TOMUL IX, FASC. 3. MAI 1940.

BULETINUL SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE DIN CLUJ.

Tipărit cu ajutorul acordat de Universitatea Regele Ferdinand I.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE CLUJ, ROUMANIE.

TOMUL IX. - FASCICOLUL 3.

CLUJ,
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL"
STRADA MEMORANDULUI 22.
1940.

BULETINUL SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE DIN CLUJ (ROMÂNIA)
BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE CLUJ (ROUMANIE)
Tome IX, pag. 446—452.
27 mai *1940*.

QUELQUES APPLICATIONS D'UNE FORMULE DE G. DARBOUX

par

D. V. Ionescu
Professeur à la Faculté des Sciences de Cluj (Roumanie).

1. G. DARBOUX[1] a montré que si $\varphi(x)$ est un polynôme du second degré, on a l'identité

$$\int_0^h \varphi(x)\,dx = \frac{h}{6}\left[\varphi(0) + 4\varphi\left(\frac{h}{2}\right) + \varphi(h)\right] \tag{1}$$

et que cette identité est encore satisfaite lorsqu'on remplace $\varphi(x)$ par un polynôme du troisième degré.

Il est évident qu'on peut remplacer la formule (1) par

$$\int_\lambda^\mu \varphi(x)\,dx = \frac{\mu-\lambda}{6}\left[\varphi(\lambda) + 4\varphi\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right) + \varphi(\mu)\right], \tag{2}$$

et la proposition précédente est encore valable quelles que soient les constantes λ et μ.

Dans ce travail nous voulons faire quelques applications de cette formule.

2. Prenons sur la parabole, dont l'équation est

$$y = \varphi(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

les points P et Q ayant pour abscisses λ et μ. L'aire S comprise entre l'arc de parabole PQ et la corde PQ qui est donnée par une formule celèbre d'ARCHIMÈDE[2] peut se calculer à l'aide de la formule (2) de DARBOUX.

En effet désignons par $y = \varphi_1(x)$, l'équation de la droite PQ. Les degrées des polynômes $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ étant 2 et 1, ces poly-

(1) G. DARBOUX. Sur le centre de gravité de certains volumes. Note publiée dans le cours de Mécanique de DESPEYRONS pag. 383.

(2) E. GOURSAT. Cours d'analyse mathématique. Tome I, 1933, pag. 163.

nômes satisfont à la formule (2) de Darboux. Nous avons donc

$$\int_{\lambda}^{\mu} \varphi_1(x)\,dx = \frac{\mu-\lambda}{6}\left[\varphi_1(\lambda)+4\varphi_1\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)+\varphi_1(\mu)\right]$$

$$\int_{\lambda}^{\mu} \varphi(x)\,dx = \frac{\mu-\lambda}{6}\left[\varphi(\lambda)+4\varphi\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)+\varphi(\mu)\right]$$

En retranchant membre à membre ces formules, on déduit

$$S = \frac{2}{3}(\mu-\lambda)\,MM',$$

où M et M' sont les points où la droite $x = \frac{\lambda+\mu}{2}$ rencontre l'arc de parabole PQ et la corde PQ.

Nous retrouvons ainsi la formule classique d'Archimède, c'est-à-dire: *l'aire* S *limitée par l'arc de parabole* PQ *et la corde* PQ *est égale à* $\frac{2}{3}$ *de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs* $\overrightarrow{PQ}$ *et* $\overrightarrow{MM'}$.

La méthode précédente pour obtenir la formule d'Archimède, montre que la même formule s'applique aussi à la parabole cubique

$$(3) \qquad y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

le polynôme du troisième degré satisfaisant aussi à la formule de Darboux.

Il résulte alors que *l'aire comprise entre l'arc* PQ *de la parabole cubique* (3), *et la corde* PQ *est égale à* $\frac{2}{3}$ *de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs* $\overrightarrow{PQ}$ *et* $\overrightarrow{MM'}$, *où* M' *est le milieu de la corde* PQ *et* M *est le point où la parallèle à* Oy *menée par* M' *rencontre la parabole cubique.*

3. Il résulte aussi de la démonstration précédente de la formule d'Archimède que si nous prenons sur la cubique représentée par l'équation (3) les points quelconques P et Q dont les abscisses sont λ et μ, et nous passons une parabole par ces points, dont l'équation soit de la forme:

$$(4) \qquad y = A_1x^2 + B_1x + C_1,$$

l'aire comprise entre l'arc de cubique de PQ *et l'arc de parabole* PQ *est égale à* $\frac{2}{3}$ *de l'aire du parallélogramme construit sur les vec-*

teurs $\overrightarrow{PQ}$ *et* $\overrightarrow{MM_1}$, M *et* M_1 *étant les points où la droite* $x = \frac{\lambda+\mu}{2}$, *rencontre le cubique et la parabole.*

En particulier il résulte de la propriété précédente que si nous prenons sur la cubique représentée par l'équation (3), les points P, M, Q dont les abscisses sont λ, $\frac{\lambda+\mu}{2}$, μ et nous déterminons ensuite les coefficients A_1, B_1, C_1 de la parabole (4) qui passe par les points P, M, Q, *l'aire* S' *comprise entre l'arc de cubique* PM *et l'arc de pa·abole* PM, *est égale à l'aire* S'' *comprise entre l'arc de cubique* MQ *et l'arc de parabole* MQ.

4. Considérons un trapèze homogène $N_0M_0M_2N_2$ dont les bases parallèles à Oy sont N_0M_0 et N_2M_2 et calculons l'abcisse du centre de gravité. Nous aurons

$$\xi = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_\lambda^\mu x(y_2 - y_1)\,dx}{\int_\lambda^\mu (y_2 - y_1)\,dx}$$

où

$$(5) \qquad y_1 = a_1 x + b_1\,, \qquad y_2 = a_2 x + b_2$$

représentent les équations des droites N_0N_2 et M_0M_2 et où λ et μ sont les abscisses des points M_0 et M_2.

$y_2 - y_1$ et $x(y_2 - y_1)$ étant des polynômes du premier et du second degré, nous pouvons appliquer aux intégrales précédentes la formule (2) de Darboux.

Nous aurons

$$\xi = \frac{N_0M_0\,\lambda + 4\,N_1M_1\,\frac{\lambda+\mu}{2} + N_2N_2\cdot\mu}{N_0M_0 + 4\,N_1M_1 + N_2M_2}$$

où N_1 et M_1 sont les milieux des segments N_0N_2 et M_0M_2.

Cette formule montre que *l'abscisse du centre de gravité du trapèze* $N_0M_0M_2N_2$ *est égale à l'ăbscisse du barycentre des masses* N_0M_0, $4\,N_1M_1$, N_2M_2 *placées aux points* M_0, M_1, M_2.

C'est intéressant à remarquer que cette règle pour déterminer le centre de gravité d'un trapèze s'applique aussi lorsqu'on remplace un des côtés N_0N_2, M_0M_2 ou les deux, par des arcs de paraboles dont les axes sont parallèles au bases N_0M_0 et N_2M_2.

En effet, dans ce cas, on a

$$(5') \qquad y_1 = a_1 x^2 + b_1 x + c_1\,, \qquad y_2 = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$$

et les polynômes y_2-y_1, $x(y_2-y_1)$ étant de dégrés deux et trois, d'après le théorème de Darboux, satisfont à la formule (2).

Il résulte donc que si nous considérons sur les paraboles représentées par les équations (5′), les points N_0, N_1, N_2 et M_0, M_1, M_2 ayant pour abscisses λ, $\frac{\lambda+\mu}{2}$, μ, *l'abscisse du centre de gravité de l'aire homogène limitée par le contour curviligne* $N_0M_0M_2N_2$ *est égale à l'abscisse du barycentre des masses* N_0M_0, $4\,N_1M_1$, N_2M_2 *placées aux points* M_0, M_1 *et* M_2.

5. On peut faire une autre application de la formule de Darboux à la détermination du centre de gravité d'un trapèze non homogène, où la densité en chaque point est une fonction linéaire de la distance du point à l'une des bases.

Considérons un trapèze $N_0M_0M_2N_2$ dont les bases parallèles à Oy sont N_0M_0 et N_2M_2; désignons par N_1, M_1 les milieux des côtés N_0N_2, M_0M_2 et par ρ la densité en chaque point (x, y) du trapèze, fonction linéaire de l'abscisse du point.

L'abscisse du centre de gravité est

$$\xi=\frac{\iint \rho x\,dx\,dy}{\iint \rho\,dx\,dy}=\frac{\int_\lambda^\mu \rho\,x\,(y_2-y_1)\,dx}{\int_\lambda^\mu \rho\,(y_2-y_1)\,dx}$$

où λ et μ sont les abscisses des points M_0 et M_2.

Les polynômes $\rho\,(y_2-y_1)$, $\rho\,x\,(y_2-y_1)$ étant du second et du troisième degré, satisfont à la formule de Darboux, et par suite:

$$\xi=\frac{\rho_0N_0M_0\lambda+4\,\rho_1N_1M_1\,\frac{\lambda+\mu}{2}+\rho_2N_2M_2\,.\,\mu}{\rho_0N_0M_0+4\,\rho_1N_1M_1+\rho_2N_2M_2}$$

Cette formule montre que *l'abscisse du centre de gravité du trapèze non homogène* $N_0M_0M_2N_2$ *est égale à l'abscisse du barycentre des masses* $\rho_0N_0M_0$, $4\,\rho_1N_1M_1$, $\rho_2N_2M_2$ *placées aux points* M_0, M_1, M_2.

Le centre de gravité se trouve aussi sur la droite qui joint les milieux des bases.

On voit donc que la règle qui donne le centre de gravité d'un trapèze homogène, s'applique non seulement lorsqu'on remplace les côtés non parallèles par des arcs de paraboles dont les axes sont parallèles aux bases, mais aussi lorsque le trapèze est non homogène, la densité en chaque point étant une fonction linéaire de la distance du point à l'une des bases.

L'explication de ces faits se trouve dans la formule de G. DARBOUX.

6. Nous ferons maintenant d'autres applications de la formule de DARBOUX, au calcul des moments d'inertie.

a) Considérons un trapèze homogène $N_0M_0M_2N_2$ dont les bases N_0M_0, N_2M_2 sont parallèles à l'axe Oy et dont les droites N_0N_2 et M_0M_2 sont représentées par les équations (5).

Le rayon de gyration du trapèze par rapport à l'axe Oy et

$$\rho_x^2 = \frac{\iint x^2 dx\, dy}{\iint dx\, dy} = \frac{\int_\lambda^\mu x^2(y_2 - y_1)\, dx}{\int_\lambda^\mu (y_2 - y_1)\, dx}.$$

En appliquant la formule de Darboux, nous avons

$$\rho_x^2 = \frac{N_0M_0\lambda + 4\, N_1M_1\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)^2 + N_2M_2\mu^2}{N_0M_0 + 4\, N_1M_1 + N_2M_2}$$

ce qui prouve que *le rayon de gyration du trapèze par rapport à une droite parallèle aux bases, est égal au rayon de gyration par rapport à la même droite d'un système fictif de points matériels formé par les masses* N_0M_0, $4\, N_1M_1$, N_2M_2 *placées aux points* M_0, M_1, M_2.

b) Calculons maintenant le rayon de gyration du trapèze précédent, par rapport à un des côtés non parallèles. Nous pouvons supposer que l'axe Ox coïncide avec le côté N_0N_2. Le rayon de gyration est

$$\rho_y^2 = \frac{\iint y^2 dx dy}{\iint dx dy} = \frac{1}{3} \frac{\int_\lambda^\mu y^3 dx}{\int_\lambda^\mu y\, dx}.$$

y et y^3 étant des polynômes du premier et du troisième degré, nous appliquons la formule de DARBOUX, et nous avons

$$\rho_y^2 = \frac{1}{3} \frac{\overline{N_0M_0}^3 + 4\, \overline{N_1M_1}^3 + \overline{N_2M_2}^3}{\overline{N_0M_0} + 4\overline{N_1M_1} + \overline{N_2M_2}},$$

ce qui prouve que *le rayon de gyration du trapèze par rapport* *à un côté non parallèle N_0N_2 est égal au produit de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ par le rayon de gyration par rapport au côté N_0N_2 d'un système fictif de points matériels formé par les masses N_0M_0, $4\,N_1M_1$, N_2M_2 placés aux points M_0, M_1, M_2.*

c) Calculons enfin pour le même trapèze, le produit d'inertie Σmxy du trapèze, divisé par la masse du trapèze, l'axe Ox coïncidant avec N_0N_2 et l'axe Oy étant parallèle aux bases. Nous avons

$$a = \frac{\Sigma\, mxy}{\Sigma\, m} = \frac{\iint xydxdy}{\iint dxdy} = \frac{1}{2}\,\frac{\int_\lambda^\mu xy^2dx}{\int_\lambda^\mu ydx}\,.$$

Comme y et xy^2 sont des polynômes du premier et du troisième degré, nous pouvons appliquer la formule de Darboux, et nous avons

$$a = \frac{1}{2}\;\frac{\lambda\,\overline{N_0M_0}^2 + 4\,\frac{\lambda+\mu}{2}\,\overline{N_1M_1}^2 + \mu\,\overline{N_2M_2}^2}{\overline{N_0M_0} + 4\,\overline{N_1M_1} + \overline{N_2M_2}}\,.$$

Cette formule montre que *le produit d'inertie Σmxy d'un trapèze $N_0M_0M_2N_2$, divisé par la masse du trapèze, l'axe Ox coïncidant avec N_0N_2 et l'axe Oy étant parallèle aux bases, est égal à $\frac{1}{2}a'$, où a' représent le produit d'inertie Σmxy, d'un système fictif de points matériels formé par les masses N_0M_0, $4\,N_1M_1$, N_2M_2 placées aux points M_0, M_1, M_2, divisé par la masse de ce système.*

7. Pour finir, nous allons faire une nouvelle application de la formule de Darboux, pour retrouver une formule connue (1) qui donne le moment d'inertie d'une barre homogène.

Considérons la barre homogène AB de longueur $2\,l$, et désignons par z_0, z_1, z_2 les côtes des points A, G, B, où G est le milieu de la barre, et par $r = \overline{AM}$, la distance du point A à un point quelconque M de la barre.

Le moment d'inertie de la barre par rapport au plan xoy, est

$$I = \Sigma\, m\, z^2\,,$$

où

$$z = z_0 + \frac{z_2 - z_0}{2\,l}\,r\,.$$

(1) Cette formule est citée dans le livre de M. R. Leveugle: *Précis de calcul géométrique*, G. V, 1920, p. 102.

En désignant par ρ la densité de la barre, nous avons

$$I=\rho\int_0^{2l}\left(z_0+\frac{z_2-z_0}{2l}\,r\right)^2 dr\,.$$

La fonction à intégrer étant un polynôme du second degré, nous pouvons appliquer la formule de Darboux; nous aurons

$$I=\rho\frac{2l}{6}[z_0^2+4z_1^2+z_2^2]$$

ou

$$I=\frac{M}{6}[z_0^2+4z_1^2+z_2^2].$$

Cette formule montre que *le moment d'inertie d'une barre homogène* AB *de masse* M *par rapport à un plan, une droite, ou un point quelconque de l'espace, est égal au moment d'inertie des masses* $\frac{M}{6}$, $\frac{2M}{3}$, $\frac{M}{6}$, *placées aux points* A, G, B, *où* G *est le milieu de* AB, *par rapport au même plan, même droite ou même point de l'espace.*

La méthode précédente montre — en appliquant la formule de Darboux, — que si la barre AB n'est pas homogène, la densité en chaque point étant une fonction linéaire de la distance du point au point A, son moment d'inertie par rapport à un plan, une droite ou un point de l'espace et égal au moment d'inertie des masses $\frac{l\rho_0}{3}$, $\frac{4l\rho_1}{3}$, $\frac{l\rho_2}{3}$ placés aux points A, G, B par rapport au même plan, même droite ou même point de l'espace, ρ_0, ρ_1 et ρ_2 étant les densités en A, G et B.