

Imprimat legal

4. MAR. 1926

279287

TOMUL III, FASC. 1

MARTIE 1926.

BULETINUL SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE DIN CLUJ.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE CLUJ,
ROUMANIE.

TOMUL III. — FASCICOLUL 1.

BCU Cluj / Central University Library Cluj

156



Biblioteca Universității Regale Ferdinand I.
din CLUJ.
Nr. 669 19 29
EXEMPLAR LEGAL.

Sibiu
II. 188

CLUJ,
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL”
STRADA MEMORANDULUI 22.



AVIZ COLABORATORILOR

Buletinului Societății de Științe din Cluj.

1. Data ce figurează sub titlul memoriului original este data depunerii manuscrisului **complet și gata de tipar**. Societatea, care poartă răspunderea acestei date, nu are dreptul să și-o însușească pentru comunicări verbale.

2. Manuscrisele se remit președintelui sau secretarului general; ele trebuie să fie **inedite, definitive**, bine scrise și de preferință **dactilografate** (Art. 57).

3. Tipărirea manuscriselor, cu sau fără modificări, să hotărâște de Consiliul de Administrație (Art. 56). Membrii au drept numai la 5 pagini de ședință pentru comunicări originale; despre tipărirea memoriilor mai lungi hotărâște Consiliul de Administrație (Art. 54).

4. Secretarul prepară manuscrisele pentru imprimare. Manuscrisele revin apoi la autori, cari le înapoieze secretarului cu: **bun de cules**, iscălit și datat pe primă pagină. Remanierile ulterioare se face pe contul autorului (Art. 58).

5. Autorii vor indica pe manuscris ierarhia titlurilor prin sublinieri sau prin culori diferite; ei se vor abține de la orice altă indicație tipografică. Pentru memoriile mai lungi ei vor compune o **Tablă de materii**, ce se va tipări pe prima pagină.

6. Autorii primesc o **primă probă și o probă paginată**. Rezidenții trebuie să restituie corecturile în 4 zile (Art. 58); nerezidenții în timpul fixat de secretari (Art. 58).

7. Autorii trebuie să înscrie pe prima corectură: **bun de paginat** și pe proba paginată: **bun de tipărit**; aceste mențiuni vor fi iscălite și datate.

8. Autorii vor indica pe prima probă locul unde trebuie inserată fiecare figură, și vor lipi pe marginea acestei probe, în fața acestui loc, proba figurei corespunzătoare.

9. Autorii vor înscrie pe **manuscris**, și vor repeta pe proba paginată, **numărul separatelor** ce doresc, și dacă voesc o **copertă**.

Numărul separatelor nu este limitat, dar costul tipăririi lor cade integral în sarcina autorilor, cari vor plăti facturile direct tipografiei (Art. 59 și Contractul cu tipografia).

10. Autorii își iau angajamentul de a **nu vinde în nici un caz separatele** memoriilor lor. Societatea încuviințează numai distribuția gratuită a separatelor sau schimbul lor cu publicațiile similare.

11. Secretarii au dreptul de a convoca la tipografie pe autori pentru ca să dea indicații zețarilor; acei ce nu se prezintă își perd rândul; tipografii nu vor sta la dispoziția celor neconvocați.

(Hotărârile Adunării generale din 27 Noembrie 1921).

Toate comunicările referitoare la redactarea acestui *Buletin* trebuie adresate Dlui R. JEANNEL, la Institutul de Speologie, strada Miko n^o 5, Cluj (Telefon n^o 8.53).

Les **Sociétés correspondantes** sont priées d'adresser leurs **échanges** personnellement à M. P. A. CHAPPUIS, bibliothécaire de la Société des Sciences de Cluj, Institut de Spéologie, casuța postale 158, Cluj (Roumanie).

SUR LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE D'UN NOYAU

par

D. V. Ionesco

Reçue le 25 Janvier 1927.

Considérons les équations intégrales

$$\varphi(x) + \mu \int_a^b N(x s) \varphi(s) ds = f(x)$$

$$f(x) + \lambda \int_a^b M(x s) f(s) ds = F(x)$$

En éliminant $f(x)$ entre ces équations on trouve

$$\varphi(x) + \int_a^b P(x s) \varphi(s) ds = F(x)$$

où

$$(I) \quad P(x y) = \lambda M(x y) + \mu N(x y) + \lambda \mu \int_a^b M(x t) N(t y) dt$$

Une propriété importante du noyau $P(x y)$ est la suivante: Sa fonction caractéristique pour la valeur 1 du paramètre est égale au produit de la fonction caractéristique $D_M(\lambda)$ du noyau $M(x y)$ par la fonction caractéristique $D_N(\mu)$ du noyau $N(x y)$, c'est-à-dire

$$(II) \quad D_P(1) = D_M(\lambda) D_N(\mu)$$

Dans ce travail je présente une démonstration de ce théorème (1)

(1) J'ai donné une démonstration simple de la formule (II) en m'appuyant sur un théorème de M. HILBERT (voir mon article du *Bulletin des Sciences Mathématiques* 2^e série t. L. juillet et août 1926).

en partant uniquement de la formule de définition de $D(\lambda)$ donnée par M. FREDHOLM, à savoir

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b \dots \int_a^b N \begin{pmatrix} s_1 \dots s_n \\ s_1 \dots s_n \end{pmatrix} ds_1 \dots ds_n,$$

où

$$N \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} N(x_1 y_1) & \dots & N(x_1 y_n) \\ \vdots & & \vdots \\ N(x_n y_1) & \dots & N(x_n y_n) \end{vmatrix}$$

Ce travail est divisé en deux chapitres. Dans le premier chapitre j'établis des formules que j'utilise pour la démonstration de la formule (21), seule utile pour la suite. Dans le deuxième chapitre je fais la démonstration de la formule (II).

Notations.

1°. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} N(x_1 y_1) \dots N(x_1 y_n) & M(x_1 \tau_1) \dots M(x_1 \tau_m) \\ \vdots & \vdots \\ N(x_n y_1) \dots N(x_n y_n) & M(x_n \tau_1) \dots M(x_n \tau_m) \\ N(\sigma_1 y_1) \dots N(\sigma_1 y_n) & M(\sigma_1 \tau_1) \dots M(\sigma_1 \tau_m) \\ \vdots & \vdots \\ N(\sigma_m y_1) \dots N(\sigma_m y_n) & M(\sigma_m \tau_1) \dots M(\sigma_m \tau_m) \end{vmatrix}$$

sera noté par le symbole

$$\left[N \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_m \\ \tau_1 \dots \tau_m \end{pmatrix} \right]$$

2°. Le nombre des combinaisons qu'on fait avec n objets pris p à p sera désigné par C_n^p .

3°. Le signe $\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^m$ mis devant une expression E où figurent les indices $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, indique qu'il faut faire la somme de toutes les expressions E qu'on obtient en remplaçant dans E le groupe de lettres $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ par une quelconque des combinaisons de k nombres qu'on peut faire avec les m premiers nombres.

4°. Dans la suite on aura à considérer des intégrales multiples de forme

$$\int_a^b \dots \int_a^b \varphi(x_1, \dots, x_m; y_1 \dots y_p; z_1 \dots z_p) dx_1 \dots dx_m dy_1 \dots dy_n dz_1 \dots dz_p$$

Pour abrégier l'écriture cette intégrale sera écrite

$$\int \varphi(x_1 \dots x_m; y_1 \dots y_m; z_1 \dots z_p) d\bar{x}_m d\bar{y} d\bar{z}_p$$

en posant

$$\begin{aligned} d\bar{x}_m &= dx_1 \dots dx_m \\ d\bar{y}_n &= dy_1 \dots dy_n \\ d\bar{z}_p &= dz_1 \dots dz_p \end{aligned}$$

CHAPITRE I.

Formules préliminaires.

1. La formule suivante est fondamentale pour la suite.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left[N \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_m \\ \tau_1 \dots \tau_m \end{pmatrix} \right] = M \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_m \\ \tau_1 \dots \tau_m \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_n \end{pmatrix} \\ & - \sum_{\beta_1}^n \sum_{\alpha_1}^m M \begin{pmatrix} x_{\beta_1} \sigma_{\alpha_2} \dots \sigma_{\alpha_m} \\ \tau_{\alpha_1} \tau_{\alpha_2} \dots \tau_{\alpha_m} \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha_1} x_{\beta_2} \dots x_{\beta_n} \\ y_{\beta_1} y_{\beta_2} \dots y_{\beta_n} \end{pmatrix} \\ & + (-1)^l \sum_{\beta_1 \dots \beta_l \alpha_1 \dots \alpha_l}^n \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^m M \begin{pmatrix} x_{\beta_1} \dots x_{\beta_l} \sigma_{\alpha_{l+1}} \dots \sigma_{\alpha_m} \\ \tau_{\alpha_1} \dots \tau_{\alpha_l} \tau_{\alpha_{l+1}} \dots \tau_{\alpha_m} \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_l} x_{\beta_{l+1}} \dots x_{\beta_n} \\ y_{\beta_1} \dots y_{\beta_l} y_{\beta_{l+1}} \dots y_{\beta_n} \end{pmatrix} \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Si $n > m$ le développement se termine par

$$(-1)^m \sum_{\beta_1 \dots \beta_m}^n M \begin{pmatrix} x_{\beta_1} \dots x_{\beta_m} \\ \tau_1 \dots \tau_m \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_m x_{\beta_{m+1}} \dots x_{\beta_n} \\ y_{\beta_1} \dots y_{\beta_m} y_{\beta_{m+1}} \dots y_{\beta_n} \end{pmatrix}$$

et si $m > n$ le développement se termine par

$$(-1)^n \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^m M \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \sigma_{\alpha_{n+1}} \dots \sigma_{\alpha_m} \\ \tau_{\alpha_1} \dots \tau_{\alpha_n} \tau_{\alpha_{n+1}} \dots \tau_{\alpha_m} \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_n} \\ y_1 \dots y_n \end{pmatrix}$$

Pour abrégier, nous désignerons par la ligne σ_α du déterminant

$$M \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_m \\ \tau_1 \dots \tau_m \end{pmatrix},$$

la ligne

$$M(\sigma_\alpha \tau_1) \cdot M(\sigma_\alpha \tau_2) \dots M(\sigma_\alpha \tau_m).$$

Le principe de la démonstration de la formule (1) est le suivant : on cherche tous les termes du second membre tel que dans le déterminant $M \begin{pmatrix} \tau_1 & \dots & \tau_m \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ il y ait l lignes x , $(x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_l})$ et $m-l$ lignes σ $(\sigma_{\alpha_{l+1}}, \dots, \sigma_{\alpha_m})$.

2. Dans la formule (1) faisons

$$x_i = y_i = s_i, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

multiplions les deux membres par $ds_1 \dots ds_n$ et intégrons de a à b . On obtient la formule suivante

$$\begin{aligned} (2) \quad & \int \left[N \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_m \\ \tau_1 & \dots & \tau_m \end{pmatrix} \right] d\bar{s}_n = \int M \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_m \\ \tau_1 & \dots & \tau_m \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} d\bar{s}_n \\ & - C_n^1 \sum_{\alpha_1}^m \int M \begin{pmatrix} t_1 & \sigma_{\alpha_2} & \dots & \sigma_{\alpha_m} \\ \tau_{\alpha_1} & \tau_{\alpha_2} & \dots & \tau_{\alpha_m} \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha_1} & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ t_1 & s_1 & \dots & s_{n-1} \end{pmatrix} dt_1 d\bar{s}_{n-1} \\ & + \dots \\ & + (-1)^l C_n^l \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_l}^m \int M \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_l & \sigma_{\alpha_{l+1}} & \dots & \sigma_{\alpha_m} \\ \tau_{\alpha_1} & \dots & \tau_{\alpha_l} & \tau_{\alpha_{l+1}} & \dots & \tau_{\alpha_m} \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha_1} & \dots & \sigma_{\alpha_l} & s_1 & \dots & s_{n-l} \\ t_1 & \dots & t_l & s_1 & \dots & s_{n-l} \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_l d\bar{s}_{n-l} \\ & + \dots \end{aligned}$$

En effet, il suffit de voir que si dans l'intégrale

$$\int M \begin{pmatrix} s_{\beta_1} & \dots & s_{\beta_l} & \sigma_{\alpha_{l+1}} & \dots & \sigma_{\alpha_m} \\ \tau_{\alpha_1} & \dots & \tau_{\alpha_l} & \tau_{\alpha_{l+1}} & \dots & \tau_{\alpha_m} \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha_1} & \dots & \sigma_{\alpha_l} & s_{\beta_{l+1}} & \dots & s_{\beta_n} \\ s_{\beta_1} & \dots & s_{\beta_l} & s_{\beta_{l+1}} & \dots & s_{\beta_n} \end{pmatrix} d\bar{s}_n$$

on fait le changement de notations

$$\begin{aligned} s_{\beta_1} &= t_1, \dots, s_{\beta_l} = t_l \\ s_{\beta_{l+1}} &= s'_1, \dots, s_{\beta_n} = s'_{n-l}, \end{aligned}$$

elle devient

$$\int M \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_l & \sigma_{\alpha_{l+1}} & \dots & \sigma_{\alpha_m} \\ \tau_{\alpha_1} & \dots & \tau_{\alpha_l} & \tau_{\alpha_{l+1}} & \dots & \tau_{\alpha_m} \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha_1} & \dots & \sigma_{\alpha_l} & s'_1 & \dots & s'_{n-l} \\ t_1 & \dots & t_l & s'_1 & \dots & s'_{n-l} \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_l d\bar{s}_{n-l}$$

On peut écrire la formule (2) sous une forme condensée

$$(3) \quad \int \left[N \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_m \\ \tau_1 & \dots & \tau_m \end{pmatrix} \right] d\bar{s}_n$$

$$= \sum_{l=0}^{l=m} (-1)^l C'_n \sum_{a_1 \dots a_l}^m \int M \left(\begin{matrix} t_1 \dots t_l \sigma_{a_l+1} \dots \sigma_{a_m} \\ \tau_{a_1} \dots \tau_{a_l} \tau_{a_l+1} \dots \tau_{a_m} \end{matrix} \right) N \left(\begin{matrix} \sigma_{a_1} \dots \sigma_{a_l} s_1 \dots s_{n-l} \\ t_1 \dots t_l s_1 \dots s_{n-l} \end{matrix} \right) d\bar{t}_l d\bar{s}_{n-l}$$

en faisant la convention que pour $l > n$, $C'_n = 0$.

3. Dans la formule (3) faisons

$$\sigma_i = \tau_i = \theta_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

multiplions les deux membres par $d\theta_1 \dots d\theta_m$ et intégrons de a à b . Nous obtenons la formule

$$(4) \quad \int \left[N \left(\begin{matrix} s_1 \dots s_n \\ s_1 \dots s_n \end{matrix} \right) M \left(\begin{matrix} \theta_1 \dots \theta_m \\ \theta_1 \dots \theta_m \end{matrix} \right) \right] d\bar{s}_n d\bar{\theta}_m$$

$$= \sum_{l=0}^{l=m} (-1)^l C'_n C'_m \int M \left(\begin{matrix} u_1 \dots u_l \theta_1 \dots \theta_{m-l} \\ v_1 \dots v_l \theta_1 \dots \theta_{m-l} \end{matrix} \right) N \left(\begin{matrix} v_1 \dots v_l s_1 \dots s_{n-l} \\ u_1 \dots u_l s_1 \dots s_{n-l} \end{matrix} \right) d\bar{u}_l d\bar{v}_l d\bar{\theta}_{m-l} d\bar{s}_{n-l}$$

La démonstration est immédiate.

4. Dans la formule (1) supposons le noyau $M(x y)$ identiquement égal au noyau $N(x y)$. Le premier membre de cette formule se réduira à

$$N \left(\begin{matrix} x_1 \dots x_n \sigma_1 \dots \sigma_m \\ y_1 \dots y_n \tau_1 \dots \tau_m \end{matrix} \right)$$

Supposons encore $m=k$, $n=p+r$ et faisons

$$(5) \quad \begin{cases} x_i = y_i = s_i & (i = 1, 2, \dots, p) \\ x_{p+h} = \tau_{k+h}, y_{p+h} = \sigma_{k+h} & (h=1, 2, \dots, r) \end{cases}$$

Multiplions les deux membres par $ds_1 \dots ds_p$ et intégrons de a à b . On obtient

$$\int N \left(\begin{matrix} \tau_1 \dots \tau_{k+r} s_1 \dots s_p \\ \sigma_1 \dots \sigma_{k+r} s_1 \dots s_p \end{matrix} \right) d\bar{s} = \int N \left(\begin{matrix} \tau_1 \dots \tau \\ \sigma_1 \dots \sigma \end{matrix} \right) N \left(\begin{matrix} \tau_{k+1} \dots \tau_{k+r} s_1 \dots s_p \\ \sigma_{k+1} \dots \sigma_{k+r} s_1 \dots s_p \end{matrix} \right) d\bar{s}_p$$

$$- \sum_{a_1}^k \sum_{\beta_1}^{p+r} \int N \left(\begin{matrix} \tau_{a_1} \tau_{a_2} \dots \tau_{a_k} \\ y_{\beta_1} \sigma_{a_2} \dots \sigma_{a_k} \end{matrix} \right) N \left(\begin{matrix} x_{\beta_1} x_{\beta_2} \dots x_{\beta_{p+r}} \\ \sigma_{a_1} y_{\beta_2} \dots y_{\beta_{p+r}} \end{matrix} \right) d\bar{s}_p$$

$$+ \dots$$

$$+ (-1)^l \sum_{a_1 \dots a_l}^k \sum_{\beta_1 \dots \beta_l}^{p+r} \int N \left(\begin{matrix} \tau_{a_1} \dots \tau_{a_l} \tau_{a_l+1} \dots \tau_{a_k} \\ y_{\beta_1} \dots y_{\beta_l} \sigma_{a_l+1} \dots \sigma_{a_k} \end{matrix} \right) N \left(\begin{matrix} x_{\beta_1} \dots x_{\beta_l} x_{\beta_{l+1}} \dots x_{\beta_{p+r}} \\ \sigma_{a_1} \dots \sigma_{a_l} y_{\beta_{l+1}} \dots y_{\beta_{p+r}} \end{matrix} \right) d\bar{s}_p$$

$$+ \dots$$

Dans cette formule les x et les y sont remplacés en fonction de s, σ, τ par les formules (5).

Il n'est pas difficile de montrer qu'en posant

$$(6) \quad T'_h(\alpha_1, \dots, \alpha_j) = C_p^h \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_{j-h}}^r \int N \left(\begin{array}{c} \tau_{\alpha_1} \dots \tau_{\alpha_h} \tau_{\alpha_{h+1}} \dots \tau_{\alpha_j} \quad \tau_{\alpha_{j+1}} \dots \tau_{\alpha_k} \\ \theta_1 \dots \theta_h \sigma_{k+\gamma_1} \dots \sigma_{n+\gamma_{j-h}} \sigma_{\alpha_{j+1}} \dots \sigma_{\alpha_k} \end{array} \right) \\ N \left(\begin{array}{c} \theta_1 \dots \theta_h \tau_{k+\gamma_1} \dots \tau_{k+\gamma_{j-h}} \dots \tau_{k+\gamma_r} s_1 \dots s_{p-h} \\ \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_h} \sigma_{\alpha_{j+1}} \dots \sigma_{\alpha_j} \dots \sigma_{k+\gamma_r} s_1 \dots s_{p-h} \end{array} \right) d\bar{\theta}_h d\bar{s}_{p-h}$$

on a

$$(7) \quad \int N \left(\begin{array}{c} \tau_1 \dots \tau_{k+r} s_1 \dots s_p \\ \sigma_1 \dots \sigma_{k+r} s_1 \dots s_p \end{array} \right) d\bar{s} = T_0^0 - \sum_{\alpha_1}^k T_0^1(\alpha_1) + T_1^1(\alpha_1) + \dots \\ + (-1)^j \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}^k [T_0^j(\alpha_1, \dots, \alpha_j) + \dots + T_j^j(\alpha_1, \dots, \alpha_j)] + \dots$$

5. Revenons à la formule (3), supposons $m = p + k$ et posons :

$$\sigma_{p+h} = \tau_{p+h} = \theta_h \quad (h = 1, 2, \dots, k)$$

multiplions les deux membres par $d\theta_1 \dots d\theta_k$ et intégrons de a à b .

On aura

$$\int \left[N \left(\begin{array}{c} s_1 \dots s_n \\ s_1 \dots s_n \end{array} \right) M \left(\begin{array}{c} \sigma_1 \dots \sigma_p \theta_1 \dots \theta_k \\ \tau_1 \dots \tau_p \theta_1 \dots \theta_k \end{array} \right) \right] d\bar{s}_n d\bar{\theta}_k \\ = \sum_{l=0}^{l=p-1} (-1)^l C_n^l \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_l}^{p+k} M \left(\begin{array}{c} t_1 \dots t_l \sigma_{\alpha_{l+1}} \dots \sigma_{\alpha_{p+k}} \\ \tau_{\alpha_1} \dots \tau_{\alpha_l} \tau_{\alpha_{l+1}} \dots \tau_{\alpha_{p+k}} \end{array} \right) N \left(\begin{array}{c} \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_l} s_1 \dots s_{n-l} \\ t_1 \dots t_l s_1 \dots s_{n-l} \end{array} \right) d\bar{t}_l d\bar{s}_{n-l} d\bar{\theta}_k \\ + \sum_{l=p}^{l=p+k} (-1)^l C_n^l \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_l}^{p+k} M \left(\begin{array}{c} t_1 \dots t_l \sigma_{\alpha_{l+1}} \dots \sigma_{\alpha_{p+k}} \\ \tau_{\alpha_1} \dots \tau_{\alpha_l} \tau_{\alpha_{l+1}} \dots \tau_{\alpha_{p+k}} \end{array} \right) N \left(\begin{array}{c} \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_l} s_1 \dots s_{n-l} \\ t_1 \dots t_l s_1 \dots s_{n-l} \end{array} \right) d\bar{t}_l d\bar{s}_{n-l} d\bar{\theta}_k$$

Si l'on pose

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} S'_h = C_n^h \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{j-h}}^p M \left(\begin{array}{c} t_1 \dots t_{j-h} \sigma_{\alpha_{j-h+1}} \dots \sigma_{\alpha_p} u_1 \dots u_h \theta_1 \dots \theta_{k-h} \\ \tau_{\alpha_1} \dots \tau_{\alpha_{j-h}} \tau_{\alpha_{j-h+1}} \dots \tau_{\alpha_p} v_1 \dots v_h \theta_1 \dots \theta_{k-h} \end{array} \right) \\ N \left(\begin{array}{c} \sigma_1 \dots \sigma_{\alpha_{j-h}} \dots v_1 \dots v_h s_1 \dots s_{n-l} \\ t_1 \dots t_{j-h} \dots u_1 \dots u_h s_1 \dots s_{n-l} \end{array} \right) d\bar{u}_h d\bar{v}_h d\bar{t}_{j-h} d\bar{\theta}_{k-h} d\bar{s}_{n-l} \\ S'_{p-h} = S'_{l-p+h} \end{array} \right.$$

on aura :

$$(9) \quad \int \left[N \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_p & \theta_1 \dots \theta_k \\ \tau_1 \dots \tau_p & \theta_1 \dots \theta_k \end{pmatrix} \right] d\bar{s}_p d\bar{\theta}_k \\ = \sum_{l=0}^{l=p-1} (-1)^l C_n^l (S_0^l + \dots + S_l^l) + \sum_{l=p}^{l=p+k} (-1)^l C_n^l (S_p^l + \dots + S_0^l)$$

6. Considérons l'intégrale

$$(10) \quad I = \int M \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_{k+r} & u_1 \dots u_m \\ \tau_1 \dots \tau_{k+r} & v_1 \dots v_m \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \tau_1 \dots \tau_{k+r} & s_1 \dots s_p \\ \sigma_1 \dots \sigma_{k+r} & s_1 \dots s_p \end{pmatrix} d\bar{\sigma}_{k+r} d\bar{\tau}_{k+r} d\bar{s}_p$$

et remplaçons

$$\int N \begin{pmatrix} \tau_1 \dots \tau_{k+r} & s_1 \dots s_p \\ \sigma_1 \dots \sigma_{k+r} & s_1 \dots s_p \end{pmatrix} d\bar{s}_p$$

par le second membre de la formule (7). On aura

$$(11) \quad I = D_0^0 - \sum_{\alpha_1}^k (D_0^1 + D_1^1) + \dots \\ + (-1)^l \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^k (D_0^l + D_1^l + \dots + D_l^l) + \dots$$

en posant

$$D_h^l = \int M \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_{k+r} & u_1 \dots u_m \\ \tau_1 \dots \tau_{k+r} & v_1 \dots v_m \end{pmatrix} T_h^l(\alpha_1 \dots \alpha_l) d\bar{\sigma}_{k+r} d\bar{\tau}_{k+r}$$

Si on se rapporte à la formule (6) on déduit sans difficulté que

$$D_h^l = (-1)^{l-h} C_p^h C_r^{l-h} \int M \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_{k+r} & u_1 \dots u_m \\ \tau_1 \dots \tau_{k+r} & v_1 \dots v_m \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \tau_{\alpha_1} \dots \tau_{\alpha_h} & \tau_{\alpha_{h+1}} \dots \tau_{\alpha_k} \\ \theta_1 \dots \theta_h & \sigma_{\alpha_{h+1}} \dots \sigma_{\alpha_k} \end{pmatrix} \\ N \begin{pmatrix} \theta_1 \dots \theta_h & \tau_{k+1} \dots \tau_{k+r} & s_1 \dots s_{p-h} \\ \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_h} & \sigma_{k+1} \dots \sigma_{k+r} & s_1 \dots s_{p-h} \end{pmatrix} d\bar{\theta}_h d\bar{s}_{p-h} d\bar{\sigma}_{k+r} d\bar{\tau}_{k+r}$$

Dans la formule (11) nous voyons qu'il figure le terme

$$(12) \quad E_h^l = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^k D_h^l$$

On montre que

$$E_h^l = (-1)^{l-h} C_p^h C_r^{l-h} C_k^l F_h$$

où

$$(14) \quad F_h = \int M \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_{k+r} & u_1 \dots u_m \\ \tau_1 \dots \tau_{k+r} & v_1 \dots v_m \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \tau_1 \dots \tau_h & \tau_{h+1} \dots \tau_k \\ \theta_1 \dots \theta_h & \sigma_{h+1} \dots \sigma_k \end{pmatrix}$$

$$N \left(\begin{matrix} \theta_1 \dots \theta_h & \tau_{k+1} \dots \tau_{k+r} & s_1 \dots s_{p-h} \\ \sigma_1 \dots \sigma_h & \sigma_{k+1} \dots \sigma_{k+r} & s_1 \dots s_{p-h} \end{matrix} \right) d\bar{\theta}_h d\bar{s}_{p-h} d\bar{\sigma}_{k+r} d\bar{\tau}_{k+r}$$

Tenant compte des formules (12) et (13) la formule (11) devient

$$\begin{aligned} I &= F_0 \left(1 + C_r^1 C_k^1 + \dots + C_r^k C_k^k \right) \\ &- C_p^1 F_1 \left(C_k^1 + C_r^1 C_k^2 + \dots + C_r^{k-1} C_k^k \right) \\ &+ \dots \\ &+ (-1)^h C_p^h F_h \left(C_k^h + C_r^1 C_k^{h+1} + \dots + C_r^{k-h} C_k^k \right) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Mais

$$C_k^h + C_r^1 C_k^{h+1} + \dots + C_r^{k-h} C_k^k = C_{r+k}^{k-h},$$

de sorte que:

$$I = \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h C_p^h C_{r+k}^{k-h} F_h$$

ou bien tenant compte des formules (10) et (14) on a :

$$\begin{aligned} &\int M \left(\begin{matrix} \sigma_1 \dots \sigma_{k+r} & u_1 \dots u_m \\ \tau_1 \dots \tau_{k+r} & v_1 \dots v_m \end{matrix} \right) N \left(\begin{matrix} \tau_1 \dots \tau_{k+r} & s_1 \dots s_p \\ \sigma_1 \dots \sigma_{k+r} & s_1 \dots s_p \end{matrix} \right) d\bar{s}_p d\bar{\sigma}_{k+r} d\bar{\tau}_{k+r} \\ &= \int M \left(\begin{matrix} \sigma_1 \dots \sigma_{k+r} & u_1 \dots u_m \\ \tau_1 \dots \tau_{k+r} & v_1 \dots v_m \end{matrix} \right) d\bar{\sigma}_{k+r} d\bar{\tau}_{k+r} \left\{ \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h C_p^h C_{r+k}^{k-h} \right. \\ &\left. \int N \left(\begin{matrix} \tau_1 \dots \tau_h & \tau_{h+1} \dots \tau_k \\ \theta_1 \dots \theta_h & \sigma_{h+1} \dots \sigma_k \end{matrix} \right) N \left(\begin{matrix} \theta_1 \dots \theta_h & \tau_{k+1} \dots \tau_{k+r} & s_1 \dots s_{p-h} \\ \sigma_1 \dots \sigma_k & \sigma_{k+1} \dots \sigma_{k+r} & s_1 \dots s_{p-h} \end{matrix} \right) d\bar{\theta}_h d\bar{s}_{p-h} \right\} \end{aligned}$$

Nous allons faire plus loin une application de cette formule dans le cas $p=q-r$. Remarquons que :

$$C_{q-r}^h C_{k+r}^{k-h} = \frac{C_{k+r}^r}{C_q^r} C_k^h C_q^{r+h}$$

D'où :

$$\begin{aligned} (15) \quad &\int M \left(\begin{matrix} \sigma_1 \dots \sigma_{k+r} & u_1 \dots u_m \\ \tau_1 \dots \tau_{k+r} & v_1 \dots v_m \end{matrix} \right) N \left(\begin{matrix} \tau_1 \dots \tau_{k+r} & s_1 \dots s_{q-r} \\ \sigma_1 \dots \sigma_{k+r} & s_1 \dots s_{q-r} \end{matrix} \right) d\bar{s}_{q-r} d\bar{\sigma}_{k+r} d\bar{\tau}_{k+r} \\ &= \frac{C_{k+r}^r}{C_q^r} \int M \left(\begin{matrix} \sigma_1 \dots \sigma_{k+r} & u_1 \dots u_m \\ \tau_1 \dots \tau_{k+r} & v_1 \dots v_m \end{matrix} \right) d\bar{\sigma}_{k+r} d\bar{\tau}_{k+r} \left\{ \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h C_k^h C_q^{r+h} \right. \\ &\left. \int N \left(\begin{matrix} \tau_1 \dots \tau_h & \tau_{h+1} \dots \tau_k \\ \theta_1 \dots \theta_h & \sigma_{h+1} \dots \sigma_k \end{matrix} \right) N \left(\begin{matrix} \theta_1 \dots \theta_h & \tau_{k+1} \dots \tau_{k+r} & s_1 \dots s_{q-r-h} \\ \sigma_1 \dots \sigma_k & \sigma_{k+1} \dots \sigma_{k+r} & s_1 \dots s_{q-r-h} \end{matrix} \right) d\bar{\theta}_h d\bar{s}_{q-r-h} \right\}. \end{aligned}$$

7. Nous allons utiliser les formules précédentes à la transformation de l'intégrale

$$(16) \quad J = \int \left[N \begin{pmatrix} s_1 \dots s_n \\ s_1 \dots s_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_k \theta_1 \dots \theta_p \\ \tau_1 \dots \tau_k \theta_1 \dots \theta_p \end{pmatrix} \right] N \begin{pmatrix} \tau_1 \dots \tau_k \\ \sigma_1 \dots \sigma_k \end{pmatrix} d\bar{s}_n d\bar{\theta}_p d\bar{\sigma}_k d\bar{\tau}_k$$

Remplaçons dans J l'intégrale

$$\int \left[N \begin{pmatrix} s_1 \dots s_n \\ s_1 \dots s_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_k \theta_1 \dots \theta_p \\ \tau_1 \dots \tau_k \theta_1 \dots \theta_p \end{pmatrix} \right] d\bar{s}_n d\bar{\theta}_p$$

par le second membre de la formule (9). On aura :

$$J = \sum_{l=0}^{l=k-l} (-1)^l C'_n (A'_0 + \dots + A'_0) + \sum_{l=k}^{l=k+p} (-1)^l C'_n (A''_k + \dots + A''_0)$$

où on a posé d'après les formules (8) :

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} A'_h &= C_p^h \sum_{a_1 \dots a_{j-h}}^k \int M \begin{pmatrix} t_1 \dots t_{j-h} \sigma_{a_{j-h+1}} \dots \sigma_{a_k} u_1 \dots u_h \theta_1 \dots \theta_{p-h} \\ \tau_{a_1} \dots \tau_{a_{j-h}} \tau_{a_{j-h+1}} \dots \tau_{a_k} v_1 \dots v_h \theta_1 \dots \theta_{p-h} \end{pmatrix} \times \\ &N \begin{pmatrix} \sigma_{a_1} \dots \sigma_{a_{j-h}} v_1 \dots v_h s_1 \dots s_{n-l} \\ t_1 \dots t_{j-h} u_1 \dots u_h s_1 \dots s_{n-l} \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \tau_1 \dots \tau_k \\ \sigma_1 \dots \sigma_k \end{pmatrix} d\bar{t}_{j-h} d\bar{u}_h d\bar{v} d\bar{\theta}_{p-h} d\bar{s}_{n-l} d\bar{\sigma}_k d\bar{\tau}_k \\ A'_{k-h} &= A'_h \end{aligned} \right.$$

On démontre facilement qu'en posant

$$(18) \quad B_h^l = \int M \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_{k+h} \theta_1 \dots \theta_{p-h} \\ \tau_1 \dots \tau_{k+h} \theta_1 \dots \theta_{p-h} \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} t_1 \dots t_l \tau_{k+1} \dots \tau_{k+h} s_1 \dots s_{n-l-h} \\ \sigma_1 \dots \sigma_l \sigma_{k+1} \dots \sigma_{k+h} s_1 \dots s_{n-l-h} \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \tau_1 \dots \tau_l \tau_{l+1} \dots \tau_k \\ t_1 \dots t_l \sigma_{l+1} \dots \sigma_k \end{pmatrix} d\bar{t}_l d\bar{s}_{n-l-h} d\bar{\theta}_{p-h} d\bar{\sigma}_{k+h} d\bar{\tau}_{k+h}$$

on a

$$(19) \quad A'_h = C_p^h C_k^{l-h} B_h^{l-h}, \quad A'_{k-h} = C_k^h C_p^{l-k+h} B_{l+h-k}^{k-h}$$

de sorte que J devient :

$$J = \sum_{l=0}^{l=k-l} (-1)^l C'_n (C_k^l B_0^l + C_p^1 C_k^{l-1} B_1^{l-1} + \dots + C_p^l C_k^0 B_l^0) + \sum_{l=k}^{l=k+p} (-1)^l C'_n (C_p^{l-k} B_{l-k}^k + C_k^1 C_p^{l-k+1} B_{l-k+1}^{k-1} + \dots + C_k^{p+k-l} C_p^p B_p^{l-p})$$

On peut encore écrire cette expression sous la forme

$$(20) \quad J = \sum_{h=0}^{h=p} (-1)^h C_p^h \sum_{j=0}^{j=k} (-1)^j C_n^{h+j} C_k^j B_h^j$$

D'après la formule (18) on a :

$$\sum_{j=0}^{j=k} (-1)^j C_n^{h+j} C_k^j B_h^j = \int M \left(\begin{matrix} \sigma_1 \dots \sigma_{k+h} & \theta_1 \dots \theta_{p-h} \\ \tau_1 \dots \tau_{k+h} & \theta_1 \dots \theta_{p-h} \end{matrix} \right) d\bar{\sigma}_{k+h} d\bar{\tau}_{k+h} d\bar{\theta}_{p-h} \left[\sum_{j=0}^{j=k} (-1)^j C_k^j C_n^{h+j} \int N \left(\begin{matrix} \tau_1 \dots \tau_j & \tau_{j+1} \dots \tau_k \\ t_1 \dots t_j & \sigma_{j+1} \dots \sigma_k \end{matrix} \right) N \left(\begin{matrix} t_1 \dots t_j & \tau_{k+1} \dots \tau_{k+h} & s_1 \dots s_{n-h} \\ \sigma_1 \dots \sigma_j & \sigma_{k+1} \dots \sigma_{k+h} & s_1 \dots s_{n-h-j} \end{matrix} \right) d\bar{t}_j d\bar{s}_{n-h-j} \right]$$

D'après la formule (15) le second membre de cette formule est égal à

$$\frac{C_n^h}{C_{k+h}^h} \int M \left(\begin{matrix} \sigma_1 \dots \sigma_{k+h} & \theta_1 \dots \theta_{p-h} \\ \tau_1 \dots \tau_{k+h} & \theta_1 \dots \theta_{p-h} \end{matrix} \right) N \left(\begin{matrix} \tau_1 \dots \tau_{k+h} & s_1 \dots s_{n-h} \\ \sigma_1 \dots \sigma_{k+h} & s_1 \dots s_{n-h} \end{matrix} \right) d\bar{\theta}_{p-h} d\bar{s}_{n-h}$$

En remplaçant ceci dans la formule (20) et tenant compte de (16) nous avons :

$$(21) \quad \int \left[N \left(\begin{matrix} s_1 \dots s_n \\ s_1 \dots s_n \end{matrix} \right) M \left(\begin{matrix} \sigma_1 \dots \sigma_k & \theta_1 \dots \theta_p \\ \tau_1 \dots \tau_k & \theta_1 \dots \theta_p \end{matrix} \right) N \left(\begin{matrix} \tau_1 \dots \tau \\ \sigma_1 \dots \sigma_k \end{matrix} \right) d\bar{s}_n d\bar{\theta}_p d\bar{\sigma}_k d\bar{\tau}_k \right. \\ \left. = \sum_{h=0}^{h=p} (-1)^h \frac{C_n C_p^h}{C_{k+h}^h} \int M \left(\begin{matrix} \sigma_1 \dots \sigma_{k+h} & \theta_1 \dots \theta_{p-h} \\ \tau_1 \dots \tau_{k+h} & \theta_1 \dots \theta_{p-h} \end{matrix} \right) N \left(\begin{matrix} \tau_1 \dots \tau_{k+h} & s_1 \dots s_{n-h} \\ \sigma_1 \dots \sigma_{k+h} & s_1 \dots s_{n-h} \end{matrix} \right) d\bar{\theta}_{p-h} d\bar{s}_{n-h} d\bar{\sigma}_{k+h} d\bar{\tau}_{k+h} \right]$$

Cette dernière formule est la seule dont nous aurons besoin dans la suite.

CHAPITRE II.

Démonstration de la formule (II).

8. Considérons le noyau

$$(I) \quad P(xy) = \lambda M(xy) + \mu N(xy) + \lambda \mu \int M(xt) N(ty) dt$$

et calculons :

$$(22) \quad D_P(1) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \int P \left(\begin{matrix} s_1 \dots s_p \\ s_1 \dots s_p \end{matrix} \right) ds_1 \dots ds_p .$$

Pour abrégier l'écriture posons

$$(23) \quad \begin{aligned} L(xy) &= \lambda M(xy) + \mu N(xy) \\ K(xy) &= \int M(xt) N(ty) dt. \end{aligned}$$

$$P \begin{pmatrix} s_1 \dots s_p \\ s_1 \dots s_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} L(s_1 s_1) + \lambda \mu K(s_1 s_1) & \dots & L(s_1 s_p) + \lambda \mu K(s_1 s_p) \\ \vdots & & \vdots \\ L(s_p s_1) + \lambda \mu K(s_p s_1) & \dots & L(s_p s_p) + \lambda \mu K(s_p s_p) \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant suivant les puissances de $\lambda \mu$ on a :

$$(24) \quad \int P \begin{pmatrix} s_1 \dots s_p \\ s_1 \dots s_p \end{pmatrix} d\bar{s}_p = a_{p0} + \lambda \mu a_{p1} + (\lambda \mu)^2 a_{p2} + \dots + (\lambda \mu)^p a_{pp},$$

où la valeur du coefficient a_{pk} est

$$(25) \quad a_{pk} = C_p^k \int \left[L \begin{pmatrix} s_1 \dots s_{p-k} \\ s_1 \dots s_{p-k} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_k \\ \tau_1 \dots \tau_k \end{pmatrix} \right] N(\tau_1 \sigma_1) \dots N(\tau_k \sigma_k) d\bar{s}_{p-k} d\bar{\sigma}_k d\bar{\tau}_k$$

Pour la démonstration de la formule (24) je renvoie à un Mémoire de M. GOURSAT (1).

De la même manière on démontre que

$$\begin{aligned} & \int \left[L \begin{pmatrix} s_1 \dots s_r \\ s_1 \dots s_r \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_k \\ \tau_1 \dots \tau_k \end{pmatrix} \right] d\bar{s}_r \\ &= \sum_{h=0}^{h=r} C_r^h \lambda^{r-h} \mu^h \int \left[N \begin{pmatrix} \theta_1 \dots \theta_h \\ \theta_1 \dots \theta_h \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} s_1 \dots s_{r-h} \sigma \dots \sigma_k \\ s_1 \dots s_{r-h} \tau \dots \tau_k \end{pmatrix} \right] d\bar{\theta}_h d\bar{s}_{r-h} \end{aligned}$$

de sorte que

$$a_{pk} = \sum_{h=0}^{h=p-k} C_p^k C_{p-k}^h \lambda^{p-k-h} \mu^h Q_{pk}^h$$

en posant

$$(26) \quad Q_{pk}^h = \int \left[N \begin{pmatrix} \theta_1 \dots \theta_h \\ \theta_1 \dots \theta_h \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} s_1 \dots s_{p-k-h} \sigma_1 \dots \sigma_k \\ s_1 \dots s_{p-k-h} \tau_1 \dots \tau_k \end{pmatrix} \right] N(\tau_1 \sigma_1) \dots N(\sigma_k \tau_k) d\bar{\theta}_h d\bar{s}_{p-k-h} d\bar{\sigma}_k d\bar{\tau}_k$$

On peut encore écrire

$$(27) \quad a_{pk} = C_k^p \cdot b_{pk}$$

en posant

$$(28) \quad b_{pk} = \sum_{h=0}^{h=p-k} C_{p-k}^h \lambda^{p-k-h} \mu^h Q_{pk}^h$$

(1) M. E. GOURSAT, *Annales de la Faculté de Toulouse* 2^e série tome X, 1908, page 26-32.

Remarquons que a_{pk} est un polynome en λ et μ homogène et de degré $p-k$.

9. La formule (22)

$$D_P(1) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} [a_{p0} + (\lambda\mu) a_{p1} + \dots + (\lambda\mu)^p a_{pp}],$$

où on remplace a_{pk} par la formule (27) deviendra

$$D_P(1) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} (b_{p0} + C_p^1(\lambda\mu) b_{p1} + \dots + C_p^p(\lambda\mu)^p b_{pp})$$

Ordonnons suivant les puissances croissantes de λ et μ .
Nous aurons :

$$(29) \quad D_P(1) = 1 + \frac{1}{1!} b_{10} + \frac{1}{2!} [b_{20} + 2(\lambda\mu) b_{11}] \\ + \frac{1}{3!} [b_{30} + 3 C_2^1(\lambda\mu) b_{21}] \\ + \frac{1}{4!} [b_{40} + 4 C_3^1(\lambda\mu) b_{31} + 4 \cdot 3 (\lambda\mu)^2 b_{22}] \\ + \dots \\ + \frac{1}{p!} C_p + \dots$$

$$(30) \quad C_p = b_{p0} + p C_{p-1}^1(\lambda\mu) b_{p-1,1} + p(p-1) C_{p-2}^2(\lambda\mu)^2 b_{p-2,2} + \dots$$

Si $p=2q$, cette formule se termine par

$$2q(2q-1) \dots (q+1) C_q^q(\lambda\mu)^q b_{q,q}$$

et si $p=2q+1$, cette formule se termine par

$$(2q+1) 2q \dots (q+2) C_{q+1}^q(\lambda\mu)^q b_{q+1,q}$$

Remarquons que C_p est un polynome en λ et μ homogène et de degré p . Nous pouvons donc poser

$$C_p = C_{p0} \lambda^p + C_{p1} \lambda^{p-1} \mu + \dots + C_{ph} \lambda^{p-h} \mu^h + \dots + C_{pp} \mu^p.$$

Il s'agit de calculer C_{ph} .

10. D'après les formules (28) et (30) on a :

$$(31) \quad C_{ph} = C_p^h Q_{p0}^h + p C_{p-1}^1 C_{p-2}^{h-1} Q_{p-1,1}^{h-1} \\ + p(p-1) C_{p-2}^2 C_{p-4}^{h-2} Q_{p-2,2}^{h-2} + \dots$$

Revenons à la formule (26) et permutons les indices $\tau_1 \dots \tau_k$ de toutes les manières possibles.

On aura :

$$Q_{p,k}^h = \frac{1}{k!} R_{p,k}^h$$

où on a posé

$$(32) \quad R_{p,k}^h = \int \left[N \left(\begin{matrix} \theta_1 \dots \theta_h \\ \theta_1 \dots \theta_h \end{matrix} \right) M \left(\begin{matrix} s_1 \dots s_{p-k-h} & \sigma_1 \dots \sigma_k \\ s_1 \dots s_{p-k-h} & \tau_1 \dots \tau_k \end{matrix} \right) N \left(\begin{matrix} \tau_1 \dots \tau_k \\ \sigma_1 \dots \sigma_k \end{matrix} \right) d\bar{\theta}_h d\bar{s}_{p-k-h} d\bar{\sigma}_k d\bar{\tau}_k \right]$$

Alors la formule (31) deviendra

$$(33) \quad C_{ph} = C_p^h R_{p,0}^h + C_p^1 C_{p-1}^1 C_{p-2}^{h-1} R_{p-1,1}^{h-1} \\ + C_p^2 C_{p-2}^2 C_{p-4}^{h-2} R_{p-2,2}^{h-2} \\ + C_p^3 C_{p-3}^3 C_{p-6}^{h-3} R_{p-3,3}^{h-3} \\ + \dots$$

Mais d'après la formule (21) on a :

$$R_{p,k}^h = \sum_{j=0}^{j=p-k-h} (-1)^j \frac{C_h^j C_{p-k-h}^j}{C_{k+j}^j} \int M \left(\begin{matrix} \sigma_1 \dots \sigma_{k+j} & \theta_1 \dots \theta_{p-k-h-j} \\ \tau_1 \dots \tau_{k+j} & \theta_1 \dots \theta_{p-k-h-j} \end{matrix} \right) \\ N \left(\begin{matrix} \tau_1 \dots \tau_{k+j} & s_1 \dots s_{h-j} \\ \sigma_1 \dots \sigma_{k+j} & s_1 \dots s_{h-j} \end{matrix} \right) d\bar{\theta}_{p-k-h-j} d\bar{s}_{h-j} d\bar{\sigma}_{k+j} d\bar{\tau}_{k+j}$$

Dans cette formule changeons p en $p-k$ et h en $h-k$, on aura :

$$(34) \quad R_{p-k,k}^{h-k} = \sum_{j=k}^{j=p-h} (-1)^{k+j} \frac{C_{h-k}^{j-k} C_{p-k-h}^{j-k}}{C_j^{j-k}} R_j$$

où on a posé

$$(35) \quad R_j = \int M \left(\begin{matrix} \sigma_1 \dots \sigma_j & \theta_1 \dots \theta_{p-h-j} \\ \tau_1 \dots \tau_j & \theta_1 \dots \theta_{p-h-j} \end{matrix} \right) N \left(\begin{matrix} \tau_1 \dots \tau_j & s_1 \dots s_{h-j} \\ \sigma_1 \dots \sigma_j & s_1 \dots s_{h-j} \end{matrix} \right) d\bar{\theta}_{p-h-j} d\bar{s}_{h-j} d\bar{\sigma}_j d\bar{\tau}_j$$

Si dans la formule (33) on remplace les $R_{p-k,k}^{h-k}$ par les formules (34), en faisant les calculs, on trouve

$$C_{ph} = C_p^h R_0$$

c'est-à-dire d'après (35)

$$C_{ph} = C_p^h \int M \left(\begin{matrix} \theta_1 \dots \theta_{p-h} \\ \theta_1 \dots \theta_{p-h} \end{matrix} \right) d\bar{\theta}_{p-h} \int N \left(\begin{matrix} s_1 \dots s_h \\ s_1 \dots s_h \end{matrix} \right) d\bar{s}_h$$

Si nous revenons à la formule (29) nous en déduisons que le coefficient de $\lambda^{p-h} \mu$ dans le développement de $D_p(1)$ suivant les puissances de λ et μ est

$$(36) \quad \frac{1}{h!(p-h)!} \int M \begin{pmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_{p-h} \\ \theta_1 & \dots & \theta_{p-h} \end{pmatrix} d\bar{\theta}_{p-h} \int N \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s \\ s_1 & \dots & s \end{pmatrix} d\bar{s}$$

D'autre part en multipliant les deux séries

$$D_M(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda^p}{p!} \int N \begin{pmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_p \\ \theta_1 & \dots & \theta_p \end{pmatrix} d\bar{\theta}_p$$

$$D_N(\mu) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu^p}{p!} \int N \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_p \\ s_1 & \dots & s_p \end{pmatrix} d\bar{s}_p$$

nous remarquons que le coefficient de $\lambda^{p-h} \mu^h$ est encore (36). Donc on a identiquement

$$D(1) = D_M(\lambda) \cdot D_N(\mu).$$

La démonstration de la formule (II) est ainsi faite.

TABLE DES MATIÈRES

Partie administrative.

	Pages
LISTA MEMBRILOR la data de 1 Ianuarie 1926	I.

PREMIÈRE PARTIE

(Sciences mathématiques, physiques et chimiques).

Mathématiques.

ANGHELUTA (Th.) Intégration d'une classe d'équations linéaires aux différences finies.	94
IONESCU (D. V.) Sur la fonction caractéristique d'un noyau.	401
MANDELBROJT (S.) Quelques suppléments aux théorèmes sur les singularités des séries de Taylor.	398
NICOLESCU (M.) Sur une classe de séries dont le cercle de convergence est une ligne singulière essentielle.	82
SERGESCU (P.) Remarque sur le mouvement d'une particule électrisée soumise à l'action d'un point électrique et d'un pôle magnétique confondus.	175
— Sur les polygones d'aire maximum inscrits dans l'ellipse.	193

Physique.

LUPAN (V.) Le minimum d'énergie cinétique d'un corps en mouvement.	85
----------------------------------------------------------------------------	----

Chimie.

IONESCU (M. V.) Sur le caractère additif des systèmes conjugués hétérogènes asymétriques.	18
— Sur une étrange réaction de substitution.	54
— Sur une étrange réaction de substitution (II ^{ème} note)	210
— Sur une étrange réaction de substitution (III ^{ème} note)	230
— Sur les systèmes conjugués. Facteurs perturbateurs du champ de valence (III ^{ème} note)	353

	Pages
IONESCU (M. V.) Contribution à l'étude des relations entre la constitution moléculaire et la couleur (III ^e note)	373
— Sur les systèmes conjugués. Facteurs perturbateurs du champ de valence (IV ^e note)	381
IONESCU (M. V.) et SECĂREANU (ȘT.) Facteurs perturbateurs du champ de valence. Action des substances à méthylène actif sur les carbindogénides.	112
IONESCU (M. V.) et SECĂREANU (ȘT.) Facteurs perturbateurs du champ de valence. Action des substances à méthylène actif sur les carbindogénides (II ^e note).	250
RĂDULESCU (D.) Sur la couleur des spiranes (XVI ^e note sur les spiranes).	129
— Quelques remarques critiques sur la stabilité des spiranes (XVII ^e note sur les spiranes).	142
— et GEORGESCU (V.) Sur la stabilité des spiranes (XVIII ^e note sur les spiranes).	150
RIPAN (R.) Une nouvelle méthode microchimique pour séparer le zinc du cuivre.	45
— Contribution à l'étude de l'influence exercée par le volume des anions sur le nombre des molécules de bases fixées par le cation (III ^e note).	60
— Étude sur les cyanates métalliques. Les ammines des cyanates simples avec la pyridine (I ^e note).	176
— Une nouvelle réaction très sensible pour différencier l'acide phtalique de l'acide téréphtalique.	308
— Étude sur les cyanates métalliques. Étude sur l'aluminium: Une nouvelle réaction, plusieurs séparations, et une nouvelle méthode gravimétrique pour le dosage de cet élément (II ^e note).	311
SPACU (G.) Contribution à l'étude de la constitution des sels doubles. Les ammines des sels doubles.	1
— Deux nouvelles réactions très sensibles pour le cuivre.	16
— Une nouvelle méthode gravimétrique pour séparer le cuivre du mercure.	170
— Une nouvelle méthode gravimétrique pour séparer le fer du mercure.	394
— Contribution à la structure de la benzidine. Benzidinammines (2 ^e note).	258
SPACU (G.) et CATON (L.) Sur les ammines des sels doubles (XII ^e note).	105

TABLE DES MATIÈRES

199

	Pages
SPACU (G.) et CREANGA (C). Sur les ammines des sels doubles (XIII ^e note).	160
SPACU (G.) et DICK (J.) Analyse des eaux des lacs „Ursul et Negru“ de Sovata.	200
SPACU (G.) et DICK (J.) Analyse de l'eau provenant de la source „Balint“ des bains Felix.	241
SPACU (G.) et DICK (J.) Une nouvelle méthode pour le dosage du cobalt.	415
SPACU (G.) et DICK (J.) Une méthode rapide pour la détermination du nickel.	420
SPACU (G.) et VOICU (O.) Une nouvelle méthode pour le dosage de l'aniline dans une solution aqueuse.	49
SPACU (G.) et VOICU (O.) Contributions à l'étude de la constitution des sels doubles. Les ammines doubles de la classe des iodures (XIV ^e note).	321
STANCIU (V.) et VOICU (O.) Sur les formes cristallines et les propriétés cristallographiques et minéralogiques du sel double $Zn I_2 \cdot JK \cdot 2 H_2O$ (Jodozincate de potassium hydraté).	244
THOMAS (P.) et MAFTEI (E.) Réactions colorées des sucres en présence de tryptophane.	41

DEUXIÈME PARTIE.

(Sciences naturelles).

Zoologie.

CHAPPUIS (P A) <i>Parabathynella stygia</i> n. g., n. sp., nouveau Crustacé cavernicole de la Serbie orientale	7
FAGE (L.) Sur un <i>Niphargus</i> des eaux souterraines de Bulgarie . .	1
JEANNEL (R.) Les <i>Duvalius</i> oculés des Carpathes et des massifs de refuge des Alpes méridionales	11
— Nouveaux <i>Duvalius</i> de Roumanie	23
— Nouveaux <i>Duvalius</i> de Transylvanie	25
— Le genre <i>Anophtalmus</i> Sturm (note préliminaire) . . .	29
OROSZ (A) Contribuțiuni noi asupra repartiției cătelului de pământ (<i>Spalax typhlus</i> Pall.) în Ardeal (avec un résumé en français)	65
RACOVITZA (E. G.) Observations sur la glacière naturelle dite „Ghețarul de la Scărișoara“	75

	Pages
SCRIBAN (I. A.) Sur la morphologie des noyaux de l'épithélium digestif chez <i>Misgurnus fossilis</i>	145
— Observations sur la structure du tube digestif des Cobitidés	148

Botanique.

BORZA (Al.) O călătorie de studii botanice în America de Nord	109
-------------------------------------------------------------------------	-----

Physiologie.

POPOVICIU (G.) Studien über den Wirkungsmechanismus des Physostygmins	161
---------------------------------------------------------------------------------	-----

Préhistoire.

ROSKA (M.) Le paléolithique inférieur de Transylvanie	67
— Le solutréen en Transylvanie	193

GENRES ET ESPÈCES nouvellement décrits dans ce volume.

ZOOLOGIE.

Syncarida.

- Parabathynella* nov. gen. Chappuis (1926), p. 7.
Parabathynella stygia Chappuis (1926) p. 7.

Amphipoda.

- Nyphargus Plateaui* subsp. *Bureschi* Fage (1925) p. 1.

Coleoptera.

- Anophtalmus ajdovskanus Müllereri* Jeannel (1927), p. 54.
 — *Gobanzi obirensis* Jeannel (1927), p. 36.
 — *Schaumi leptonotus* Jeannel (1927), p. 42.
 — *Schaumi macromelus* Jeannel (1927), p. 42.
 — *Schaumi orientalis* Jeannel (1927), p. 42.
 — *Winklerianus* Jeannel (1927), p. 45.
Duvalius baldensis pavionis Jeannel (1926), p. 21.

- Duvalius *Boldorii* Jeannel (1926) p. 17.
 — *Mallaszi Chappuisi* Jeannel (1926) p. 26.
 — *Rothi* Jeannel (1926) p. 25.
 — *Roubali* Jeannel (1926) p. 14.
 — *ruthenus trisetifer* Jeannel (1926), p. 23.
 — *saetosus amblygonus* Jeannel (1926) p. 27.
 — *subterraneus sobrinus* Jeannel (1926) p. 24.
 — *Wingelmülleri adamellensis* Jeannel (1926) p. 20.
 — *Wingelmülleri judicariae* Jeannel (1926) p. 20.
 — *Winklerianus* Jeannel (1926), p. 18.
 — *Winklerianus brescianus* Jeannel (1926), p. 19.

**DATES D'APPARITION DES FASCICULES COMPOSANT
 CE VOLUME.**

Le fasc. 1	$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{re}} \text{ partie, p. 1-128} \\ 2^{\text{e}} \text{ partie, p. 1-24} \end{array} \right\}$	} a paru le 31 mars 1926.
Le fasc. 2-3		
Le fasc. 4	$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{re}} \text{ partie, p. 129-352} \\ 2^{\text{e}} \text{ partie, p. 25-108} \end{array} \right\}$	} a paru le 15 avril 1927.
	$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{re}} \text{ partie, p. 352-424} \\ 2^{\text{e}} \text{ partie, p. 109-196} \end{array} \right\}$	} a paru le 30 novembre 1927.

CORRIGENDA.

- Seite 168 Zeile 11 lautet: das frisch präparierte Herz. In dieser Beziehung bestätigen usw.
 Seite 172 Zeile 4 von unten, statt 18 15
 Seite 172 Zeile 2 von unten, statt 33 16
 Seite 174 Zeile 13 von oben, statt 0 01 0,05
 Seite 174 Zeile 18 von oben, statt 1 prozentiges . . . 0,5 prozentiges
 Seite 177 Zeile 10 von oben, statt 1, 2, 3, 5 1, 2, 3, 4, 5
 Seite 177 Zeile 16 von oben, statt 0,02 cm³ Ringer Ringer
 Seite 178 Zeile 22 von oben, statt 20 19-22
 Seite 184 Zeile 3 von unten, statt idem 0,10 cm³ . . . + 0,10 cm³