ACADÉMIE ROUMAINE

BULLETIN
DE LA SECTION SCIENTIFIQUE

PUBLIÉ PAR LES SOINS DES SÉCRÉTAIRES DE LA SECTION

MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROUMAINE

† ST. C. HEPITES
DE 1912 À 1919

GR. ANTIPA
DE 1919 À 1939

ET

TRAJAN SAVULESCO

TOME XXII-ème

No. 1

SOMMAIRE

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ. BUCUREŞTI, 1939

APPLICATIONS D'UNE FORMULE GÉNÉRALISÉE DE G. DARBOUX

PAR

D. V. IONESCO

Note présentée par M. D. Pompeiu M. A. R. dans la séance du 13 octobre 1939

1. Nous avons démontré [1]) dans une note précédente que si $\varphi(x)$ est un polynôme de degré $q \leq 2p+1$, on a la formule

$$(1) \qquad \int_{\lambda}^{\mu} \varphi(x)\,dx = (\mu-\lambda)\sum_{s=0}^{p} a_s\left[\varphi\left(\lambda + s\,\frac{\mu-\lambda}{2p}\right)+\varphi\left(\mu - s\,\frac{\mu-\lambda}{2p}\right)\right]$$

valable quelles que soient les constantes λ et μ, et où les constantes a_s sont données par le système d'équations linéaires

$$(2) \qquad \begin{aligned} a_p + a_{p-1} + \quad a_{p-2} + \quad a_{p-3} + \dots + \quad a_0 &= \frac{1}{2} \\ a_{p-1} + 2^2\, a_{p-2} + 3^2\, a_{p-3} + \dots + p^2\, a_0 &= \frac{p^2}{2.3} \\ a_{p-1} + 2^4\, a_{p-2} + 3^4\, a_{p-3} + \dots + p^4\, a_0 &= \frac{p^4}{2.5} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p-1} + 2^{2p}\, a_{p-2} + 3^{2p}\, a_{p-3} + \dots + p^{2p}\, a_0 &= \frac{p^2 p}{2(2p+1)} \end{aligned}$$

ou bien la formule

$$(3) \qquad \int_{\lambda}^{\mu} \varphi(x)\,dx = (\mu-\lambda)\sum_{s=0}^{p} a'_s\left[\varphi\left((\lambda + s\,\frac{\mu-\lambda}{2p+1}\right)+\varphi\left(\mu - s\,\frac{\mu-\lambda}{2p+1}\right)\right]$$

---

[1]) D. V. Ionesco, *Généralisation d'une équation fonctionnelle rencontrée par G. Darboux*. Bulletin de la Section Scientifique de 'Académie Roumaine. No. 3, 1939.

valable quelles que soient les constantes λ et μ et où les constantes a'_s sont données par le système d'équations linéaires

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
&a'_p + a'_{p-1} + a'_{p-2} + \dots + a'_0 = \frac{1}{2} \\
&a'_p + 3^2 a'_{p-1} + 5^2 a'_{p-2} + \dots + (2p+1)^2 a'_0 = \frac{(2p+1)^2}{2.3} \\
&a'_p + 3^4 a'_{p-1} + 5^4 a'_{p-2} + \dots + (2p+1)^4 a'_0 = \frac{(2p+1)^4}{2.5} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a'_p + 3^{2p} a'_{p-1} + 5^{2p} a'_{p-2} + \dots + (2p+1)^{2p} a' = \frac{(2p+1)^2}{2(2p+1)}.
\end{aligned}
$$

Dans cette note nous allons donner quelques applications de ces formules.

2. Sur le courbe $y = \varphi(x)$, où $\varphi(x)$ est un polynôme de degré $q \leq 2p + 1$, prenons les points M_i ayant pour abscisses $\lambda + i\dfrac{\mu - \lambda}{2p}$, $(i = 0, 1, \dots, 2p)$ et désignons par K_{2p+1} le barycentre des masses proportionnelles à a_i placées aux points M_i et M_{2p-i} $(i = 0, 1, \dots, p)$, les constantes a_i étant données par le système d'équations linéaires (2).

La formule (1) montre que *l'aire limitée par un arc* M_0M_{2p} *de la courbe* $y = \varphi(x)$, *par l'axe* Ox *et par les ordonnées des points* M_0 *et* M_{2p}, *est égale à l'aire du parallélogramme contruit sur les vecteurs* $\overrightarrow{M_0M_{2p}}$, $\overrightarrow{K_{2p+1}K''_{2p+1}}$ où K''_{2p+1} est la projection du barycentre K_{2p+1} sur l'axe Ox.

Cet énoncé étant vrai quelle que soit la position de l'axe Ox, par rapport à la courbe, généralise la formule bien connue *d'Archimède* [1]) pour l'aire d'un segment de parabole, qu'on obtient en prenant $p = 1$, et en passant l'axe Ox par les points M_0 et M_2.

On a un énoncé analogue en utilisant la formule (3), d'où résulte que si nous prenons sur la courbe $y = \varphi(x)$ aussi les points M'_i dont les abscisses sont $\lambda + i\dfrac{\mu - \lambda}{2p+1}$, $(i = 0, 1, \dots, 2p + 1)$, *le barycentre des masses* a_i *placées aux points* M_i *et* M_{2p-i} $(i = 0, 1, \dots, p)$ *coincide avec le barycentre des masses* a'_i *placées aux points* M'_i *et* M'_{2p+1-i}, $(i = 0, 1, \dots, p)$, les constantes a'_i étant données par le système d'équations linéaires (4).

3. Sur la courbe $y = \varphi(x)$ où $\varphi(x)$ est un polynôme de degré $2p + 1$, prenons les points M_i ayant pour abscisses $\lambda = i\dfrac{\mu - \lambda}{2p}$, $(i = 0, 1, \dots, 2p)$, et considérons la courbe représentée par l'équation $y = \varphi_1(x)$, où

---

[1]) E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*. Tome I, 1933, p. 163.

$\varphi_1(x)$ est un polynôme de degré $2p$, et qui passe par les points M_0, $M_1, \ldots, M_{2p}$. En désignant par S_i l'aire limitée par les deux arcs de courbe $M_{i-1}M_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 2p)$ nous avons

$$S_1 + S_3 + \ldots + S_{2p-1} = S_2 + S_4 + \ldots + S_{2p},$$

c'est-à-dire, *la somme des aires de rang impair est égale à la somme des aires de rang pair.*

4. Faisons une autre application de la formule (1) relative au centre de gravité de l'aire limitée par un arc de la courbe $y = \varphi(x)$, un arc de la courbe $y = \varphi_1(x)$ et deux parallèles à l'axe Oy, $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ étant des polynômes de degrés n et n_1.

Supposons que n et $n_1 \leq 2p$. Sur les deux courbes prenons les points M_i et N_i ayant pour abscisses $x_i = \lambda + i\dfrac{\mu - \lambda}{2p}$, $(i = 0, 1, \ldots, 2p)$ et posons

$$Y_i = \overline{N_iM_i} = \varphi(x_i) - \varphi_1(x_i)$$

Le centre de gravité de l'aire limitée par les arcs de courbe M_0M_{2p} et N_0N_{2p} ainsi que par les segments de droites N_0M_0 et $N_{2p}M_{2p}$ a la même abscisse que le barycentre des masses $a_i Y_i$ et $a_{p-i} Y_{p+i}$ placées aux points M_i et M_{p+i} $(i = 0, 1, \ldots, p)$.

On a un enoncé analogue en appliquant la formule (3).

En prenant sur les courbes précédentes aussi les points M'_i et N'_i ayant pour abscisses $x'_i = \lambda + i\dfrac{\mu - \lambda}{2p+1}$, $(i=0, 1, \ldots, 2p+1)$ et en posant

$$Y'_i = \overline{N'_iM'_i} = \varphi(x'_i) - \varphi_1(x'_i)$$

il résulte que *le barycentre des masses $a_i Y_i$ et $a_{p-i} Y_{p+i}$ placées aux points M_i et M_{p+i} $(i = 0, 1, \ldots, p)$ a la même abscisse que le barycentre des masses $a'_i Y'_i$ et $a'_{p-i} Y'_{p+i+1}$ placées aux points M'_i et M'_{p+i+1} $(i = 0, 1, \ldots, p)$.*

5. Considérons maintenant l'aire limitée par un arc de courbe $y = \varphi(x)$, où $\varphi(x)$ est un polynôme de degré n, l'axe Ox et deux parallèles à l'axe Oy.

Supposons que $2n < 2p + 1$, et prenons sur la courbe les points M_i ayant pour abscisses $x_i = \lambda + i\dfrac{\mu - \lambda}{2p}$, $(i = 0, 1, \ldots, 2p)$ et désignons par y_i leurs ordonnées. K étant le barycentre des masses $a_i y_i$ et $a_{p-i} y_{p+i}$ placées aux points M_i et M_{p+i} $(i = 0, 1, \ldots, p)$, et K'' sa projection sur Ox, *le centre de gravité G de l'aire limitée par l'arc de courbe M_0M_{2p}, l'axe Ox et les ordonnées des points M_0 et M_{2p} est au milieu de $K''K$.*

On a un énoncé analogue en appliquant la formule (3). En prenant sur la courbe précédente aussi les points M'_i ayant pour abscisses $x'_i = \lambda + i\dfrac{\mu - \lambda}{2p+1}$, $(i = 0, 1, \ldots, 2p + 1)$, et en désignant par y'_i leurs ordonnées, il résulte que *le barycentre des masses* $a_i y_i$ *et* $a_{p-i}\, y_{p+i}$ *placées aux points* M_i *et* M_{p+i} $(i = 0, 1, \ldots, p)$, *coincide avec le barycentre des masses* $\alpha'_i\, y'_i$ *et* $\alpha'_{p-i}\, y'_{p+i+1}$ *placées aux points* M'_i *et* M'_{p+i+1} $(i = 0, 1, \ldots, p)$.

6. Ces résultats ont été généralisés, en supposant les aires précédentes non homogènes la densité en chaque point (x, y) étant de la forme $\varrho = Q(x).\ R(y)$, où $Q(x)$ et $R(y)$ sont des polynômes en x et en y.

7. Nous faisons encore une application en considérant les moments d'inertie d'une aire homogène limitée par les droites $x = \lambda$, $x = \mu$, l'axe Ox et la courbe représentée par l'équation $y = \varphi(x)$, où $\varphi(x)$ est un polynôme de degré n. Sur la courbe prenons les points M_i ayant pour abscisses $x_i = \lambda + i\dfrac{\mu - \lambda}{2p}$ $(i = 0, 1, \ldots, 2p)$ et désignons par y_i leurs ordonnées.

a) Supposons d'abord que $n + 1 \leq 2p$. Dans ce cas nous avons le théorème suivant: *le rayon de gyration de l'aire comprise entre l'arc de courbe* $M_0 M_{2p}$, *l'axe* Ox *et les ordonnées des points* M_0 *et* M_{2p}, *par rapport à l'axe* Oy, *est égal au rayon de gyration d'un système matériel fictif formé par les masses* $a_i y_i$ *et* $a_{p-i}\, y_{p+i}$ *placées aux points* M_i *et* M_{p+i} $(i = 0, 1, \ldots, p)$, *par rapport à l'axe* Oy.

b) Supposons ensuite que $3n \leq 2p + 1$. Dans ce cas, *le rayon de gyration de la même aire par rapport à l'axe* Ox, *est égal à* $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\, \varrho' y$, *où* $\varrho' y$ *est le rayon de gyration d'un système matériel fictif formé par les masses* $a_i y_i$ *et* $a_{p-i}\, y_{p+i}$ *placées aux points* M_i *et* M_{p+i} $(i = 0, 1, \ldots, p)$, *par rapport à l'axe* Ox.

c) Enfin si $n \leq p$, *le produit d'inertie* $\Sigma\, mxy$ *de l'aire précédente divisé par la masse de cette aire, est égal à* $\frac{1}{2}\, a$, *où* a *est la produit d'intertie* $\Sigma\, mxy$ *du système matériel fictif formé par les masses* $a_i\, y_i$ *et* $a_{p-i}\, y_{p-i}$ *placées aux points* M_i *et* M_{p+i} $(i = 0, 1, \ldots, p)$ *divisé par la masse de ce système.*

d) On a des théorèmes analogues en appliquant le formule (3).