

COMPTES RENDUS
DES SÉANCES
DE
L'INSTITUT DES SCIENCES
DE ROUMANIE
ANCIENNE
ACADÉMIE DES SCIENCES DE ROUMANIE



MATHÉMATIQUES

476. SUR UNE ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES FINIES

par D. V. IONESCU Mt. I. S. R.

1. Considérons l'équation aux différences finies

$$(1) \quad (z-y) P_{i,k} + (y-x) P_{i,k-1} + (x-z) P_{i-1,k} = 0,$$

et nous allons l'intégrer, en supposant que les valeurs de $P_{i,0}$ et de $P_{0,k}$ sont données par les formules suivantes

$$(2) \quad \begin{aligned} P_{i,0} = & C_{n+p-i}^{p-i} x^n \\ & + C_{n+p-i-1}^{p-i} x^{n-1} (C_{i+1}^i y + C_i^i z) \\ & + C_{n+p-i-2}^{p-i} x^{n-2} (C_{i+2}^i y^2 + C_{i+1}^i y z + C_i^i z^2) \\ & + \dots \\ & + C_{p-i}^{p-i} (C_{i+n}^i y^n + C_{i+n-1}^i y^{n-1} z + \dots + C_i^i z^n) \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} P_{0,k} = & C_{n+p-k}^{p-k} x^n \\ & + C_{n+p-k-1}^{p-k} x^{n-1} (C_{k+1}^k z + C_k^k y) \\ & + C_{n+p-k-2}^{p-k} x^{n-2} (C_{k+2}^k z^2 + C_{k+1}^k y z + C_k^k y^2) \\ & + \dots \\ & + C_p^{p-k} (C_{k+n}^k z^n + C_{k+n-1}^k z^{n-1} y + \dots + C_k^k y^n) \end{aligned}$$

Dans ces formules p et n sont des entiers positifs et C_i^j désigne le symbole des combinaisons. Nous voyons que les deux formules (2) et (3) coïncident pour $i=k=0$.

Nous allons démontrer que, dans ces conditions, l'intégrale de l'équation aux différences finies (1), est encore un polynôme homogène de degré n en x, y, z , que nous allons déterminer.

2. Dans l'étude de l'équation aux différences finies (1), nous ferons usage d'une façon constante de la formule

$$(4) \quad \begin{aligned} & (x-y) [C_i^l C_{k+h}^h y^k + C_{i+1}^l C_{k+h-1}^h y^{k-1} z + \dots + C_{i+k}^l C_h^h z^k] \\ & + (z-x) [C_{i+1}^{l+1} C_{k+h-1}^{h-1} y^k + C_{i+2}^{l+1} C_{k+h-2}^{h-1} y^{k-1} z + \dots + C_{i+k+1}^{l+1} C_{h-1}^{h-1} z^k] \\ & = (z-y) \{ (C_{i+1}^{l+1} C_{k+h}^h y^k + C_{i+2}^{l+1} C_{k+h-1}^h y^{k-1} z + \dots + C_{i+k+1}^{l+1} C_h^h z^k) \\ & - x (C_{i+1}^{l+1} C_{k+h-1}^h y^{k-1} + C_{i+2}^{l+1} C_{k+h-2}^h y^{k-2} z + \dots + C_{i+k}^{l+1} C_h^h z^{k-1}) \} \end{aligned}$$

qu'on démontre sans difficulté.

3. Faisons $k=1$, dans l'équation (1). Nous aurons l'équation

$$(5) \quad (z-y) P_{i,1} + (y-x) P_{i,0} + (x-z) P_{i-1,1} = 0$$

qui va nous donner les valeurs de $P_{i,1}$.

En faisant dans cette équation $i=1$, nous avons

$$(z-y) P_{1,1} = (x-y) P_{1,0} + (z-x) P_{0,1}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} (z-y) P_{1,1} &= C_{n+p-1}^{p-1} x^n (z-y) \\ &+ C_{n+p-2}^{p-1} x^{n-1} [(x-y) (C_2^1 y + C_1^1 z) + (z-x)(C_2^1 z + C_1^1 y)] \\ &+ C_{n+p-3}^{p-1} x^{n-2} [(x-y) (C_3^1 y^2 + C_2^1 yz + C_1^1 z^2) + (z-x) \\ &\quad (C_3^1 z^2 + C_2^1 zy + C_1^1 y^2)] \\ &+ \dots \\ &+ C_{p-1}^{p-1} [(x-y) (C_{n+1}^1 y^n + C_n^1 y^{n-1} z + \dots + C_1^1 z^n) \\ &\quad + (z-x) (C_{n+1}^1 z^n + C_n^1 z^{n-1} y + \dots + C_1^1 y^n)] \end{aligned}$$

En appliquant maintenant la formule (4) où l'on fait $h=1$, $l=0$ et $k=1, 2, \dots, n$, nous avons

$$\begin{aligned} P_{1,1} &= C_{n+p-1}^{p-1} x^n \\ &+ C_{n+p-2}^{p-1} x^{n-1} [C_1^1 C_2^1 y + C_2^1 C_1^1 z - x] \\ &+ C_{n+p-3}^{p-1} x^{n-2} [C_1^1 C_3^1 y^2 + C_2^1 C_2^1 yz + C_3^1 C_1^1 z^2 - x (C_1^1 C_2^1 y + C_2^1 C_1^1 z)] \\ &+ \dots \\ &+ C_{p-1}^{p-1} [C_1^1 C_{n+1}^1 y^n + C_2^1 C_n^1 y^{n-1} z + \dots + C_{n+1}^1 C_1^1 z^n \\ &\quad - x (C_1^1 C_n^1 y^{n-1} + C_2^1 C_{n-1}^1 y^{n-2} z + \dots + C_n^1 C_1^1 z^{n-1})] \end{aligned}$$

d'où résulte que

$$\begin{aligned}
 (6) \quad P_{1,1} &= C_{n+p-2}^{p-2} x^n \\
 &+ C_{n+p-3}^{p-2} x^{n-1} (C_1^1 C_2^1 y + C_2^1 C_1^1 z) \\
 &+ C_{n+p-4}^{p-2} x^{n-2} (C_1^1 C_3^1 y^2 + C_2^1 C_2^1 yz + C_3^1 C_1^1 z^2) \\
 &+ \dots \\
 &+ C_{p-2}^{p-2} (C_1^1 C_{n+1}^1 y^n + C_2^1 C_n^1 y^{n-1} z + \dots + C_{n+1}^1 C_1^1 z^n)
 \end{aligned}$$

On démontre ensuite de proche en proche que :

$$\begin{aligned}
 (7) \quad P_{i,1} &= C_{n+p-i-1}^{p-i-1} x^n \\
 &+ C_{n+p-i-2}^{p-i-1} x^{n-1} (C_2^1 C_{i+1}^1 y + C_2^1 C_i^1 z) \\
 &+ C_{n+p-i-3}^{p-i-1} x^{n-2} (C_1^1 C_{i+2}^1 y^2 + C_2^1 C_{i+1}^1 yz + C_3^1 C_i^1 z^2) \\
 &+ \dots \\
 &+ C_{p-i-1}^{p-i-1} (C_1^1 C_{n+i}^1 y^n + C_2^1 C_{n+i-1}^1 y^{n-1} z + \dots + C_{n+1}^1 C_i^1 z^n)
 \end{aligned}$$

4. La valeur de $P_{1,i}$ s'obtient en échangeant dans la formule (7), y et z . Cette observation est vraie pour $i=0$ et $i=1$. Supposons que de proche en proche nous avons prouvé cette observation jusqu'au rang $i-1$, et faisons la démonstration aussi pour le rang i .

Dans l'équation (5), échangeons y et z et désignons par $P'_{i,1}$, $P'_{i,0}$, $P'_{i-1,1}$ ce que devient $P_{i,1}$, $P_{i,0}$ et $P_{i-1,1}$ par ce changement. Nous aurons

$$(y-z) P'_{i,1} + (z-x) P'_{i,0} + (x-y) P'_{i-1,1} = 0.$$

Mais

$$P'_{i,0} = P_{0,i}$$

et nous avons supposé que nous avons

$$P'_{i-1,1} = P_{1,i-1}$$

d'où résulte que

$$(z-y) P'_{i,1} + (y-x) P_{1,i-1} + (x-z) P_{0,i} = 0.$$

Si nous comparons cette équation, avec celle qu'on déduit de l'équation (1), où l'on fait $i=1$, $k=i$

$$(z-y) P_{1,i} + (y-x) P_{1,i-1} + (x-z) P_{0,i} = 0,$$

on déduit que

$$P'_{i,1} = P_{1,i}$$

Ce qui prouve que la valeur de $P_{1,i}$ s'obtient en échangeant y et z dans la formule (7).

5. Avec ces éléments, on démontre maintenant de proche en proche, que la valeur de $P_{i,k}$ est donnée par la formule

$$(8) \quad P_{i,k} = C_{n+p-i-k}^p x^{i-k} \\
+ C_{n+p-i-k-1}^{p-i-k} x^{i-1} (C_k^k C_{i+1}^i y + C_{k+1}^k C_i^i z) \\
+ C_{n+p-i-k-2}^{p-i-k} x^{i-2} (C_k^k C_{i+2}^i y^2 + C_{k+1}^k C_{i+1}^i yz + C_{k+2}^k C_i^i z^2) \\
+ \dots \\
+ C_{p-i-k}^{p-i-k} (C_k^k C_{n+i}^i y^n + C_{k+1}^k C_{i+n-1}^i y^{n-1} z + \dots + C_{k+n}^k C_i^i z^n)$$

pour toutes les valeurs de i et de k .

La formule (8), donne la solution du problème que nous nous sommes posé dans le No. 1 sur l'équation aux différences finies (1).

477. SUR UNE CLASSIFICATION NOUVELLE DES TISSUS PLANS

par AL. PANTAZI Mc. I. S. R

Soient :

$$dx + E_i dy = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(où les E_i sont des fonctions données de x, y supposées dérivables par rapport à x et y autant de fois qu'il est nécessaire) les équations différentielles définissant un tissu plan d'ordre n (n -Gewebe).

Dans une note présentée à l'I.S.R. (Compte-Rendus, T.II.p. 108) nous avons montré que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le tissu considéré soit de rang maximum, s'écrivent :

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \dots, \dots, \quad A_N = 0 \quad N = \frac{(n-1) n-2}{2},$$

où A_1, A_2, \dots, A_N , nous le remarquons à cette occasion, sont des fonctions des E_i et de leurs dérivées partielles par rapport à x et y jusqu'à l'ordre $n-1$. Un examen poussé plus à fond, nous montre de plus que les fonctions.

$$A_1, A_2, \dots, A_i \quad i = \frac{k(k+1)}{2}$$

Les articles destinés à être imprimés dans les „Comptes rendus des séances de l'Institut des Sciences de Roumanie” seront envoyés au Secrétariat de rédaction des publications de l'Institut, Rue R. Poincaré. 14 (Faculté des sciences) București.

Il est à désirer que les articles ne dépassent pas 4—5 pages de texte imprimé.