ACADÉMIE ROUMAINE

BULLETIN
DE LA SECTION SCIENTIFIQUE

PUBLIÉ PAR LES SOINS DES SÉCRÉTAIRES DE LA SECTION

MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROUMAINE

† ST. C. HEPITES DE 1912 À 1919

GR. ANTIPA DE 1919 À 1939

ET

TRAJAN SAVULESCO

TOME XXII-ème

No. 1

SOMMAIRE

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ, BUCUREŞTI, 1939

GÉNÉRALISATION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE RENCONTRÉE PAR G. DARBOUX

PAR

D. V. IONESCO

Note présentée par M. D. Pompeiu M. A. R. dans la séance du 13 octobre 1939

1. G. Darboux[1]) a montré que si dans la formule

$$\int_0^h (a + bx + cx^2)dx = ah + b\,\frac{h^2}{2} + c\,\frac{h^3}{3}\,,$$

on remplace dans le second membre les constantes a, b, c à l'aide des valeurs $\varphi(o)$, $\varphi\left(\frac{h}{2}\right)$, $\varphi(h)$ que prend le polynôme du second degré

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2,$$

pour $x = o$, $x = \frac{h}{2}$, $x = h$, on obtient l'identité

$$\int_0^h \varphi\,(x)dx = \frac{h}{6}\left[(\varphi(o) + 4\,\varphi\left(\frac{h}{2}\right) + \varphi(h)\right]$$

qui est vérifiée aussi *par le polynôme du troisième degré.*

Il est facile de voir qu'on a aussi la formule

$$\int_\lambda^\mu \varphi(x)dx = \frac{\mu - \lambda}{6}\left[\varphi(\lambda) + 4\,\varphi\left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right) + \varphi(\mu)\right] \tag{1}$$

qui est valable quelles que soient les constantes λ et μ.

Dans cette note nous allons donner des formules analogues à l'identité (1), en suivant la méthode précédente, mais en partant d'un polynôme de degré quelconque.

Nous allons généraliser aussi le théorème de *G. Darboux* et démontrer que l'identité formée en partant d'un polynôme quelconque de degré $2p$, est satisfaite également par un polynôme quelconque de degré $2p + 1$.

---

[1]) G. Darboux, *Sur le centre de gravité de certains volumes.* Note publiée dans le cours de Mécanique de Despeyrons, p. 383.

2. Lorsque le degré du polynôme $\varphi(x)$ est $x = 2p$, nous avons démontré la formule

$$(2)\qquad \int_\lambda^\mu \varphi(x)\,dx = (\mu - \lambda)\sum_{s=0}^{p} a_s\left[\varphi\left(\lambda + s\frac{\mu-\lambda}{2p}\right) + \varphi\left(\mu - s\frac{\mu-\lambda}{2p}\right)\right],$$

valable quelles que soient les constantes λ et μ, les constantes a_s étant données par le système d'équations linéaires

$$(3)\qquad \begin{aligned}
&a_p + a_{p-1} + a_{p-2} + a_{p-3} + \ldots + a_0 = \frac{1}{2}\\
&a_{p-1} + 2^2 a_{p-2} + 3^2 a_{p-3} + \ldots + p^2 a_0 = \frac{p^2}{2.3}\\
&a_{p-1} + 2^4 a_{p-2} + 3^4 a_{p-3} + \ldots + p^4 a_0 = \frac{p^3}{2.5}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{p-1} + 2^{2p} a_{p-2} + 3^{2p} a_{p-3} + \ldots + p^{2p} a_0 = \frac{p^{2p}}{2(2p+1)}.
\end{aligned}$$

On peut regarder la formule (2) comme une équation fonctionnelle où la fonction inconnue est $\varphi(x)$. En supposant que la fonction $\varphi(x)$ est continue et qu'elle a des dérivées de tout ordre, nous avons démontré que l'intégrale de l'équation fonctionnelle (2) est un polynôme quelconque de degré $2p + 1$.

3. Lorsque le degré du polynôme $\varphi(x)$ est $n = 2p + 1$, nous avons démontré la formule

$$(4)\qquad \int_\lambda^\mu \varphi(x)dx = (\mu - \lambda)\sum_{s=0}^{p} a'_s\left[\varphi\left(\lambda + s\frac{\mu-\lambda}{2p+1}\right) + \varphi\left(\mu - s\frac{\mu-\lambda}{2p+1}\right)\right]$$

valable quelles que soient les contantes λ et μ, et où les constantes a'_s sont données par le système d'équations linéaires

$$(5)\qquad \begin{aligned}
&a'_p + a'_{p-1} + a'_{p-2} + \ldots + a'_0 = \frac{1}{2}\\
&a'_p + 3^2 a'_{p-1} + 5^2 a'_{p-2} + \ldots + (2p+1)^2 a'_0 = \frac{(2p+1)^2}{2.3}\\
&a'_p + 3^4 a'_{p-1} + 5^4 a'_{p-2} + \ldots + (2p+1)^4 a'_0 = \frac{(2p+1)^3}{2.5}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a'_p + 3^{2p} a'_{p-1} + 5^{2p} a'_{p-2} + \ldots + (2p+1)^{2p} a'_0 = \frac{(2p+1)^2}{2.(2p+1)}.
\end{aligned}$$

En faisant les mêmes hypothèses sur la fonction $\varphi(x)$, nous avons démontré que l'équation fonctionnelle (4) a pour intégrale un polynôme quelconque de degré $2p + 1$.

4. Nous dirons que les formules (2) et (4) sont *les formules généralisées de G. Darboux.* Dans une prochaine note nous allons donner les applications de ces formules à la géométrie et à la mécanique.