_l & \tau_{l+1}\,.\,.\,\tau_k\\ t_1\,.\,.\,t_l & \sigma_{l+1}\,.\,.\,\sigma_k\end{pmatrix}d\overline{t}_l\,d\overline{s}_{n-l-h}\,d\overline{\theta}_{p-h}\,d\overline{\sigma}_{k+h}\,d\overline{\tau}_{k+h}$$

on a

$$(19)\qquad A_h^l=C_p^h\,C_k^{l-h}\,B_h^{l-h}\;,\quad A'^l_{k-h}=C_k^h\,C_p^{l-k+h}\,B_{l+h-k}^{k-h}$$

de sorte que J devient:

$$J=\sum_{l=0}^{l=k-l}(-1)^l C_n^l\left(C_k^l\,B_0^l+C_p^1\,C_k^{l-1}\,B_1^{l-1}+\,.\,.\,+C_p^l\,C_k^0\,B_l^0\right)$$

$$+\sum_{l=k}^{l=k+p}(-1)^l C_n^l\left(C_p^{l-k}\,B_{l-k}^k+C_k^1\,C_p^{l-k+1}\,B_{l-k+1}^{k-1}+\,.\,.\,+C_k^{p+k-l}\,C_p^p\,B_p^{l-p}\right)$$

On peut encore écrire cette expression sous la forme

$$(20) \qquad J = \sum_{h=0}^{h=p} (-1) \; C_p^h \sum_{j=0}^{j=k} (-1)^j C_n^{h+j} C_k^j B_h^j$$

D'après la formule (18) on a:

$$\sum_{j=0}^{j=k} (-1)^j C_n^{h+j} C_k^j B_h^j =$$

$$\int M \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_{k+h} & \theta_1 \dots \theta_{p-h} \\ \tau_1 \dots \tau_{k+h} & \theta_1 \dots \theta_{p-h} \end{pmatrix} d\overline{\sigma}_{k+h} \, d\overline{\tau}_{k+h} \, d\overline{\theta}_{p-h} \left[\sum_{j=0}^{j=k} (-1)^j C_k^j C_n^{h+j} \right.$$

$$\left. \int N \begin{pmatrix} \tau_1 \dots \tau_j & \tau_{j+1} \dots \tau_k \\ t_1 \dots t_j & \sigma_{j+1} \dots \sigma_k \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} t_1 \dots t_j & \tau_{k+1} \dots \tau_{k+h} & s_1 \dots s_{n-h-j} \\ \sigma_1 \dots \sigma_j & \sigma_{k+1} \dots \sigma_{k+h} & s_1 \dots s_{n-h-j} \end{pmatrix} d\overline{t}_j \, d\overline{s}_{n-h-j} \right]$$

D'après la formule (15) le second membre de cette formule est égal à

$$\frac{C_n^h}{C_{k+h}^h} \int M \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_{k+h} & \theta_1 \dots \theta_{p-h} \\ \tau_1 \dots \tau_{k+h} & \theta_1 \dots \theta_{p-h} \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \tau_1 \dots \tau_{k+h} & s_1 \dots s_{n-h} \\ \sigma_1 \dots \sigma_{k+h} & s_1 \dots s_{n-h} \end{pmatrix} d\overline{\theta}_{p-h} \, d\overline{s}_{n-h}$$

En remplaçant ceci dans la formule (20) et tenant compte de (16) nous avons:

$$(21) \quad \int \left| N \begin{pmatrix} s_1 \dots s_n \\ s_1 \dots s_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_k & \theta_1 \dots \theta_p \\ \tau_1 \dots \tau_k & \theta_1 \dots \theta_p \end{pmatrix} \right| N \begin{pmatrix} \tau_1 \dots \tau \\ \sigma_1 \dots \sigma_k \end{pmatrix} d\overline{s}_n \, d\overline{\theta}_p \, d\overline{\sigma}_k \, d\overline{\tau}_k$$

$$= \sum_{0}^{h=p} (-1)^h \frac{C_n C_p^h}{C_{k+h}^h} \int M \begin{pmatrix} \sigma_1 .. \sigma_{k+h} & \theta_1 .. \theta_{p-h} \\ \tau_1 .. \tau_{k+h} & \theta_1 .. \theta_{p-h} \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \tau_1 .. \tau_{k+h} & s_1 .. s_{n-h} \\ \sigma_1 .. \sigma_{k+h} & s_1 .. s_{n-h} \end{pmatrix} d\overline{\theta}_{p-h} d\overline{s}_{n-h} d\overline{\sigma}_{k+h} d\overline{\tau}_{k+h}$$

Cette dernière formule est la seule dont nous aurons besoin dans la suite.

CHAPITRE II.

Démonstration de la formule (II).

8. Considérons le noyau

$$(\mathrm{I}) \qquad P(xy) = \lambda M(xy) + \mu N(xy) + \lambda \mu \int M(xt) N(ty) dt$$

et calculons:

$$(22) \qquad D_P(1) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \int P \begin{pmatrix} s_1 \dots s_p \\ s_1 \dots s_p \end{pmatrix} ds_1 \dots ds_p \, .$$

Pour abréger l'écriture posons

$$(23)\qquad \begin{aligned} L(xy) &= \lambda M(xy) + \mu N(xy) \\ K(xy) &= \int M(xt)N(ty)\,dt. \end{aligned}$$

$$P\begin{pmatrix} s_1 \,.\,.\, s_p \\ s_1 \,.\,.\, s_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} L(s_1 s_1) + \lambda\mu K(s_1 s_1) & \dots & L(s_1 s_p) + \lambda\mu K(s_1 s_p) \\ \vdots & & \vdots \\ L(s_p s_1) + \lambda\mu K(s_p s_1) & \dots & L(s_p s_p) + \lambda\mu K(s_p s_p) \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant suivant les puissances de $\lambda\mu$ on a:

$$(24)\qquad \int P\begin{pmatrix} s_1 \,.\,.\, s_p \\ s_1 \,.\,.\, s_p \end{pmatrix} \overline{ds_p} = a_{p0} + \lambda\mu\, a_{p1} + (\lambda\mu)^2 a_{p2} + \cdots + (\lambda\mu)\ a_{pp},$$

où la valeur du coefficient a_{pk} est

$$(25)\qquad a_{pk} = C_p^k \int\left[L\begin{pmatrix} s_1 \,.\,.\, s_{p-k} \\ s_1 \,.\,.\, s_{-k} \end{pmatrix} M\begin{pmatrix} \sigma_1 \,.\,.\, \sigma_k \\ \tau_1 \,.\,.\, \tau_k \end{pmatrix}\right] N(\tau_1\sigma_1)\,.\,.\,N(\tau_k\sigma_k)\,\overline{ds_{p-k}}\,\overline{d\sigma_k}\,\overline{d\tau_k}$$

Pour la démonstration de la formule (24) je renvoie à un Mémoire de M. Goursat (¹).

De la même manière on démontre que

$$\int\left[L\begin{pmatrix} s_1 \,.\,.\, s_r \\ s_1 \,.\,.\, s_r \end{pmatrix} M\begin{pmatrix} \sigma_1 \,.\,.\, \sigma_k \\ \tau_1 \,.\,.\, \tau_k \end{pmatrix}\right] \overline{ds_r}$$

$$= \sum_{h=0}^{h=r} C_r^h \lambda^{r-h}\mu^h \int\left[N\begin{pmatrix} \theta_1 \,.\,.\, \theta_h \\ \theta_1 \,.\,.\, \theta_h \end{pmatrix} M\begin{pmatrix} s_1 \,.\,.\, s_{r-h} & \sigma \,.\,.\, \sigma_k \\ s_1 \,.\,.\, s_{r-h} & \tau \,\dots\, \tau_k \end{pmatrix}\right] d\theta_h\, ds_{r-h}$$

de sorte que

$$a_{pk} = \sum_{h=0}^{h=p-k} C_p^k\, C_{p-k}^h\, \lambda^{p-k-h}\, \mu^h\, Q_{pk}^h$$

en posant

$$(26)\qquad Q_{pk}^h = \int\left[N\begin{pmatrix} \theta_1 .. \theta_h \\ \theta_1 .. \theta_h \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} s_1 .. s_{p-k-h} & \sigma_1 .. \sigma_k \\ s_1 .. s_{p-k-h} & \tau_1 . \tau_k \end{pmatrix}\right] N(\tau_1\sigma_1)\,..\,N(\sigma_k\tau_k)\,\overline{d\theta_h}\,\overline{ds_{p-k-h}}\,\overline{d\sigma_k}\,\overline{d\tau_k}$$

On peut encore écrire

$$(27)\qquad a_{pk} = C_k^p\,.\,b_{pk}$$

en posant

$$(28)\qquad b_{pk} = \sum_{h=0}^{h=p-k} C_{p-k}^h\, \lambda^{p-k-h}\, \mu^h\, Q_{pk}^h$$

(¹) M. E. Goursat, *Annales de la Faculté de Toulouse* 2ᵉ série tome X, 1908, page 26—32.

Remarquons que a_{pk} est un polynome en λ et μ homogène et de degré $p-k$.

9. La formule (22)

$$D_P(1)=1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\left[a_{p0}+(\lambda\mu)\,a_{p1}+\cdots+(\lambda\mu)^p\,a_{pp}\right],$$

où on remplace a_{pk} par la formule (27) deviendra

$$D_P(1)=1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\left(b_{p0}+C_p^1(\lambda\mu)\,b_{p1}+\cdots+C_p^p(\lambda\mu)^p\,b_{pp}\right)$$

Ordonnons suivant les puissances croissantes de λ et μ.

Nous aurons:

$$\begin{aligned}(29)\qquad D_P(1)=1&+\frac{1}{1!}\,b_{10}+\frac{1}{2!}\left[b_{20}+2(\lambda\mu)\,b_{11}\right]\\&+\frac{1}{3!}\left[b_{30}+3\,C_2^1(\lambda\mu)\,b_{21}\right]\\&+\frac{1}{4!}\left[b_{40}+4\,C_3^1(\lambda\mu)\,b_{31}+4.3\,(\lambda\mu)^2\,b_{22}\right]\\&+\cdots\cdots\\&+\frac{1}{p!}\,C_p+\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$(30)\qquad C_p=b_{p0}+p\,C_{p-1}^1(\lambda\mu)\,b_{p-1,1}+p(p-1)\,C_{p-2}^2(\lambda\mu)^2\,b_{p-2,2}+\cdots$$

Si $p=2q$, cette formule se termine par

$$2q\,(2q-1)\cdots(q+1)\;C_q^q\,(\lambda\mu)^q\,b_{q,q}$$

et si $p=2q+1$, cette formule se termine par

$$(2q+1)\,2q\cdots(q+2)\;C_{q+1}^q\,(\lambda\mu)^q\,b_{q+1,q}\,.$$

Remarquons que C_p est un polynome en λ et μ homogène et de degré p. Nous pouvons donc poser

$$C_p=C_{p0}\,\lambda^p+C_{p1}\,\lambda^{p-1}\mu+\cdots+C_{ph}\,\lambda^{p-h}\mu^h+\cdots+C_{pp}\,\mu^p\,.$$

Il s'agit de calculer C_{ph}.

10. D'après les formules (28) et (30) on a:

$$\begin{aligned}(31)\qquad C_{ph}&=C_p^h\,Q_{p0}^h+p\,C_{p-1}^1\,C_{p-2}^{h-1}\,Q_{p-1,1}^{h-1}\\&+p(p-1)\,C_{p-2}^2\,C_{p-4}^{h-2}\,Q_{p-2,2}^{h-2}+\cdots\end{aligned}$$

Revenons à la formule (26) et permutons les indices $\tau_1 \dots \tau_k$ de toutes les manières possibles.

On aura:

$$Q^h_{p,k} = \frac{1}{k!} R^h_{p,k}$$

où on a posé

$$(32) \qquad R^h_{p,k} = \int \left[N\begin{pmatrix}\theta_1 \dots \theta_h \\ \theta_1 \dots \theta_h\end{pmatrix} M\begin{pmatrix} s_1 \dots s_{p-k-h} & \sigma_1 \dots \sigma_k \\ s_1 \dots s_{p-k-h} & \tau_1 \dots \tau_k\end{pmatrix}\right] N\begin{pmatrix}\tau_1 \dots \tau_k \\ \sigma_1 \dots \sigma_k\end{pmatrix} d\overline{\theta}_h \, d\overline{s}_{p-k-h} \, d\overline{\sigma}_k \, d\overline{\tau}_k$$

Alors la formule (31) deviendra

$$(33) \qquad \begin{aligned} C_{ph} = C^h_p R^h_{p.0} &+ C^1_p C^1_{p-1} C^{h-1}_{p-2} R^{h-1}_{p-1.1} \\ &+ C^2_p C^2_{p-2} C^{h-2}_{p-4} R^{h-2}_{p-2.2} \\ &+ C^3_p C^3_{p-3} C^{h-3}_{p-6} R^{h-3}_{p-3.3} \\ &+ \dots\dots \end{aligned}$$

Mais d'après la formule (21) on a:

$$R^h_{p.k} = \sum_{j=0}^{j=p-k-h} (-1)^j \frac{C^j_h C^j_{p-k-h}}{C^j_{k+j}} \int M\begin{pmatrix}\sigma_1 \dots \sigma_{k+j} & \theta_1 \dots \theta_{p-k-h-j} \\ \tau_1 \dots \tau_{k+j} & \theta_1 \dots \theta_{p-k-h-j}\end{pmatrix}$$

$$N\begin{pmatrix}\tau_1 \dots \tau_{k+j} & s_1 \dots s_{h-j} \\ \sigma_1 \dots \sigma_{k+j} & s_1 \dots s_{h-j}\end{pmatrix} d\overline{\theta}_{p-k-h-j} \, d\overline{s}_{h-j} \, d\overline{\sigma}_{k+j} \, d\overline{\tau}_{k+j}$$

Dans cette formule changeons p en $p-k$ et h en $h-k$, on aura:

$$(34) \qquad R^{h-k}_{p-k,k} = \sum_{j=k}^{j=p-h} (-1)^{k+j} \frac{C^{j-k}_{h-k} \, C^{j-k}_{p-k-h}}{C^{j-k}_j} R_j$$

où on a posé

$$(35) \qquad R_j = \int M\begin{pmatrix}\sigma_1 \dots \sigma_j & \theta_1 \dots \theta_{p-h-j} \\ \tau_1 \dots \tau_j & \theta_1 \dots \theta_{p-h-j}\end{pmatrix} N\begin{pmatrix}\tau_1 \dots \tau_j & s_1 \dots s_{h-j} \\ \sigma_1 \dots \sigma_j & s_1 \dots s_{h-j}\end{pmatrix} d\overline{\theta}_{p-h-j} \, d\overline{s}_{h-j} \, d\overline{\sigma}_j . d\overline{\tau}_j$$

Si dans la formule (33) on remplace les $R^{h-k}_{p-k,k}$ par les formules (34), en faisant les calculs, on trouve

$$C_{ph} = C^h_p \, R_0$$

c'est-à-dire d'après (35)

$$C_{ph} = C^h_p \int M\begin{pmatrix}\theta_1 \dots \theta_{p-h} \\ \theta_1 \dots \theta_{p-h}\end{pmatrix} d\overline{\theta}_{p-h} \int N\begin{pmatrix}s_1 \dots s_h \\ s_1 \dots s_h\end{pmatrix} d\overline{s}_h$$

Si nous revenons à la formule (29) nous en déduisons que le coefficient de $\lambda^{p-h}\mu$ dans le développement de $D_p(1)$ suivant les puissances de λ et μ est

$$\frac{1}{h!(p-h)!}\int M\begin{pmatrix}\theta_1 & . & \theta_{p-h}\\ \theta_1 & .. & \theta_{p-h}\end{pmatrix} d\overline{\theta}_{p-h}\int N\begin{pmatrix}s_1 & .. & s\\ s_1 & .. & s\end{pmatrix} d\overline{s} \tag{36}$$

D'autre part en multipliant les deux séries

$$D_M(\lambda)=1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\lambda^p}{}\int N\begin{pmatrix}\theta_1 & .. & \theta_p\\ \theta_1 & .. & \theta_p\end{pmatrix} d\overline{\theta}_p$$

$$D_N(\mu)=1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\mu^p}{p!}\int N\begin{pmatrix}s_1 & .. & s_p\\ s_1 & .. & s_p\end{pmatrix} d\overline{s}_p$$

nous remarquons que le coefficient de $\lambda^{p\ h}\ \mu^h$ est encore (36). Donc on a identiquement

$$D\ \ (1)=D_M(\lambda)\,.\,D_N(\mu)\,.$$

La démonstration de la formule (II) est ainsi faite.

TABLE DES MATIÈRES

Partie administrative.

PREMIÈRE PARTIE
(Sciences mathématiques, physiques et chimiques).

Mathématiques.

Physique.

Chimie.

DEUXIÈME PARTIE.

(Sciences naturelles).

Zoologie.

Botanique.

Physiologie.

Préhistoire.

GENRES ET ESPÈCES
nouvellement décrits dans ce volume.

ZOOLOGIE.

Syncarida.

Parabathynella nov. gen. Chappuis (1926), p. 7.
Parabathynella *stygia* Chappuis (1926) p 7.

Amphipoda.

Nyphargus Plateaui subsp. *Bureschi* Fage (1925) p 1.

Coleoptera.

Anophtalmus ajdovskanus *Mülleri* Jeannel (1927), p. 54.
— Gobanzi *obirensis* Jeannel (1927), p. 36.
— Schaumi *leptonotus* Jeannel (1927), p. 42.
— Schaumi *macromelus* Jeannel (1927), p. 42.
— Schaumi *orientalis* Jeannel (1927), p. 42.
— *Winklerianus* Jeannel (1927), p. 45.
Duvalius baldensis *pavionis* Jeannel (1926), p. 21.

DATES D'APPARITION DES FASCICULES COMPOSANT CE VOLUME.

Le fasc. 1	1ere partie, p 1–128 2e partie, p. 1—24	a paru le 31 mars 1926.
Le fasc. 2—3	1ere partie, p. 129–352 2e partie, p. 25—108	a paru le 15 avril 1927.
Le fasc. 4	1ere partie, p. 352—424 2e partie, p. 109—196	a paru le 30 novembre 1927.

CORRIGENDA.

Seite 168 Zeile 11 lautet: das frisch präparierte Herz. In dieser Beziehung bestätigen usw.
Seite 172 Zeile 4 von unten, statt 18 15
Seite 172 Zeile 2 von unten, statt 33 16
Seite 174 Zeile 13 von oben, statt 0 01 0,05
Seite 174 Zeile 18 von oben, statt 1 prozentiges . . 0,5 prozentiges
Seite 177 Zeile 10 von oben, statt 1, 2, 3, 5 . . . . . . 1, 2, 3, 4, 5
Seite 177 Zeile 16 von oben, statt 0,02 cm³ Ringer . . . . . Ringer
Seite 178 Zeile 22 von oben, statt 20 19–22
Seite 184 Zeile 3 von unten, statt idem 0,10 cm³ . . . + 0,10 cm³