

ner les valeurs M_n correspondantes. E' sera déterminé par la condition de rendre M_n le plus petit possible. Il suffit donc d'un nombre fini d'essais pour arriver au polynôme de Tchebichef de E , et à M_n , lorsque E est fini.

Remarquons, pour conclure, que les polynômes de Tchebichef sont des fonctions d'ensemble qui jouissent de la continuité dans un sens très large, par rapport à cet ensemble : il suffit que l'écart de deux ensembles soit très petit pour que leurs polynômes de Tchebichef diffèrent de très peu. Il n'en est pas ainsi pour d'autres fonctions d'ensemble, telles que la capacité, par exemple ; en approchant E par une suite E_ν d'ensembles finis, la capacité $c(E)$ n'est pas égale à $\lim c(E_\nu)$, car on a $c(E_\nu) = 0$ pour chaque ν , tandis que l'on peut avoir $c(E) > 0$. Mais on a (d'après Fekete) $c(E) = \lim c(D_\nu)$, les D_ν étant une suite de domaines emboîtés dont l'intersection se réduit à E . C'est là une continuité bien plus restreinte que celle dont jouissent les polynômes de Tchebichef.

SUR LE CALCUL SYMBOLIQUE DE CAYLEY-ARONHOLD-CLEBSCH DANS LA THÉORIE DES INVARIANTS

(Mathématica, XXI (1945), 59—109)

Reçu le 15 avril 1945

La recherche des invariants, covariants et contrevariants des formes algébriques conduisit Cayley ¹⁾ à une méthode symbolique qui permet d'obtenir, quels que soient le degré et le nombre de variables de la forme tous les invariants, covariants et contrevariants qu'elle possède. Cette méthode ramène le calcul en question à une multiplication de déterminants et ceci explique le terme de « hyperdéterminants » que Cayley employait pour désigner les invariants. Aronhold et Clebsch qui reprirent cette méthode symbolique, se servirent de l'expression

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N)^n$$

pour désigner symboliquement une forme de degré n à N variables x_1, \dots, x_N . Les compléments qu'ils apportèrent aux remarques de Cayley conduisirent à un ensemble de règles très utiles quand il s'agit d'écrire effectivement les invariants d'une forme donnée, et ces règles permirent ensuite de pousser très loin l'étude des formations invariantes, surtout dans le cas des formes binaires.

Nous croyons utile d'indiquer ici une méthode reposant sur l'emploi de la variable complexe, qui permet de retrouver d'une manière plus directe et très élémentaire le calcul symbolique en question, et qui montre de plus qu'il existe une intégrale complexe qui établit une correspondance entre invariants et produits de déterminants, tandis que tous les autres concomitants sont ainsi mis en correspondance directe avec les symboles qui les représentent.

De plus, cette méthode « intégrale » permet d'obtenir, par des transformations très élémentaires, des relations entre les concomitants d'une forme et ceux d'un système de formes déduites de la première par dérivation. c'est là une opération que l'on peut employer très avantageusement quand il s'agit de « fractionner » le calcul d'un invariant ; on sait, en effet, que l'expression des invariants se présente sous une forme très compliquée dès que le degré de la forme dépasse 5 pour les formes binaires, et 3 pour les formes ternaires.

Afin de donner tout de suite une idée du procédé que nous voulons indiquer, prenons le cas d'une forme binaire quadratique

$$\Phi = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

¹⁾ Voir par ex. Salmon, *Algèbre supérieure*.

dont nous nous proposons de calculer l'invariant. Remarquons que l'on peut écrire

$$\Phi = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint \psi(p, q)(px + qy)^2 dpdq.$$

$$(1) \quad A = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint \psi(p, q)p^2 dpdq, \quad B = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint \psi(p, q)pq dpdq,$$

$$C = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint \psi(p, q)q^2 dpdq$$

en prenant

$$\psi(x, y) = \frac{1}{xy} \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{xy} + \frac{C}{y^2} \right).$$

Les lettres p et q désignent des variables complexes, et les intégrales sont prises le long de contours fermés, chacun entourant une fois l'origine. Cette manière d'écrire Φ justifie sa correspondance avec l'expression $(px + qy)^2$, employée par Aronhold.

Si l'on applique maintenant la transformation

$$(2) \quad \begin{matrix} x = a\bar{x} + b\bar{y} \\ y = c\bar{x} + d\bar{y} \end{matrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

à Φ , on trouve une nouvelle forme $\bar{\Phi}$ en \bar{x}, \bar{y}

$$\bar{\Phi} = \bar{A}\bar{x}^2 + 2\bar{B}\bar{x}\bar{y} + \bar{C}\bar{y}^2 = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint \psi(p, q)[(ap + cq)\bar{x} + (bp + dq)\bar{y}]^2 dpdq.$$

On a donc

$$\bar{A} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint \psi(p, q)(ap + cq)^2 dpdq,$$

$$\bar{B} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint \psi(p, q)(ap + cq)(bp + dq) dpdq, \quad \bar{C} = \dots$$

ou, en posant $\bar{p} = ap + cq, \bar{q} = bp + dq$

$$\bar{A} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint \psi(p, q)\bar{p}^2 dpdq, \quad \bar{B} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint \psi(p, q)\bar{p}\bar{q} dpdq,$$

$$\bar{C} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint \psi(p, q)q^2 dpdq,$$

ce qui revient à dire que l'on forme $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ à partir de (1) en appliquant dans chaque intégrale double la transformation transposée de (2) à p et q , mais seulement dans le facteur qui accompagne $\psi(p, q)$, sans appliquer cette transformation ni à $\psi(p, q)$ ni à l'élément différentiel $dpdq$. Proposons-nous maintenant de former un invariant, c'est-à-dire une fonction homogène $F(A, B, C)$ telle que $F(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = \Delta^\mu F(A, B, C)$. Le nombre μ sera le poids de l'invariant, et nous désignerons par m son degré par rapport aux coefficients de la forme. Prenons, afin de simplifier, $m = 2$, ce qui correspond à l'invariant très connu $AC - B^2$. On a

$$(3) \quad AC - B^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^4 \iiint \psi(p_1, q_1)\psi(p_2, q_2) \times \begin{vmatrix} p_1 q_1 & \\ & p_2 q_2 \end{vmatrix}^2 dp_1 dq_1 dp_2 dq_2.$$

Or, on obtient

$$\bar{A}\bar{C} - \bar{B}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^4 \iiint \psi(p_1, q_1)\psi(p_2, q_2) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} ap_1 + cq_1, bp_1 + dq_1 \\ ap_2 + cq_2, bp_2 + dq_2 \end{vmatrix}^2 dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 = \Delta^2(AC - B^2)$$

d'après la règle déjà indiquée qui permet de déduire $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ de A, B, C . On voit que la forme (3) donnée à l'invariant permet de se rendre compte immédiatement qu'il possède, en effet ce caractère, et d'obtenir en même temps son poids μ .

Or, ce résultat s'étend sans exception à toute forme, de degré quelconque, à un nombre quelconque de variables. Cette méthode s'étend au calcul des covariants et contrevariants, des concomitants simultanés de plusieurs formes, des combinants, et probablement à toutes les généralisations déjà données de ces notions. En effet, l'essentiel, dans la formule (3), consiste dans le fait que le noyau de cette intégrale (nous appelons *noyau* d'une telle intégrale la fonction qui accompagne $\psi(p_1, q_1)\psi(p_2, q_2)$) est un déterminant formé avec les couples p, q ; p_1, q_1 ; après application de la transformation (2), ceci permet de retrouver l'expression initiale multipliée par une puissance de Δ . D'une manière générale, il en sera toujours ainsi lorsque, l'invariant étant de degré m , nous aurons une intégrale multiple d'ordre $2m$ à m couples de variables d'intégration p, q, \dots, p_m, q_m . Il sera nécessaire et suffisant, pour que ¹⁾

$$(4) \quad \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{2m} \int \psi(p_1, q_1)\psi(p_2, q_2) \dots \psi(p_m, q_m) G(p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_m, q_m) dp_1 \dots dq_m$$

représente un invariant, que

$$G(ap_1 + cq_1, bp_1 + dq_1, ap_2 + cq_2, bp_2 + dq_2, \dots$$

$$\dots, ap_m + cq_m, bp_m + dq_m) = \Delta^\mu G(p_1, q_1, \dots, p_m, q_m).$$

¹⁾ Nous désignons une intégrale multiple d'ordre k en nous servant d'un seul signe intégral muni de l'indice inférieur k .

Or, en dérivant cette identité par rapport à a, b, c, d et en y faisant $a = d = 1, b = c = 0$, on a le système complet

$$p_1 \frac{\partial G}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial G}{\partial p_2} + \dots + p_m \frac{\partial G}{\partial p_m} = \mu G$$

$$q_1 \frac{\partial G}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial G}{\partial q_2} + \dots + q_m \frac{\partial G}{\partial q_m} = 0$$

$$p_1 \frac{\partial G}{\partial q_1} + p_2 \frac{\partial G}{\partial q_2} + \dots + p_m \frac{\partial G}{\partial q_m} = 0$$

$$q_1 \frac{\partial G}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial G}{\partial q_2} + \dots + q_m \frac{\partial G}{\partial q_m} = \mu G$$

L'intégration de ce système se fait facilement, en commençant par exemple par la seconde équation, et montre que G sera nécessairement une fonction homogène des déterminants $p_i q_j - p_j q_i$ qui sont au nombre de C_m^2 . Il est donc nécessaire et suffisant que

$$G(p_1, q_1, \dots, p_m, q_m) = H \left(\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} p_{m-1} & q_{m-1} \\ p_m & q_m \end{vmatrix} \right)$$

H étant une fonction homogène. Il est naturel de prendre pour H une fonction aussi simple que possible, quand on voudra calculer les invariants en partant a priori d'expressions telles que (4). Mais de pareilles expressions pourront être identiquement nulles, donc sans intérêt, et il devient nécessaire d'avoir un moyen pour éviter ce cas.

Prenons encore l'exemple de la cubique binaire

$$\Phi = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \iint \psi(p, q) (px + qy)^3 dp dq.$$

$$A = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \iint \psi(p, q) p^3 dp dq, \quad B = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \iint \psi p^2 q dp dq,$$

$$C = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \iint \psi p q^2 dp dq, \quad D = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \iint \psi q^3 dp dq$$

avec

$$\psi(x, y) = \frac{1}{xy} \left(\frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2 y} + \frac{C}{xy^2} + \frac{D}{y^3} \right)$$

Retrouvons l'invariant

$$I = \begin{vmatrix} A & 2B & C & 0 \\ 0 & A & 2B & C \\ B & 2C & D & 0 \\ 0 & B & 2C & D \end{vmatrix}$$

qui est de degré 4 et de poids 6. Nous aurons, en posant $(i, j) = p_i q_j - p_j q_i$,

$$I = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^8 \int \psi(p_1, q_1) \dots \psi(p_4, q_4) H[(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)] dp_1 \dots dq_4.$$

Prenons

$$H = (1, 2)^\alpha (1, 3)^\beta (1, 4)^\gamma (2, 3)^\lambda (2, 4)^\mu (3, 4)^\nu$$

les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ étant entiers positifs. Or, remarquons que toute intégrale

$$\iint \psi(p, q) p^i q^j dp dq$$

est nulle lorsque $i + j \neq 3$, i et j étant des entiers positifs ou nuls. On devra donc avoir, afin que I ne soit nul,

$$\alpha + \beta + \gamma = 3, \quad \alpha + \lambda + \mu = 3, \quad \beta + \lambda + \nu = 3, \quad \gamma + \mu + \nu = 3.$$

On retrouve ainsi les procédés de Cayley. On résout sans peine ce système et l'on a

$$\alpha = \nu, \quad \beta = \mu, \quad \gamma = 3 - \mu - \nu, \quad \lambda = 3 - \mu - \nu$$

les entiers μ et ν restant arbitraires. On a donc les deux solutions

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0, \quad \lambda = 0, \quad \mu = 1, \quad \nu = 2$$

$$\alpha = 3, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 3$$

donnant les invariants

$$I' = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^8 \int \psi(p_1, q_1) \dots \psi(p_4, q_4) (1, 2)^2 (1, 3) (2, 4) (3, 4)^2 dp_1 \dots dq_4$$

$$I'' = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^8 \int \psi(p_1, q_1) \dots \psi(p_4, q_4) (1, 2)^3 (3, 4)^3 dp_1 \dots dq_4$$

Il suffit de développer le noyau de I' suivant les puissances des p_k, q_k et d'appliquer

$$A = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint \psi(p_k, q_k) p_k^3 dp_k dq_k \text{ etc.}$$

pour obtenir

$$I' = -2(A^2 D^2 - 3B^2 C^2 + 4AC^3 + 4DB^3 - 6ABCD) = -2I.$$

Quant à I'' , il est nul identiquement, ce qui s'accorde avec le fait connu qu'il n'existe, outre I , aucun invariant de degré 4 attaché à la cubique binaire. Pour voir directement que I'' est nul, il suffit de remarquer que l'on peut changer la notation des variables d'intégration en écrivant p_2, q_2 à la place de p_1, q_1 et réciproquement. On a ainsi

$$I'' = 1 \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^8 \int \psi(p_2, q_2) \psi(p_1, q_1) \psi(p_3, q_3) \psi(p_4, q_4) (2, 1)^3 (3, 4)^3 dp_1 \dots dq_4,$$

d'où

$$I'' = -I'' \text{ et } I'' = 0.$$

Les exemples que nous venons d'exposer contiennent l'essentiel de la méthode. L'application à des cas moins simples ne conduit qu'à des difficultés de calcul. Prenons encore le cas d'une cubique ternaire

$$\Phi = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2z + 6Fxyz + 3Gy^2z + 3Hxz^2 + 3Kyz^2 + Lz^3$$

$$\psi = \left(\frac{1}{xyz}\right) \left(\frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2y} + \frac{C}{xy^2} + \frac{D}{y^3} + \frac{E}{x^2z} + \frac{F}{xyz} + \frac{G}{y^2z} + \frac{H}{xz^2} + \frac{K}{yz^2} + \frac{L}{z^3}\right)$$

d'où

$$\Phi = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^3 \int \psi(p, q, r) (px + qy + rz)^3 dp dq dr,$$

$$A = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^3 \int \psi(p, q, r) p^3 dp dq dr, \quad B = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^3 \int \psi(p, q, r) p^2 q dp dq dr \text{ etc.}$$

On a de même

$$I = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{3m} \int \psi(p_1, q_1, r_1) \dots \psi(p_m, q_m, r_m) H \begin{pmatrix} p_i & q_i & r_i \\ p_j & q_j & r_j \\ p_k & q_k & r_k \end{pmatrix} dp_1 \dots dr_m.$$

Convenons de représenter par (ijk) le déterminant formé avec les triplets $p_i, q_i, r_i, p_j, q_j, r_j, p_k, q_k, r_k$. Le noyau H de cet invariant de degré m sera une fonction homogène des déterminants (ijk) , au nombre de

C_m^3 , que l'on peut former avec les m triplets; il sera avantageux de réduire H à un monome, donc à un produit de tels déterminants. De plus, afin que I_m ne soit identiquement nul, il est nécessaire que les lettres de chaque triplet $p_i, q_i, r_i, i = 1, 2, \dots, m$, figurent dans trois déterminants du produit et dans trois seulement. H sera donc du degré $3m$ par rapport aux lettres p, q, r , et du degré m par rapport aux déterminants (ijk) . Le poids de I_m est donc $\mu = m$. En développant ce produit de déterminants, chaque terme de la somme obtenue sera un produit de la forme

$$p_1^\alpha q_1^\beta r_1^\gamma \cdot p_2^\delta q_2^\varepsilon r_2^\zeta \dots p_m^\lambda q_m^\mu r_m^\nu,$$

avec

$$\alpha + \beta + \gamma = \delta + \varepsilon + \zeta = \dots = \lambda + \mu + \nu = 3.$$

L'intégrale d'ordre $3m$ se décompose en un produit d'intégrales triples que l'on peut remplacer par les coefficients A, B , etc. de la forme, en employant les expressions intégrales de ces coefficients. On voit donc que l'emploi de l'intégrale n'a rien d'essentiel dans tout cela, ce n'est qu'un instrument de passage des produits de déterminants de Cayley aux invariants I_m de la forme. On peut donc supprimer le signe intégral, ainsi que les fonctions ψ dans l'expression de I_m et écrire par exemple

$$I_1 = (123)(234)(341)(412)$$

les 12 intégrations étant sous-entendues. Le calcul effectif de I_1 revient à la multiplication des 4 déterminants, suivie de la substitution de A à tout produit p_j^3 , de B à tout $p_j^2 q_i$ etc. C'est le principe même du symbolisme cayléen, et nous croyons que cette méthode d'exposition est plus directe, car on évite ainsi le détour qui consiste à former d'abord un invariant simultané de deux formes distinctes du même ordre et d'identifier ces deux formes après la formation de l'invariant.

Dans le cas général d'une forme de degré n à N variables, on aura

$$\Phi = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^N \int \psi(p_1, p_2, \dots, p_N) (p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_N x_N) dp_1 dp_2 \dots dp_N$$

qui conduit à écrire la forme

$$\Phi = \sum A_{i_1 i_2 \dots i_N} \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_N!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_N^{i_N}, \quad i_1 + i_2 + \dots + i_N = n,$$

tandis que

$$\psi = \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_N} \sum A_{i_1 i_2 \dots i_N} x_1^{-i_1} x_2^{-i_2} \dots x_N^{-i_N}.$$

Le raisonnement déjà employé montre qu'un invariant I_m de degré m s'exprime sous forme d'intégrale mN -uple dont le noyau est une fonction homogène des C_m^N déterminants $(i_1 i_2 \dots i_N)$. Chaque indice i devant

figurer n fois dans les produits, le noyau sera du degré nm par rapport aux lettres p_1, \dots, p_N , donc du degré $\frac{nm}{N}$ par rapport aux déterminants. Ce nombre $\mu = \frac{nm}{N}$ donne le poids de l'invariant. Si n et N sont premiers entre eux, on a donc $m = Nk$, $\mu = nk$, k étant un entier positif.

Tout ce qui suit pourrait être traité dans ce cas général. Nous préférons toutefois retourner aux formes binaires et ternaires pour éviter des complications d'écriture bien inutiles, la généralisation à un nombre quelconque de variables étant immédiate.

Les invariants simultanés d'un système de formes peuvent être obtenus de la même manière. Prenons

$$\Phi_2 = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint \psi_2 \cdot (px + qy)^2 dpdq$$

$$\Phi_3 = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint \psi_3 \cdot (px + qy)^3 dpdq.$$

Désignons par Φ_2 l'expression $\Phi_2(p_i q_i)$, etc. Un invariant simultané de Φ_2 et Φ_3 sera de la forme

$$I_m = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{2m} \int \psi_{2,1} \psi_{2,2} \dots \psi_{2,\lambda} \psi_{3,\lambda+1} \psi_{3,\lambda+2} \dots \psi_{3,m} \pi(i,j) dp_1 \dots dq_m.$$

Cet invariant sera de degré λ par rapport aux coefficients de Φ_2 , et de degré $m - \lambda$ par rapport à ceux de Φ_3 . Les facteurs du produit π seront choisis de manière que les lettres de chaque doublet p_i, q_i , $1 \leq i \leq \lambda$ figurent au carré, tandis que celles des doublets pour lesquels $\lambda + 1 \leq i \leq m$ figurent au cube. En écrivant π sous la forme $(12)^\alpha (13)^\beta \dots$, ceci conduira à la résolution d'un système diophantien, ce qui nous ramène aux méthodes classiques. Il est inutile d'insister sur le cas de plusieurs formes, qui diffère du précédent par la présence d'autant de fonctions ψ différentes sous le signe intégral qui donne I_m , leur distribution restant arbitraire.

Passons à la formation des covariants. La Hessienne, qui en est un des plus remarquables, peut être mise immédiatement sous forme intégrale, en remarquant que l'on a pour une forme ternaire, par exemple,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \psi(p, q, r) np(px + qy + rz)^{n-1} dpdqdr, \text{ etc.}$$

donc

$$\begin{vmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} & \Phi_{xz} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} & \Phi_{yz} \\ \Phi_{zx} & \Phi_{zy} & \Phi_{zz} \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^9 n^2(n-1)^3 \begin{vmatrix} p_1^2 & p_1 q_1 & p_1 r_1 \\ q_2 p_2 & q_2^2 & q_2 r_2 \\ r_3 p_3 & r_3 q_3 & r_3^2 \end{vmatrix} (p_1 x + q_1 y + r_1 z)^{n-2} \dots (p_3 x +$$

$$+ q_3 y + r_3 z)^{n-2} dp_1 \dots dr_3 = \frac{n^3(n-1)^3}{3!} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^9 \int \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3$$

$$\cdot (123)^2 (p_1 x + q_1 y + r_1 z)^{n-2} (p_2 x + q_2 y + r_2 z)^{n-2} (p_3 x + q_3 y + r_3 z)^{n-2} dp_1 \dots dr_3.$$

En employant la notation $(i) = p_i x + q_i y + r_i z$, on peut écrire, à un facteur numérique près

$$H = (123)^2 (1)^{n-2} (2)^{n-2} (3)^{n-2}$$

qui équivaut à la notation d'Aronhold et Clebsch. On voit d'une manière analogue que le Jacobien de 3 formes ternaires est un covariant, et de même pour N formes à N variables. Mais ce résultat est général. Tout autre covariant, écrit sous forme intégrale

$$\int \psi_1 \dots \psi_m H(p_1, \dots, r_m; x, y, z) dp_1 \dots dr_m$$

conduit à poser

$$H(\bar{p}_1, \bar{q}_1, \dots, \bar{r}_m; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \Delta^\mu H(p_1, q_1, \dots, r_m; x, y, z)$$

avec

$$x = a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z}, \quad \bar{p} = ap + a'q + a''r$$

$$y = a'\bar{x} + b'\bar{y} + c'\bar{z}, \quad \bar{q} = bp + b'q + b''r$$

$$z = a''\bar{x} + b''\bar{y} + c''\bar{z}, \quad \bar{r} = cp + c'q + c''r.$$

En dérivant l'équation en H par rapport à a, b, c, \dots on obtient un système complet qui montre que H est une fonction des déterminants (ijk) et des sommes $p_i x + q_i y + r_i z$. En nous contentant d'un produit de telles expressions, nous aurons

$$C = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{3m} \int \psi_1 \dots \psi_m \cdot K[(ijk)] (1)^{s_1} (2)^{s_2} \dots (m)^{s_m} dp_1 \dots dr_m$$

K étant un produit de μ déterminants; on a donc

$$\Delta^\mu C = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{3m} \int \psi_1 \dots \psi_m \cdot K[(ijk)] (1)^{s_1} (2)^{s_2} \dots (m)^{s_m} dp_1 \dots dr_m.$$

Mais $(\bar{i}) = (i)$, donc

$$\Delta^\mu C = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{3m} \int_{3m} \psi_1 \dots \psi_m \cdot K[(i j k)](1)^{s_1}(2)^{s_2} \dots (m)^{s_m} dp_1 \dots dr_m = \bar{C}$$

qui établit le caractère covariant de C . Il ne reste qu'à choisir K et les exposants s_1, \dots, s_m de manière que chaque indice i figure dans le noyau un nombre de fois égal au degré de la forme, ce qui conduit encore à un système diophantien, à éliminer ensuite les expressions qui changent de signe par permutation de deux indices, étant donc identiquement nulles; parmi les covariants obtenus, il importe de choisir ceux qui sont les plus simples et qui sont distincts. On obtient des covariants dépendant de plusieurs triplets $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, etc. en prenant ci-dessus (1) = $p_1x + q_1y + r_1z$, (2) = $p_2\xi + q_2\eta + r_2\zeta$, etc. d'une manière quelconque. Ainsi, les formes polaires de Φ sont données par

$$\omega_\lambda = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^3 \int_3 \psi(p, q, r)(px + qy + rz)^\lambda (p\xi + q\eta + r\zeta)^{n-\lambda} dpdqdr, \quad \lambda = 1, 2, \dots, n-1.$$

Les covariants simultanés d'un système de formes seront donnés par les mêmes intégrales dans lesquelles les ψ_1, \dots, ψ_m ne seront plus les mêmes, certaines d'entre elles étant relatives à la première forme, d'autres à la seconde, et ainsi de suite.

Un calcul analogue permet d'exprimer les contrevariants sous une forme analogue. Ce sont encore des formes en x, y, z qui se reproduisent multipliées par Δ^μ quand on remplace \bar{A}, \bar{B}, \dots par A, B, \dots les variables x, y, z étant contragrédientes cette fois, donc soumises à la transformation transposée, que subissent aussi p, q, r . On voit, par des raisonnements analogues aux précédents, que tout contrevariant est de la forme

$$C' = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{3m} \int_{3m} \psi_1 \dots \psi_m H[(i j k), (x, g h)] dp_1 \dots dr_m$$

en posant

$$(x, g h) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p_g & q_g & r_g \\ p_h & q_h & r_h \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons répéter pour les contrevariants tout ce que nous venons de remarquer relativement aux covariants à plusieurs triplets de variables (contragrédientes cette fois) et aux covariants simultanés. En admettant à la fois des triplets de variables cogrédientes et d'autres contragrédientes, on obtient les formes mixtes, dont le noyau dépend des $(i j k)$, $(x, g h)$ et (i) en même temps.

Envisageons encore les combinants. Ce sont des invariants simultanés relatifs à des formes de même degré, qui jouissent d'une propriété supplémentaire: quand on applique une transformation linéaire et homogène aux formes données, un tel invariant se reproduit multiplié par une puissance du module de cette transformation. Les résultants sont des combinants. Prenons le cas simple

$$\Phi = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \quad \Phi' = A'x^2 + 2B'xy + C'y^2.$$

On a

$$R(\Phi, \Phi') = \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}^2 - 4 \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^8 \int_8 \psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4 [(13)(24)][(14)(23) - (12)(34)] dp_1 \dots dq_4$$

Posons

$$\bar{\Phi} = \lambda\Phi + \mu\Phi', \quad \bar{\Phi}' = \lambda'\Phi + \mu'\Phi', \quad \delta = \lambda\mu' - \lambda'\mu.$$

On obtient $\bar{\psi}$ et $\bar{\psi}'$ par la même transformation et pour avoir $R(\bar{\Phi}, \bar{\Phi}')$ il suffit de remplacer les ψ par des $\bar{\psi}$ sous l'intégrale ci-dessus. Mais il est avantageux de faire cette opération par étapes, en remplaçant d'abord ψ_1 et ψ_3 par $\bar{\psi}_1$ et $\bar{\psi}_3$, sans toucher à ψ_2 et ψ_4 . En effectuant le produit, l'intégrale se décompose en 4 intégrales correspondant à

$$\lambda\mu' \psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4, \quad \mu\mu' \psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4, \quad \mu\lambda' \psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4, \quad \lambda\lambda' \psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4.$$

La première intégrale donne $\lambda\mu'R(\Phi, \Phi')$ et la troisième — $\mu\lambda'R(\Phi, \Phi')$, ce que l'on voit en y changeant entre eux les indices 1 et 3. La seconde intégrale est nulle, car on peut y changer 1 et 3 entre eux sans que $\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4$ change de signification, tandis que le noyau change de signe. De même pour la quatrième intégrale. On n'a pas eu affaire, jusqu'ici, aux indices 2 et 4. En remplaçant maintenant ψ_2 et ψ_4 par $\bar{\psi}_2$ et $\bar{\psi}_4$, on peut répéter ce que l'on vient de dire, et l'on voit que $R(\bar{\Phi}, \bar{\Phi}') = \delta^2 R(\Phi, \Phi')$, donc R est un combinant. D'une manière générale, pour deux formes binaires d'ordre n

$$C = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{4m} \int_{4m} \psi_1 \dots \psi_m \psi'_{m+1} \dots \psi'_{2m} H[(i j)] dp_1 \dots dq_{2m}$$

on pourra refaire ce raisonnement, en m étapes successives. On voit ainsi que H doit changer de signe chaque fois que l'on permute i avec $i + m$. Donc

$$H = (1, m+1)(2, m+2) \dots (m, 2m) K[(i j)]$$

K étant une fonction homogène des (ij) qui reste inaltérée par les mêmes permutations. Les conditions qui expriment que chaque indice figure n

fois dans H donnent un système diophantien dont la discussion permet de déterminer tous les combinants. Le cas de plus de deux formes à un nombre quelconque de variables peut être traité d'une manière analogue.

Mais notre méthode nous permet de ramener le calcul des concomitants d'une forme à ceux d'un système de formes de degrés moindres, lorsque certaines conditions sont satisfaites. Prenons une forme binaire

$$\Phi = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int \psi \cdot (px + qy)^n dpdq.$$

Un invariant de degré m s'écrit

$$I_m = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{2m} \int \psi_1 \psi_2 \dots \psi_m \Pi(ij) dp_1 \dots dq_m.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{n} \Phi'_x = \frac{1}{2\pi i} \iint p \cdot \psi \cdot (px + qy)^{n-1} dpdq = \frac{1}{2\pi i} \iint \sigma \cdot (px + qy)^{n-1} dpdq,$$

$$\frac{1}{n} \Phi'_y = \frac{1}{2\pi i} \iint q \cdot \psi \cdot (px + qy)^{n-1} dpdq = \frac{1}{2\pi i} \iint \tau \cdot (px + qy)^{n-1} dpdq$$

en posant $\sigma = p\psi$, $\tau = q\psi$.

Supposons $m = 2\alpha$, $\alpha > 1$. Admettons que l'on peut extraire du noyau $\Pi(ij)$ des facteurs (ij) en nombre α et tels que chaque indice de 1 à m figure une fois et une seule dans le produit de ces facteurs; nous dirons alors que le noyau admet un *diviseur linéaire*. Désignons par $\omega(ij)$ ce produit et par $\Pi_1(ij)$ le produit des facteurs restants, de manière que $\Pi = \omega \Pi_1$. Remplaçons Π par $\omega \Pi_1$ dans l'expression intégrale de l'invariant I_m et développons le produit $\omega(ij)$. Nous aurons une somme de termes que l'on peut écrire

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{2m} \iint \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_\nu} \tau_{i_\nu+1} \dots \tau_{i_m} \Pi_1(ij) dp_1 \dots dq_m,$$

i_1, i_2, \dots, i_m étant les nombres de 1 à m dans un certain ordre. Or c'est là un invariant simultané des formes $\frac{1}{n} \Phi'_x, \frac{1}{n} \Phi'_y$. L'invariant I_m de Φ sera donc une fonction rationnelle des invariants simultanés des deux formes dérivées lorsque m est pair, le noyau admettant un diviseur linéaire.

Lorsque m est impair, ou lorsque le noyau n'admet pas de diviseur linéaire, on pourra encore choisir $\omega(ij)$ de manière que tous les indices figurent une seule fois dans ce produit, à l'exception de certains d'entre

eux qui figurent 2 fois, ou plus de 2 fois. Or,

$$\frac{1}{n(n-1)} \Phi''_{x^2} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint p^2 \psi \cdot (px + qy)^{n-2} dpdq,$$

$$\frac{1}{n(n-1)} \Phi''_{xy} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint pq \psi \cdot (px + qy)^{n-2} dpdq,$$

$$\frac{1}{n(n-1)} \Phi''_{y^2} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint q^2 \psi \cdot (px + qy)^{n-2} dpdq$$

et l'on voit que, en remplaçant encore Π par $\omega \Pi_1$ dans I_m et en développant ω on a une somme d'intégrales qui sont des invariants simultanés du système $\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi''_{x^2}, \Phi''_{xy}, \Phi''_{y^2}, \dots$

Ainsi, le calcul de certains invariants de degré pair sera plus aisé dans le cas des formes binaires, mais dans tous les cas on sera ramené à des formes de degré moindre. Le procédé pouvant être réitéré, on voit que tout invariant de degré pair dont le noyau admet assez de diviseurs linéaires est une fonction rationnelle et entière des invariants simultanés d'un système de formes quadratiques et linéaires.

La généralisation aux formes à N variables est facile. Dans le cas des formes quartiques ternaires, nous avons vu que $m = 3k$, $\mu = 4k$. Les invariants dont les noyaux admettent des diviseurs linéaires seront encore rationnels et entiers par rapport aux invariants simultanés de $\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z$, ou encore par rapport à ceux des 6 formes quadratiques $\Phi''_{x^2}, \Phi''_{y^2}, \Phi''_{z^2}, \Phi''_{yz}, \Phi''_{zx}, \Phi''_{xy}$, lorsque le noyau admet 2 diviseurs linéaires. Ceux-ci s'expriment à leur tour en fonction des invariants simultanés des 10 formes ternaires linéaires Φ''_{x^2} , etc., lorsque le noyau admet 3 diviseurs linéaires. Pour une cubique quaternaire, on voit que $m = 4k$, $\mu = 3k$, et les invariants dont les noyaux admettent un diviseur linéaire s'expriment de même, par scission du noyau, sous forme rationnelle et entière en fonction des invariants simultanés du système de formes quadratiques $\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z, \Phi'_t$.

Mais le procédé est applicable, sans modification, aux covariants et contrevariants. La scission du noyau permet encore d'écrire certains covariants en fonction rationnelle et entière des covariants simultanés de formes de moindre degré. Il en est de même des contrevariants.

Invariants affines des formes ternaires

Les recherches géométriques modernes ont accordé un intérêt particulier à un sous-groupe du groupe projectif, que l'on obtient en prenant $a'' = b'' = 0$, $c'' = 1$ dans

$$x = a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z}, \quad y = a'\bar{x} + b'\bar{y} + c'\bar{z}, \quad z = a''\bar{x} + b''\bar{y} + c''\bar{z}.$$

On distingue ainsi entre propriétés projectives et propriétés affines d'une même configuration géométrique, et il est important de le faire dans le cas des variétés algébriques. On est ainsi conduit à la recherche

des invariants affines d'une ou de plusieurs formes ternaires, et ce problème peut être traité par la méthode que nous venons d'indiquer. Il n'y a rien à changer quant à la manière d'écrire la forme Φ sous forme intégrale, et à l'expression de ses coefficients. Mais les triplets p, q, r subiront cette fois la transformation

$$\begin{aligned} \bar{p} &= ap + a'q, \\ \bar{q} &= bp + b'q, \\ \bar{r} &= cp + c'q + r. \end{aligned} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}.$$

On est conduit à poser la condition suivante pour le noyau d'un invariant affine

$$H(ap + a'q, bp + b'q, cp + c'q + r, \dots) = \Delta^n H(p, q, r, \dots).$$

En dérivant par rapport à a, a', b, b', c, c' et en faisant $a = b' = 1, a' = b = c = c' = 0$, on a un système complet qui montre que H doit être de la forme

$$H = H[(i j k), (gh)]$$

avec $(gh) = p_g q_h - q_g p_h$. Les conditions supplémentaires relatives au degré de ces expressions par rapport à chaque indice, et relatives à son comportement quand on permute ces indices, se maintiennent inchangées. En y ajoutant les expressions $(i), (x, gh), (x, i)$, on forme des « covariants et contrevariants affines », qui joueront un rôle dans la classification des propriétés affines des courbes algébriques. Signalons, par exemple, la « Hessienne affine » d'une courbe plane

$$\begin{vmatrix} \Phi''_{xx} & \Phi''_{xy} \\ \Phi''_{yx} & \Phi''_{yy} \end{vmatrix} = \frac{n^2(n-1)^2}{2!} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^6 \int \psi_1 \psi_2 (12)^2 (1)^n {}^{-2} (2)^{n-2} dp_1 \dots dr_2$$

dont le degré est $2n - 4$.

Il est clair que les invariants projectifs d'une forme seront des fonctions, non nécessairement rationnelles, des invariants affines de la même forme. On doit s'attendre à l'existence de certaines « syzygies » reliant ces deux sortes d'invariants. La même remarque s'applique aux concomitants de tout sous-groupe du groupe projectif. On peut voir ici un autre principe de fractionnement du calcul, en se proposant d'exprimer les concomitants projectifs en fonction des concomitants relatifs aux sous-groupes du groupe projectif. Mais l'expression des premiers en fonction des seconds ne sera rationnelle cette fois, et ceci est dû au fait que le groupe projectif ne possède pas de sous-groupe invariant différent de l'unité¹⁾. Dans la recherche des syzygies en question on peut, toutefois, appliquer avec profit la méthode de scission du noyau.

¹⁾ Voir S. Qie *Theorie der Transformationsgruppen*, I, III.

DESPRE VALENȚA DOMENIILOR RIEMANNIENE

(Lucrările sesiunii generale științ, iunie 1950 București
Ed. Acad. R.P.R., 1951, (195-203)

Comunicare prezentată în ședința din 3 iunie 1950

Se știe că dacă $Z = f(z)$ este o funcție holomorfă într-un domeniu D , valorile luate de Z pentru $z \in D$ formează un domeniu Δ care poate acoperi de mai multe ori unele regiuni ale planului (Z), și în acest caz se spune că $f(z)$ este multivalentă în domeniul D . Este comod să considerăm domeniul Δ ca fiind așternut pe o suprafață Riemann, obținută prin suprapunerea mai multor plane între care se stabilește o comunicație cu ajutorul unor tăieturi făcute de-a lungul unor curbe.

Vom numi *domeniu riemannian* (sau cu multiplă acoperire) un domeniu plan Δ , caracterizat prin proprietatea că el acoperă de mai multe ori anumite regiuni ale planului (Z), fie că Δ se poate obține, sau nu, printr-o transformare $Z = f(z)$ aplicată unui domeniu D , cu simplă acoperire (univalent), din planul (z). Astfel, dacă un plan, conceput ca o membrană elastică, este îndoit în formă de cută, în sensul comun al cuvintului, el devine un domeniu cu triplă acoperire în regiunea cutei însă un astfel de domeniu nu se poate obține aplicând unui domeniu cu simplă acoperire o transformare $Z = f(z)$, unde $f(z)$ este o funcție analitică. În adevăr, suprafața Riemann a unei funcții analitice nu poate prezenta astfel de cute¹⁾.

Fie Δ un domeniu riemannian, în acest sens generalizat, adică un domeniu cu acoperire multiplă. El se descompune în alte domenii, cu simplă acoperire, în modul următor: Să notăm cu Δ_1 cea mai mare mulțime deschisă din (Z) care se găsește acoperită o singură dată de Δ , cu Δ_2 cea mai mare mulțime deschisă acoperită de 2 ori de Δ , etc. Vom scrie simbolic:

$$\Delta = \Delta_1 + 2\Delta_2 + \dots + n\Delta_n + \dots$$

Dacă mulțimea Δ_n este vidă pentru $n > p$, însă $\Delta_p = 0$, vom spune că întregul p este ordinul de multivalență, sau mai scurt, *valența* domeniului Δ . Dacă un punct $\zeta \in \Delta_n$, vom spune că *valența locală* în ζ este q .

Vom stabili aici unele relații între valența p a unui domeniu Δ și anumite constante metrice legate de acest domeniu, enunțând și o condiție necesară și suficientă pentru ca Δ să aibă valența p . Aceste rezultate își găsesc aplicații la caracterizarea funcțiilor analitice univalente sau multivalente într-un domeniu. Asupra acestei aplicații, vom reveni într-o Notă ulterioară.

¹⁾ G. Călugăreanu *Sur la structure des transformations ponctuelles du plan*. *Mathematica (Cluj)*, XVIII (1942), 68.