

279230

BCU Cluj-Napoca



BCPER201700376

ACADÉMIE ROUMAINE

BULLETIN

DE LA SECTION SCIENTIFIQUE

PUBLIÉ PAR LES SOINS DES SECRÉTAIRES DE LA SECTION

MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROUMAINE

† ST. C. HEPITES GR. ANTIPA
DE 1912 À 1919 DE 1919 À 1939

ET

TRAJAN SAVULESCO

TOME XXIV-ème

No. 1

SOMMAIRE

	<u>Pag.</u>
GR. C. MOISIL, Sur la représentation des groupes abéliens infinis II	1
GR. C. MOISIL, Sur la représentation des groupes abéliens infinis III.	5
CONSTANTIN SĂLCEANU et GRIGORE ANDRIESCU, Résonance acoustique des solides en barres. Nouvelle possibilité pour déterminer la vitesse du son dans les solides	8
C. V. GHEORGHIU et M-me ELENA COZUBSCHISCIUREVICI, La condensation des isothiocyanates avec les oximes. IV. L'action d'isothiocyanates de phényle sur les benzoïnoximes substituées. I.	15
NICOLAE PETRULIAN, La minéralisation aurifère de Vârful Negrii	22
A. POP, I. MARINOV et D. OGNERU, Contributions à l'étude des epizooties à Brucella en Roumanie	33
TR. SĂVULESCU, Die auf Compositen parasitierenden Plasmopara-Arten.	45
ANDRÉ RACOVITZA, Note sur le Clavaria Botrytes Pers.	68

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ. BUCUREȘTI, 1941

BIBL. UNIV. CLUJ-NAP. SIBIU
Nr. 4041 - 1943
Exemplar legal

UNE APPLICATION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE.

PAR

D. V. IONESCU

Note présentée par Mr. D. Pompeiu M.A.R. dans la séance du 17 avril 1942

1. M. D. P o m p e i u ¹⁾ a posé le problème de la détermination des fonctions continues $F(x)$ et $f(x)$, satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad \int_a^b F(x) f(x) dx = F\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b f(x) dx,$$

quelles que soient les valeurs de a et b .

M. T h. A n g h e l u t z a ²⁾, en posant

$$F(x) = \frac{g(x)}{f(x)},$$

a écrit l'équation (1), sous la forme

$$(2) \quad \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{g\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

et a montré que les solutions de cette équation sont données par les formules

$$(3) \quad \begin{array}{ll} f(x) = a x + b & g(x) = a' x + b' \\ f(x) = a \cos \theta x + b \sin \theta x & g(x) = a' \cos \theta x + b' \sin \theta x \\ f(x) = a \operatorname{ch} \theta x + b \operatorname{sh} \theta x & g(x) = a' \operatorname{ch} \theta x + b' \operatorname{sh} \theta x \end{array}$$

¹⁾ D. P o m p e i u. Sur une équation fonctionnelle qui s'introduit dans un problème de moyenne (C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, t. 190, 1930 p. 1107).

²⁾ T h. A n g h e l u t z a. Sur une équation fonctionnelle (C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, t. 194, 1932, p. 420).

où a, b, a', b', θ sont des constantes arbitraires.

Dans cette note, nous allons faire une application de l'équation fonctionnelle (2).

2. Démontrons d'abord, que l'intégration de l'équation fonctionnelle

$$(4) \quad \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \frac{f(a) + f(b)}{g(a) + g(b)}$$

qui doit être satisfaite quelles que soient les valeurs de a et b , se ramène à l'équation fonctionnelle (2).

En effet, en posant

$$a = \lambda - h, \quad b = \lambda + h,$$

on peut écrire l'équation fonctionnelle (4) sous la forme

$$\frac{f(\lambda + h) + f(\lambda - h)}{\int_{\lambda-h}^{\lambda+h} f(x) dx} = \frac{g(\lambda + h) + g(\lambda - h)}{\int_{\lambda-h}^{\lambda+h} g(x) dx},$$

ou bien.

$$\frac{\partial}{\partial h} \left[\log \int_{\lambda-h}^{\lambda+h} f(x) dx \right] = \frac{\partial}{\partial h} \left[\log \int_{\lambda-h}^{\lambda+h} g(x) dx \right],$$

ce qui montre que le rapport des intégrales

$$\int_{\lambda-h}^{\lambda+h} f(x) dx \quad ; \quad \int_{\lambda-h}^{\lambda+h} g(x) dx,$$

ne dépend pas de h . Nous avons donc

$$\frac{\int_{\lambda-h}^{\lambda+h} f(x) dx}{\int_{\lambda-h}^{\lambda+h} g(x) dx} = \frac{f(\lambda - h) + f(\lambda + h)}{g(\lambda - h) + g(\lambda + h)} = \Phi(\lambda).$$

En faisant h tendre vers zéro dans cette équation, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ étant continues, on trouve

$$\Phi(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)},$$

ce qui prouve que l'intégration de l'équation fonctionnelle (4) a été ramenée à l'équation fonctionnelle (2).

L'équation fonctionnelle (4) a donc pour solutions, les fonctions données par les formules (3).

Remarque. L'intégration de l'équation fonctionnelle

$$\frac{f(\lambda - h) + f(\lambda + h)}{g(\lambda - h) + g(\lambda + h)} = \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)},$$

a été faite par M. Th. Anghelutz a²⁾, qui a donné les solutions (3).

3. Considérons dans le plan xoy , une courbe (C) représentée par les équations paramétriques

$$x = f(u), \quad y = g(u),$$

où l'on suppose que les fonctions $f(u)$ et $g(u)$ sont continues et ont des dérivées premières continues. Désignons par M, A, B les points de la courbe qui correspondent aux valeurs $\lambda, \lambda - h$ et $\lambda + h$ du paramètre. En général, l'aire du segment de courbe AB , comprise entre l'arc de courbe AB et la corde AB , dépend de λ et de h .

Nous allons démontrer que les seules courbes pour lesquelles l'aire du segment de courbe AB , ne dépend pas de λ , sont les coniques.

L'aire S du segment de courbe AB , est donnée par la formule

$$S = \int_{x_A}^{x_B} y \, dx - \frac{1}{2} (x_B - x_A) (y_B + y_A),$$

ou bien, en introduisant les fonctions $f(u)$ et $g(u)$

$$S = \int_{\lambda-h}^{\lambda+h} g(u) f'(u) \, du - \frac{1}{2} [f(\lambda+h) - f(\lambda-h)] [g(\lambda+h) + g(\lambda-h)].$$

Nous aurons l'équation fonctionnelle du problème en écrivant que la dérivée de S par rapport à λ est nulle, ce qui donne l'équation

$$(5) \quad \frac{f'(\lambda + h) + f'(\lambda - h)}{g'(\lambda + h) + g'(\lambda - h)} = \frac{f(\lambda + h) - f(\lambda - h)}{g(\lambda + h) - g(\lambda - h)},$$

qui doit être satisfaite quelles que soient les valeurs de λ et h .

En posant

$$f'(x) = F(x), \quad g'(x) = G(x),$$

on peut écrire l'équation fonctionnelle (5) sous la forme

$$(6) \quad \frac{\int_{\lambda-h}^{\lambda+h} F(x) \, dx}{\int_{\lambda-h}^{\lambda+h} G(x) \, dx} = \frac{F(\lambda + h) + F(\lambda - h)}{G(\lambda + h) + G(\lambda - h)},$$

qui est identique à l'équation fonctionnelle (4).

Il résulte que la solution de notre problème est donnée par les formules

$$\begin{aligned}
 x &= a u^2 + b u + c & y &= a' u^2 + b' u + c' \\
 (7) \quad x &= a \cos \theta u + b \sin \theta u + c & y &= a' \cos \theta u + b' \sin \theta u + c' \\
 x &= a \operatorname{ch} \theta u + b \operatorname{sh} \theta u + c & y &= a' \operatorname{ch} \theta u + b' \operatorname{sh} \theta u + c',
 \end{aligned}$$

où $a, b, c, a', b', c', \theta$ sont des constantes.

Les courbes représentées par les équations (5) sont les coniques.

4) Si nous reprenons le problème du no. 3 en supposant que la courbe $f(x)$ est donnée par une équation de la forme

$$y = f(x),$$

où $f(x)$ est une fonction continue ayant une dérivée continue, on est conduit à l'équation fonctionnelle de M. D P o m p e i u ²).

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f' \left(\frac{a + b}{2} \right).$$
