SUR

UN THÉORÈME DE LORD KELVIN

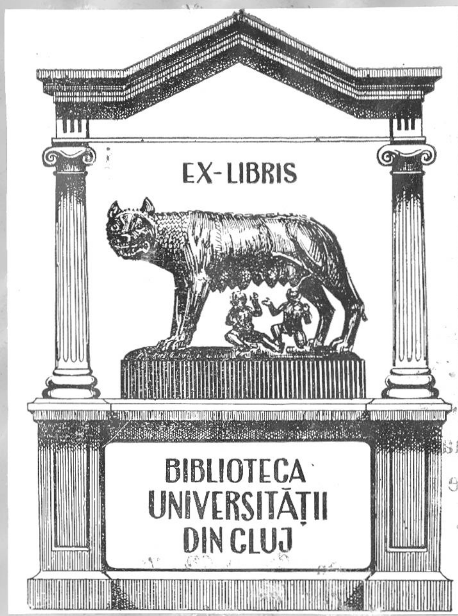
PAR

D.-V. JONESCO

(DEUXIÈME COMMUNICATION)

BRUXELLES
MAURICE LAMERTIN, LIBRAIRE-EDITEUR
58-62, Rue Coudenberg, 58-62

1928


EX-LIBRIS
BIBLIOTECA
UNIVERSITĂȚII
DIN CLUJ

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XIV, nos 10-11.
Séance du 13 octobre 1928, pp. 489-495.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — **Sur un Théorème de Lord Kelvin**

(*Deuxième communication*)

par D. V. JONESCO
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Cluj (Roumanie) (*).

Dans une note précédente (**), j'ai donné une généralisation du Théorème de Lord Kelvin, qui dit que si V (x, y, z)est une fonction harmonique, alors la fonction

$$\frac{1}{r} \mathrm{V}\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right),$$

où r est la distance du point x, y, z à l'origine, est également une fonction harmonique.

Dans cette note je vais poser un problème général qui conduit d'une façon remarquable à la généralisation que j'ai donnée dans ma première note.

Je me propose de déterminer $n+1$ *fonctions* $f, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *des variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *de façon qu'à toute intégrale de l'équation aux dérivées partielles*

$$\boxed{\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x_i \partial x_j} = 0,} \tag{1}$$

où a_{ij} *sont des constantes, on fasse correspondre une intégrale de l'équation associée*

$$\boxed{\sum_{i,j} \mathrm{A}_{ij} \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial x_i \partial x_j} = 0} \tag{2}$$

(*) Présentée par M. Th. De Donder.

(**) D.-V. JONESCO, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des Sciences, 5e sér., t. XIV, p. 475, 4 août 1928).

par la formule

$$\boxed{W = fV(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}\,. \tag{3}$$

Dans la formule (2), les constantes A_{ij} sont les mineurs des a_{ij} du déterminant $\| a_{ij} \|$, divisés par la valeur de ce déterminant.

1. Je vais chercher d'abord les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions f, ξ_1, ..., ξ_n, du problème précédent.

On a

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} V + \sum_h \frac{\partial V}{\partial \xi_h} \left\{ f \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \right\} \\ + f \sum_{h,k} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_h \partial \xi_k} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}. \end{aligned}\right\}$$

On doit donc avoir

$$\left.\begin{aligned} 0 = V \sum_{ij} A_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_h \frac{\partial V}{\partial \xi_h} \sum_{ij} A_{ij} \left\{ f \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \right\} \\ + f \sum_{h,k} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_h \partial \xi_k} \sum_{ij} A_{ij} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

pour toute intégrale de l'équation (1).

On a une intégrale évidente $V = 1$, qui conduit immédiatement à la condition

$$\boxed{\sum_{ij} A_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0} \tag{5}$$

qui exprime que f doit être une solution de l'équation associée (2).

On a aussi les n intégrales évidentes

$$V = x_h, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

qui conduisent aux conditions

$$\boxed{\sum_{i,j} \mathrm{A}_{ij} \left\{ f \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \right\} = 0} \cdot \tag{6}$$

Avec les conditions (5) et (6), la formule (4) se réduit à

$$\sum_{h,k} \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \xi_h \partial \xi_k} \sum_{ij} \mathrm{A}_{ij} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = 0,$$

qui doit avoir lieu en même temps que

$$\sum_{h,k} a_{hk} \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = 0.$$

On en conclut que l'on doit avoir

$$\boxed{\sum_{ij} \mathrm{A}_{ij} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \lambda a_{hk}} \tag{7}$$

λ pouvant être une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Les fonctions f, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *doivent donc satisfaire aux conditions* (5), (6) et (7).

2. Nous allons modifier légèrement les équations (6) et (7). Remarquons que

$$f \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 (f \xi_h)}{\partial x_i \partial x_j} - \xi_h \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

et tenant compte des équations (5), il en résulte qu'on peut écrire les équations (6) sous la forme

$$\boxed{\sum_{i,j} \mathrm{A}_{ij} \frac{\partial^2 (f \xi_h)}{\partial x_i \partial x_j} = 0.} \tag{8}$$

Ces conditions expriment que les $f\xi_h$ doivent aussi être solutions de l'équation associée (2).

Désignons maintenant par Φ_h le premier membre de l'équation (6). En faisant la combinaison

$$\xi_k \Phi_h + \xi_h \Phi_k,$$

nous avons

$$\sum_{i,j} \mathrm{A}_{ij} \left\{ f\left(\xi_k \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_i \partial x_j} + \xi_h \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial (\xi_h \xi_k)}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial (\xi_h \xi_k)}{\partial x_i} \right\} = 0.$$

Mais

$$\xi_k \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_i \partial x_j} + \xi_h \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 (\xi_h \xi_k)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_j} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i},$$

de sorte que l'équation précédente peut s'écrire

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i,j} \mathrm{A}_{ij} \left\{ f \frac{\partial^2 (\xi_h \xi_k)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial (\xi_h \xi_k)}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial (\xi_h \xi_k)}{\partial x_i} \right\} \\ = 2f \sum_{i,j} \mathrm{A}_{ij} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \end{aligned}\right\}$$

Remarquant maintenant que le premier membre de cette formule peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{i,j} \mathrm{A}_{ij} \frac{\partial^2 (f \xi_h \xi_k)}{\partial x_i \partial x_j},$$

et que le second membre est égal à

$$2f\lambda a_{hk},$$

nous pouvons remplacer les équations (7) par

$$\boxed{\sum_{i,j} \mathrm{A}_{ij} \frac{\partial^2 (f \xi_h \xi_k)}{\partial x_i \partial x_j} = \mu a_{hk}} \tag{9}$$

μ étant une fonction de x_1, x_2, ..., x_n (égale à $2f\lambda$).

3. Voici une solution du système d'équations (5), (7) et (8): On peut évidemment prendre

$$f = 1.$$

$$\xi_h = \sum_k a_{hk} x_k.$$

D'où le théorème suivant :

Si V $(x_1. x_2, \ldots, x_n)$ *est une intégrale de l'équation* (1), *en posant*

$$\xi_h = \sum_k a_{hk} x_k,$$

la fonction

$$W = V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

est une intégrale de l'équation associée (2).

4. Mais le système formé par les équations (5), (8) et (9) admet bien d'autres solutions. Celle que je vais mettre maintenant en évidence conduit d'une façon remarquable au Théorème de Lord Kelvin sous la forme que j'ai donnée dans ma note précédente.

Je pars de l'intégrale

$$\boxed{f = y^{-\frac{n-2}{2}}} \tag{10}$$

de l'équation de condition (5)

$$\sum_{i,j} A_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \tag{11}$$

intégrale dans laquelle on a posé

$$\boxed{y = \sum_{h,k} a_{hk} x_h x_k.}$$

Mais, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des constantes, en posant

$$Y = \sum_{h,k} a_{hk} (x_h - \alpha_h)(x_k - \alpha_k),$$

la fonction

$$F = Y^{-\frac{n-2}{2}}$$

sera encore une intégrale de l'équation (11). Il en résulte que les fonctions

$$F_h = \frac{\partial F}{\partial \alpha_h}$$

$$F_{hk} = \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_h \partial \alpha_k}$$

sont aussi des intégrales de l'équation (11).

On a

$$F_h = (n-2) Y^{-\frac{n}{2}} \sum_k a_{hk}(x_k - \alpha_k) \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} F_{hk} = n(n-2) Y^{-\frac{n+2}{2}} \sum_r a_{hr}(x_r - \alpha_r) \sum_s a_{ks}(x_s - \alpha_s) \\ -(n-2)\, a_{hk} Y^{-\frac{n}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Faisons maintenant dans les formules (12) et (13) $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Nous en déduisons que

$$f_h = y^{-\frac{n}{2}} \sum_k a_{hk} x_k,$$

et

$$f_{hk} = n y^{-\frac{n+2}{2}} \sum_r a_{hr} x_r \sum_s a_{ks} x_s - a_{hk} y^{-\frac{n}{2}}, \tag{14}$$

sont des intégrales de l'équation (11).

En écrivant

$$f_h = y^{-\frac{n-2}{2}} \frac{1}{y} \sum_k a_{hk} x_k = f \frac{\sum_k a_{hk} x_k}{y}$$

on voit, en se reportant à la condition (8), que l'on peut prendre

$$\boxed{\xi_h = \frac{1}{y} \sum_k a_{hk} x_k.} \tag{15}$$

Avec cette notation, on écrira f_{hk} sous la forme

$$\boxed{f_{hk} = nf\xi_h\xi_k - a_{hk}\,y^{-\frac{n}{2}}.} \tag{16}$$

Si l'on exprime maintenant que f_{hk} est une intégrale de l'équation (11), on aura

$$n\sum_{i,j} A_{ij}\frac{\partial^2(f\xi_h\xi_k)}{\partial x_i\partial x_j} = a_{hk}\sum_{ij} A_{ij}\frac{\partial^2\left(y^{-\frac{n}{2}}\right)}{\partial x_i\partial x_j}.$$

Mais

$$\sum_{i,j} A_{ij}\frac{\partial^2\left(y^{-\frac{n}{2}}\right)}{\partial x_i\partial x_j} = 2ny^{-\frac{n+2}{2}}$$

de sorte que l'équation précédente devient

$$\boxed{\sum_{i,j} A_{ij}\frac{\partial^2(f\xi_h\xi_k)}{\partial x_i\partial x_j} = 2y^{-\frac{n+2}{2}}a_{hk}.}$$

Or, cette équation n'est autre que l'équation (9) avec

$$\mu = 2y^{-\frac{n+2}{2}}.$$

Ainsi, nous avons démontré que les fonctions (10) et (15) satisfont aux équations de condition (5), (8) et (9).

En remplaçant dans la formule (3), f et ξ_h par les seconds membres des formules (10) et (15), nous obtenons la généralisation du Théorème de Lord Kelvin sous la forme donnée dans notre note précédente.

Marcel HAYEZ, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.