

QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS À UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

par M. D. V. JONESCO. Mt. A. S. R.

I. Dans ce travail je considère un système formé par deux équations aux dérivées partielles du second ordre de la forme suivante :

$$(I) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= F_1 \left(x, y; u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}; v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= F_2 \left(x, y; u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}; v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

où les fonctions inconnues sont $u(x,y)$, $v(x,y)$ et où les fonctions $F_i(x, y; u_1, u_2, u_3; v_1, v_2, v_3)$, ($i=1, 2$), sont continues et satisfont à la condition de Lipschitz,

$$(2) \quad |F_i(x, y; u_1, u_2, u_3; v_1, v_2, v_3) - F_i(x, y; u'_1, u'_2, u'_3; v'_1, v'_2, v'_3)| < \sum_{k=1}^3 [A_k |u_k - u'_k| + B_k |v_k - v'_k|]$$

lorsque

$$(3) \quad 0 < x < d, \quad 0 < y < d$$

et

$$(4) \quad \begin{aligned} 0 < |u_k| \quad \text{et} \quad |u'_k| < d' \\ 0 < |v_k| \quad \text{et} \quad |v'_k| < d' \end{aligned} \quad (k=1, 2, 3).$$

Dans les inégalités (2) on suppose que les A_k et les B_k sont des constantes.

Relativement aux équations (I) je vais traiter plusieurs problèmes.

Premier problème.

2. Déterminer les intégrales $u(x,y)$ et $v(x,y)$ des équations (I) qui satisfont aux conditions aux limites suivantes :

$$(5) \quad u(x, 0) = 0, \quad v(0, y) = 0$$

et

$$(6) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_C = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_C, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_C = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_C,$$

C étant un point quelconque de la bissectrice OL, de l'angle xy .

Géométriquement cela revient à déterminer les intégrales $u(x, y)$, $v(x, y)$ de façon que la surface intégrale $z=u(x, y)$, passe par l'axe Ox , que la surface intégrale $z=v(x, y)$ passe par l'axe Oy et que la courbe (L) intersection de ces deux surfaces, se projette sur le plan xoy suivant la bissectrice de l'angle xoy . En plus les deux surfaces doivent avoir le même plan tangent le long de la courbe (L).

3. Dans le cas particulier des équations

$$(7) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y) \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = g(x, y)$$

la solution du problème est donnée par les formules,

$$(8) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x \int_0^y f(s, t) ds dt + \int_0^y dt \int_0^t [g(s, t) - f(s, t)] ds \\ v(x, y) &= \int_0^x \int_0^y g(s, t) ds dt + \int_0^x ds \int_0^s [f(s, t) - g(s, t)] dt \end{aligned}$$

Si l'on suppose que dans le carré (R) défini par les inégalités (3) on a

$$|f(x, y)| \quad \text{et} \quad |g(x, y)| < H,$$

les formules (8) montrent que

$$\begin{aligned} |u(x, y)| &< H(xy + y^2) < 2Hd^2, \\ \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| &< Hy < Hd \quad ; \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| < H(x + 2y) < 3Hd \\ |v(x, y)| &< H(xy + x^2) < 2Hd^2 \\ \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| &< H(y + 2x) < 3Hd \quad ; \quad \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| < Hx < Hd. \end{aligned}$$

4. On peut passer maintenant aux équations (I) et résoudre notre problème par la méthode des approximations successives de M. E. Picard.

On va intégrer successivement les systèmes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} &= F_1(x, y; 0, 0, 0; 0, 0, 0) = f_0(x, y). \\ \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} &= F_2(x, y; 0, 0, 0; 0, 0, 0) = g_0(x, y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} = F_1 \left(x, y; u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}; v_{n-1}, \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial v_{n-1}}{\partial y} \right) = f_n(x, y).$$

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial y} = F_2 \left(x, y; u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}; v_{n-1}, \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial v_{n-1}}{\partial y} \right) = g_n(x, y)$$

(n=1, 2, ...)

avec les conditions aux limites (5) et (6).

Désignons par M un nombre supérieur aux valeurs absolues de $F_i(x, y; u_1, u_2, u_3; v_1, v_2, v_3)$, ($i=1, 2$), lorsque x et y satisfont aux conditions (3) et lorsque u_i et v_i satisfont aux conditions (4). Si ρ est le plus petit des nombres $d, \sqrt{\frac{d'}{2M}}, \frac{d'}{3M}$, on est assuré que lorsque

$$0 \leq x \leq \rho, \quad 0 \leq y \leq \rho$$

les fonctions $u_n, v_n, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_n}{\partial y}, \frac{\partial v_n}{\partial x}, \frac{\partial v_n}{\partial y}$ sont plus petites en valeur absolue que d' .

Il reste à prouver que les fonctions $u_n, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_n}{\partial y}, v_n, \frac{\partial v_n}{\partial x}, \frac{\partial v_n}{\partial y}$ ont des limites lorsque n croît indéfiniment. Pour cela il suffit de prouver la convergence uniforme des séries

$$u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots$$

$$v_0 + (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \dots$$

ainsi que celle des séries formées avec les dérivées partielles par rapport à x et à y des termes de ces séries.

On démontre sans difficulté en s'appuyant sur les inégalités (2) que si ρ satisfait à l'inégalité

$$\left[2(A_1 + B_1)\rho + A_2 + B_3 + 3(A_3 + B_2) \right] \rho < 1,$$

les séries précédentes sont uniformément convergentes.

Il est donc démontré que dans le carré limité par les droites $y=0, y=\rho, x=0, x=\rho$, il existe des intégrales $u(x, y), v(x, y)$ du système (1), satisfaisant aux conditions aux limites (5) et (6).

Deuxième problème.

5. Déterminer les intégrales $u(x, y)$ et $v(x, y)$ des équations (1) qui satisfont aux conditions aux limites suivantes

$$(9) \quad u(x, \alpha x) = 0, \quad v(\beta y, y) = 0$$

où $0 < \alpha < 1$; $0 < \beta < 1$, et

$$(10) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_C = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_C; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_C = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_C$$

C étant un point quelconque de la bissectrice de l'angle xoy .

Géométriquement cela revient à déterminer les intégrales $u(x, y)$, $v(x, y)$ de façon que la surface intégrale $z = u(x, y)$ passe par la droite OI ($y = \alpha x$), que la surface intégrale $z = v(x, y)$ passe par la droite OJ ($x = \beta y$), et que la courbe (L) intersection de ces deux surfaces se projette sur le plan xoy , suivant la bissectrice de l'angle xoy . En plus les deux surfaces doivent avoir le même plan tangent le long de la courbe (L).

6. Considérons d'abord le cas particulier des équations (7). Désignons par $\bar{u}(x, y)$ l'intégrale de la première équation (7) qui s'annule le long de OI et de OJ (problème de M. E. Goursat), et par $\bar{v}(x, y)$, l'intégrale de l'autre équation (7) qui s'annule également le long de OI et de OJ. On voit facilement que les conditions (9) sont satisfaites si l'on prend

$$(11) \quad \begin{aligned} u &= \bar{u} + \psi(y) - \phi(\alpha x) \\ v &= \bar{v} + \varphi(x) - \varphi(\beta y) \end{aligned}$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont des fonctions arbitraires. On peut supposer $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

En écrivant que les fonctions u et v satisfont aux conditions (10) nous avons pour déterminer les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$, les équations

$$\begin{aligned} \varphi'(x) + \alpha \psi'(\alpha x) &= \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)_{(x, x)} = m'(x) \\ \psi'(y) + \beta \varphi'(\beta y) &= \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{(y, y)} = n'(y). \end{aligned}$$

On intègre ces équations, en prenant les constantes d'intégration nulles, et on est conduit aux équations fonctionnelles

$$(12) \quad \begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(\gamma x) &= m(x) - n(\alpha x) \\ \psi(y) - \psi(\gamma y) &= n(y) - m(\beta y) \end{aligned}$$

où $\gamma = \alpha\beta < 1$, de M. E. Goursat.¹⁾

7. J'ai démontré²⁾ que les intégrales des équations (7) qui s'annulent le long de OI et de OJ, sont données par les formules

1. E. Goursat. *Annales de la Faculté de Toulouse*. 2-e série, tome VI, p. 117.
2. D. V. Jonesco. *Annales de la Faculté de Toulouse*, 3-e série, tome XIX, p. 74.

$$\bar{u}(x,y) = \int_{\beta y}^x ds \int_{\alpha x}^y [F(s,t) - \gamma F(\beta t, \alpha s)] dt$$

$$\bar{v}(x,y) = \int_{\beta y}^x ds \int_{\alpha x}^y [G(s,t) - \gamma G(\beta t, \alpha s)] dt$$

où $F(s,t)$ et $G(s,t)$ sont les séries

$$F(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^{2i} f(\gamma^i s, \gamma^i t)$$

$$G(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^{2i} g(\gamma^i s, \gamma^i t)$$

Il résulte alors que

$$m(x) = \int_0^x d\xi \int_{\alpha \xi}^{\xi} \left[(F(\xi, t) - \gamma F(\beta t, \alpha \xi)) - (G(\xi, t) - \gamma G(\beta t, \alpha \xi)) \right] dt$$

$$- \alpha \int_0^x d\xi \int_{\beta \xi}^{\xi} \left[(F(s, \alpha \xi) - \gamma F(\gamma \xi, \alpha s)) - (G(s, \alpha \xi) - \gamma G(\gamma \xi, \alpha s)) \right] ds$$

et

$$n(y) = \int_0^y d\eta \int_{\beta \eta}^{\eta} \left[(G(s, \eta) - \gamma G(\beta \eta, \alpha s)) - (F(s, \eta) - \gamma F(\beta \eta, \alpha s)) \right] ds$$

$$+ \beta \int_0^y d\eta \int_{\alpha \eta}^{\eta} \left[(F(\beta \eta, t) - \gamma F(\beta t, \gamma \eta)) - (G(\beta \eta, t) - \gamma G(\beta t, \gamma \eta)) \right] dt$$

Si l'on suppose que dans la région (R_1) limitée par les droites OI, OJ et $x=d$, $y=d$, les fonctions $f(x,y)$, $g(x,y)$ sont en valeur absolue plus petites qu'un nombre H, il résulte que

$$|F(s,t)| < \frac{H}{1-\gamma^2}, \quad |G(s,t)| < \frac{H}{1-\gamma^2}$$

et on trouve sans difficulté que

$$|m(x)| < H x^2, \quad |n(y)| < H y^2$$

et

$$|m'(x)| < 2Hx, \quad |n'(y)| < 2Hy.$$

8. Les équations (12) ont des solutions données par

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} [m(\gamma^i x) - n(\alpha \gamma^i x)]$$

$$\psi(y) = \sum_{i=0}^{\infty} [n(\gamma^i y) - m(\beta \gamma^i y)]$$

Ces fonctions ont aussi des dérivées, données par les formules

$$\varphi'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i [m'(\gamma^i x) - \alpha n'(\alpha \gamma^i x)]$$

$$\psi'(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i [n'(\gamma^i y) - \beta m'(\beta \gamma^i y)]$$

On démontre que dans la région (R₁) on a les inégalités

$$|\varphi(x)| < H \frac{1+\alpha^2}{1-\gamma^2} x^2, \quad |\psi(y)| < H \frac{1+\beta^2}{1-\gamma^2} y^2$$

$$|\varphi'(x)| < 2H \frac{1+\alpha^2}{1-\gamma^2} x, \quad |\psi'(y)| < 2H \frac{1+\beta^2}{1-\gamma^2} y.$$

9. La solution du second problème pour les équations (7) est donnée par les formules (II) et dans la région (R₁) on a les inégalités

$$|u(x, y)| < H \frac{(1+\gamma)(x-\beta y)(y-\alpha x) + (1+\beta^2)(y^2 + \alpha^2 x^2)}{1-\gamma^2}$$

$$|v(x, y)| < H \frac{(1+\gamma)(x-\beta y)(y-\alpha x) + (1+\alpha^2)(x^2 + \beta^2 y^2)}{1-\gamma^2}$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| < H \left(y + 2\alpha^2 \frac{1+\beta^2}{1-\gamma^2} x \right)$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| < H \left(x + 2 \frac{1+\beta^2}{1-\gamma^2} y \right)$$

$$\left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| < H \left(y + 2 \frac{1+\alpha^2}{1-\gamma^2} x \right)$$

$$\left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| < H \left(x + 2\beta^2 \frac{1+\alpha^2}{1-\gamma^2} y \right)$$

On peut maintenant, à l'aide de ces formules, faire la démonstration pour les équations (I), avec la méthode des approximations successives de M. É. P I C A R D, comme on a fait pour le premier problème (No. 4).

10. Dans un prochain travail, je vais reprendre les problèmes précédents, en remplaçant la bissectrice OI, par deux droites situées dans l'angle xoy , ou dans l'angle IOJ.