ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

# BULETIN ȘTIINȚIFIC

## SECȚIUNEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE

1

TOMUL VI

IANUARIE — FEBRUARIE — MARTIE 1954



EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

# BULETIN ŞTIINŢIFIC

## Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice

Tomul VI/1954

## INDICE SISTEMATIC ALFABETIC

*FIZICĂ*



449

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

# BULETIN ŞTIINŢIFIC

## SECŢIUNEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE

Tomul VI, nr. 1 Ianuarie-februarie-martie 1954

SUMAR



EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

# BULLETIN SCIENTIFIQUE

## SECTION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

Tome VI, N° 1 Janvier-février-mars 1954

## SOMMAIRE



ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

# НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

## ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

Том VI, № 1 Январь—февраль—март 1954

## СОДЕРЖАНИЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

BULETIN ŞTIINŢIFIC
SECŢIUNEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE
Tomul VI, nr. 1, 1954

# ASUPRA UNEI PROBLEME DE PROPAGARE A CĂLDURII

DE

G. CĂLUGĂREANU şi FR. RADO

*Comunicare prezentată de MIRON NICOLESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R., în şedinţa din 11 ianuarie 1954*

**1.** În prezenta lucrare vor fi arătate cercetările care sînt în legătură cu problema tehnică a uzurii ţevilor în cazanele cu aburi, ridicată de ing. L. N é m e t i. Asupra acestei probleme a mai apărut o lucrare cu acelaşi titlu [1], în care s-a studiat cazul unui tub de lungime infinită şi s-a formulat problema matematică corespunzătoare pentru acest caz. În încercarea de a o rezolva s-a ivit dificultatea rezolvării unui sistem liniar infinit de o natură complicată. În legătură cu acest sistem a apărut Nota [2], care scoate în evidenţă unele proprietăţi ale sistemului şi arată dificultăţile de rezolvare. În această lucrare, problema matematică este formulată pentru cazul tubului limitat. O încercare, de altă natură, în cazul tubului limitat [3] conduce deasemenea la rezolvarea unui sistem liniar infinit.

In Nota [1] problema s-a formulat astfel: să se integreze ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{1+y}\,\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{1}$$

unde funcţia $u=u(y,z)$ este regulată în banda $-\varepsilon<y<\varepsilon$ şi care trebuie să satisfacă următoarele condiţii la limită

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y}=\gamma u, \ \text{pentru}\ y=-\varepsilon,\\ &\frac{\partial u}{\partial y}=1, \ \text{pentru}\ y=\varepsilon, \end{aligned} \tag{2}$$

în care

$$\gamma=\begin{cases}\gamma^+, z>0\\ \gamma^-, z<0,\end{cases} \qquad \gamma^+>\gamma^->0.$$

Aici $\varepsilon$ reprezintă un parametru fără dimensiuni, care ia valori mici. Considerăm cazul tubului limitat. Banda infinită se înlocuieşte cu dreptunghiul

$$\begin{gathered} -\varepsilon<y<\varepsilon\\ -l<z<l. \end{gathered}$$

Menţinînd condiţiile (2) pe frontiera $y=-\varepsilon$ şi $y=\varepsilon$, ecuaţia cu derivate parţiale (1) urmează să se integreze cu condiţiile la limită (2) şi

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0, \qquad \text{pentru } z=\pm l. \tag{3}$$

Prin următoarea transformare:

$$y=\frac{2}{\pi}\varepsilon' Y,\ z=\frac{2}{\pi}\varepsilon' Z; \quad \varepsilon=\frac{\pi}{2}\varepsilon'; \quad l=\frac{2}{\pi}\varepsilon'\mathfrak{L}$$

şi schimbînd pe $Y$ în $y$, $Z$ în $z$, $\varepsilon'$ în $\varepsilon$, sîntem conduşi la următoarea ecuaţie cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon y}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{4}$$

şi condiţiile la limită

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}=\varepsilon\gamma u, & \text{pentru } y=-\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\varepsilon\ , & \text{pentru } y=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=0\ , & \text{pentru } z=\pm\mathfrak{L}. \end{cases} \tag{5}$$

Datorită faptului că $\varepsilon$ la valori mici, este natural să căutăm soluţia ecuaţiei (4) sub forma unei dezvoltări după puterile lui $\varepsilon$. Această metodă se va aplica imediat pentru un caz mai general, în care domeniul dreptunghiular se înlocuieşte cu un domeniu simplu conex mărginit, şi ecuatia (4) cu una mai generală. Conţinutul prezentei lucrări stabileşte următoarea

T e o r e m ă. *Fie D un domeniu plan mărginit de o curbă analitică închisă. Ecuaţia cu derivate parţiale*

$$\left[1+\varepsilon p(\xi,\eta)\right]\Delta u+\varepsilon\left[q(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \xi}+r(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \eta}\right]=0 \tag{6}$$

*cu condiţia la limită*

$$\frac{du}{dn}=\varepsilon\left[A_1(\sigma)u+B_1(\sigma)\right] \tag{7}$$

*verificată de-a lungul frontierei domeniului D, admite o soluţie unică de forma*

$$u=u_0(\xi,\eta)+\varepsilon u_1(\xi,\eta)+\varepsilon_2 u_2(\xi,\eta)+\dots, \tag{8}$$

*pentru* $|\varepsilon|<\varepsilon_0$. *Coeficienţii* $p(\xi,\eta)$, $q(\xi,\eta)$ *şi* $r(\xi,\eta)$ *sînt funcţii mărginite integrabile în D, iar* $A_1(\sigma)$ *şi* $B_1(\sigma)$ *sînt funcţii mărginite integrabile de-a lungul frontierei şi* $\int A_1(\sigma)\,d\sigma\neq 0$, *integrala fiind luată de-a lungul frontierei domeniului D.*

**2.** Transformăm domeniul $D$, situat în planul $\xi,\eta$ în cercul unitate din planul $x, y$, punînd

$$\zeta=\xi+i\eta=f(x+iy)=f(z) \tag{9}$$



unde $f(z)$ este o funcţie olomorfă şi univalentă în cercul unitate $C$ din planul variabilei complexe $z$. Ecuaţia cu derivate parţiale (6) devine

$$[1+\varepsilon a(x,y)]\Delta u+\varepsilon\left[b(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+c(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right]=0, \tag{10}$$

cu condiţia la limită, verificată de-a lungul cercului unitate,

$$\frac{du}{dn}=\varepsilon[A(s)u+B(s)], \tag{11}$$

unde

$$a(x,y)=p(\xi,\eta)$$
$$b(x,y)=q(\xi,\eta)\frac{\partial\xi}{\partial x}+r(\xi,\eta)\frac{\partial\eta}{\partial x}$$
$$c(x,y)=r(\xi,\eta)\frac{\partial\xi}{\partial x}-q(\xi,\eta)\frac{\partial\eta}{\partial x}$$
$$A(s)=A_1(\sigma)\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2}$$
$$B(s)=B_1(\sigma)\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2};$$

punctele $(\xi,\eta)$ din domeniul $D$ şi $(x,y)$ din cercul unitate se corespund şi tot astfel punctele definite de arcele $\sigma$ şi $s$ pe frontierele acestor domenii. Ipotezele asupra funcţiilor $p(\xi,\eta)$, $q(\xi,\eta)$, $r(\xi,\eta)$ $A_1(\sigma)$ şi $B_1(\sigma)$ din enunţul teoremei rămîn valabile pentru $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $A(s)$ şi $B(s)$.

**3.** Căutăm o soluţie a ecuaţiei (10) de forma,

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\varepsilon u_1(x,y)+\dots+\varepsilon^n u_n(x,y)+\dots \tag{12}$$

Înlocuind în ecuaţiile (10) şi (11) obţinem prin identificare

$$\begin{cases} \Delta u_0=0, & \dfrac{du_0}{dn}=0 \\ \Delta u_1+a\Delta u_0+b\dfrac{\partial u_0}{\partial x}+c\dfrac{\partial u_0}{\partial y}=0, & \dfrac{du_1}{dn}=Au_0+B \\ \Delta u_2+a\Delta u_1+b\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+c\dfrac{\partial u_1}{\partial y}=0, & \dfrac{du_2}{dn}=Au_1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ \Delta u_n+a\Delta u_{n-1}+b\dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+c\dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial y}=0, & \dfrac{du_n}{dn}=Au_{n-1} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \end{cases} \tag{13}$$

Problema este astfel transformată într-un șir de probleme Neumann pentru ecuația de tip Poisson

$$\Delta u_n = -\left(a\Delta u_{n-1} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + c\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right), \tag{14}$$

condiția la limită fiind

$$\frac{du_n}{dn} = Au_{n-1}, \tag{15}$$

unde $u_{n-1}$ se presupune determinat de condițiile analoge de un rang mai mic. În cazul $n = 1$, condiția la limită (15) trebuie înlocuită cu

$$\frac{du_1}{dn} = Au_0 + B.$$

Fie

$$\omega_{n-1}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(C)}\left(a\Delta u_{n-1} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + c\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta}\right) g(x,y;\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \tag{16}$$

soluția ecuației Poisson (14), care este nulă pe cercul $C$, $g(x,y;\xi,\eta)$; reprezintă aici funcția lui Green pentru cercul $C$. Punem

$$u_n = \omega_{n-1}(x,y) + H_n(x,y);$$

pentru $H_n(x,y)$ avem

$$\Delta H_n = 0 \quad \text{și} \quad \frac{dH_n}{dn} = Au_{n-1} - \frac{d\omega_{n-1}}{dn} \text{ pe cercul } C.$$

Sîntem conduși astfel la o problemă Neumann pentru ecuația lui Laplace în cazul cercului. Integrala este dată de formula lui Dini

$$H_n(x,y) = \sigma_n(x,y) + C_n,$$

$$\sigma_n(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_C \left(Au_{n-1} - \frac{d\omega_{n-1}}{dn}\right)\log R\, ds, \tag{17}$$

unde $C_n$ este o constantă, iar $R$ distanța punctului $(x,y)$ la punctul curent de pe cerc.

Constanta $C_n$ se determină scriind condiția necesară pentru ca problema lui Neumann relativă la $H_{n+1}(x,y)$ să fie posibilă. Condiția este

$$\int_C \frac{dH_{n+1}}{dn}\, ds = 0,$$

sau

$$\int_C \left(Au_n - \frac{d\omega_n}{dn}\right) ds = 0.$$

Înlocuind

$$u_n = \omega_{n-1} + \sigma_n + C_n \tag{18}$$



deducem

$$C_n = \frac{1}{\int_C A\,ds}\int_C \left[\frac{d\omega_n}{dn} - A(\omega_{n-1} + \sigma_n)\right] ds. \tag{19}$$

Am stabilit deci următorul algoritm pentru calculul succesiv al funcțiilor $u_n(x,y)$ din dezvoltarea seriei (12): presupunem cunoscut $u_{n-1}$, calculăm prin formula (16) funcția $\omega_{n-1}(x,y)$ și prin (17) calculăm $\sigma_n(x,y)$; cu aceștia formăm funcția

$$\omega_{n-1}(x,y) + \sigma_n(x,y) = u_n(x,y) - C_n, \tag{20}$$

care diferă de $u_n\,(x, y)$ numai printr-o constantă. Utilizînd (16) putem calcula $\omega_n\,(x, y)$, observînd că în (16) apar numai derivatele parțiale ale funcției $u_n$, sau, ceea ce este același lucru, derivatele parțiale ale funcției $u_n(x, y) - C_n$. Formula (19) determină constanta $C_n$.

**4.** Vom studia convergența seriei (12), majorînd funcțiile $u_n(x, y)$. Notăm

$$\sup |u_n| = U_n$$

$$\sup\left|\sqrt{1-r^2}\,\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| = V_n, \quad \sup\left|\sqrt{1-r^2}\,\frac{\partial u_n}{\partial y}\right| = V_n',$$

$$\sup |\sqrt{1-r^2}\,\Delta u_n| = W_n,$$

unde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ și supremum se ia în cercul $C$ (domeniul închis). Funcțiile $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ și $A(s)$ fiind mărginite, avem

$$|a(x, y)| \leqslant L, \quad |b(x, y)| \leqslant L, \quad |c(x, y)| \leqslant L, \quad |A(s)| \leqslant M$$

pentru toate punctele din interiorul cercului $C$, și de pe cerc. Notăm mai departe

$$\frac{1}{\left|\int_C A\,ds\right|} = N.$$

Majorînd integrala dublă (16), obținem

$$|\omega_{n-1}| \leqslant \frac{L}{2\pi}(W_{n-1} + V_{n-1} + V_{n-1}')\iint_{(C)}\frac{g(x,y;\xi,\eta)}{\sqrt{1-(\xi^2+\eta^2)}}\, d\xi\, d\eta. \tag{21}$$

Pentru a calcula integrala dublă din membrul doi, observăm că ea este soluția ecuației lui Poisson

$$\Delta\psi = -\frac{1}{\sqrt{1-r^2}},$$

care se anulează pe contur și este regulată în interiorul lui. Deoarece $\psi$ este independent de argumentul $\varphi$, transformînd $\Delta\psi$ în coordonate polare obținem

$$r\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{d\psi}{dr} = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}},$$

de unde, ţinînd seama că $\psi$ este o funcţie regulată în origine, iar $\psi(1) = 0$,

$$r\frac{d\psi}{dr} = \sqrt{1-r^2} - 1,$$

$$\psi = \sqrt{1-r^2} - \log\left(1 + \sqrt{1-r^2}\right).$$

Aceasta fiind o funcţie monotonă de $r$ în intervalul $[0,1]$, îşi atinge maximul pentru $r=0$

$$\max \psi = \max|\psi| = 1 - \log 2 = \Gamma < 1.$$

Din (21) rezultă

$$|\omega_{n-1}| \leqslant L\Gamma\,(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1}). \tag{22}$$

Pentru a majora $\dfrac{d\omega_{n-1}}{dn}$ derivăm normal în formula (16)

$$\frac{d\omega_{n-1}}{dn} = \frac{1}{2\pi}\iint_{(C)}\left(a\,\Delta u_{n-1} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + c\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta}\right)\frac{dg}{dn}\,d\xi\,d\eta.$$

Notînd argumentul punctului $(x, y)$ de pe cercul $C$ cu $\theta$, obţinem

$$\left|\frac{d\omega_{n-1}}{dn}\right| \leqslant \frac{L}{2\pi}(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1})\iint_{(C)}\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\theta)}\,\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{(C)}\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{1+\rho^2-2\rho\cos\alpha}\,\rho\,d\rho\,d\alpha = \int_0^1\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos\alpha}\,d\alpha =$$

$$= \int_0^1\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = 1.$$

Observînd că integrala în raport cu $\alpha$ este egală cu 1, în virtutea formulei lui Poisson, rezultă

$$\left|\frac{d\omega_{n-1}}{dn}\right| \leqslant L\,(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1}). \tag{23}$$

Să trecem la majorarea lui $\sigma_n\ (x, y)$. Utilizînd formulele (17) şi (23), avem

$$|\sigma_n| \leqslant \frac{1}{\pi}\left[MU_{n-1} + L\,(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1})\right]\int_0^{2\pi}|\log R|\,ds.$$

Vom arăta la punctul 6 că avem

$$\Gamma' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\log R|\,ds \leqslant \frac{2\pi}{3}. \tag{24}$$

Aşadar pentru $\sigma_n$ avem

$$|\sigma_n| \leqslant \Gamma'\left[MU_{n-1} + L\,(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1})\right]. \tag{25}$$



Majorînd constanta $C_n$, dată de (19), se obţine utilizînd (23) pentru indicele $n$, apoi (22) şi (25)

$$|C_n| \leqslant N\{L\,(W_n + V_n + V'_n) + M\,[L\,(\Gamma + \Gamma')\,(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1}) + \Gamma' M U_{n-1}]\}. \tag{26}$$

Formula (18) ne dă, ţinînd seama de (22), (25) şi (26),

$$U_n \leqslant NL\,(W_n + V_n + V'_n) + M\Gamma'\,(MN+1)U_{n-1} + L\,(\Gamma + \Gamma')\,(MN+1)\,(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1}). \tag{27}$$

Obţinem majorări pentru $V_n$ şi $V'_n$ calculînd $\dfrac{\partial u_n}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial u_n}{\partial y}$. Ţinînd seama de (18), avem

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_n}{\partial x}\ ;\quad \frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_n}{\partial y}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\iint_{(C)}\left(a\Delta u_{n-1} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + c\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta}\right)\frac{dg}{dx}\,d\xi\,d\eta,$$

$$\left|\frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x}\right| \leqslant \frac{L}{2\pi}(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1})\iint_{(C)}\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|d\rho\,d\varphi.$$

Vom arăta la punctul 6 că avem

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{(C)}\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|d\rho\,d\rho \leqslant \frac{\Gamma''}{\sqrt{1-r^2}}\ ;\quad 0 < \Gamma'' < 4, \tag{29}$$

unde $r^2 = x^2 + y^2$. Ţinînd seama de simetrie, rezultatul se aplică şi pentru $\dfrac{\partial \omega_{n-1}}{\partial y}$ ; deci

$$\left|\frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial y}\right| \leqslant \frac{L\Gamma''}{\sqrt{1-r^2}}(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1}),$$

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial x} = \frac{1}{\pi}\int_C\left(Au_{n-1} - \frac{d\omega_{n-1}}{dn}\right)\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x}\,ds, \tag{30}$$

$$\left|\frac{\partial \sigma_n}{\partial x}\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\left[MU_{n-1} + L\,(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1})\right]\int_C\frac{1}{R}\left|\frac{\partial R}{\partial x}\right|ds,$$

$$\int_C\frac{1}{R}\left|\frac{\partial R}{\partial x}\right|ds = \int_C\frac{|x-\xi|}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\,ds = \int_0^{2\pi}\frac{|r\cos\theta - \cos\varphi|}{1 + r^2 - 2r\cos(\varphi-\theta)}\,d\varphi.$$

Aplicînd inegalitatea lui Buniakovski

$$\left[\int_0^{2\pi}1\cdot\frac{|r\cos\theta - \cos\varphi|\,d\varphi}{1 + r^2 - 2r\cos(\varphi-\theta)}\right]^2 \leqslant 2\pi\int_0^{2\pi}\left[\frac{r\cos\theta - \cos\varphi}{1 + r^2 - 2r\cos(\varphi-\theta)}\right]^2 d\varphi$$

și ținînd seama de

$$\left[\frac{r\cos\theta - \cos\varphi}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}\right]^2 = \frac{(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\cdot\frac{1}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)},$$

obținem

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{r\cos\theta-\cos\varphi}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}\right]^2 d\varphi \leqslant \frac{2\pi}{1-r^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)\,d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)} = \frac{2\pi}{1-r^2}$$

$$\int_C \frac{1}{R}\left|\frac{\partial R}{\partial x}\right| ds \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Găsim în definitiv pentru derivatele parțiale ale lui $\sigma_n$

$$\left|\frac{\partial\sigma_n}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\sigma_n}{\partial y}\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-r^2}}[MU_{n-1}+L(W_{n-1}+V_{n-1}+V'_{n-1})]. \qquad (31)$$

Ținînd seamă de (28), (30) și (31), avem

$$\sqrt{1-r^2}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| \leqslant 2MU_{n-1}+L(\Gamma''+2)(W_{n-1}+V_{n-1}+V'_{n-1}) = K,$$

în orice punct interior cercului unitate. Atunci

$$V_n = \sup\left|\sqrt{1-r^2}\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| \leqslant K, \quad \text{și la fel} \quad V'_n \leqslant K,$$

deci putem scrie

$$V_n,\ V'_n \leqslant 2MU_{n-1}+L(\Gamma''+2)(W_{n-1}+V_{n-1}+V'_{n-1}). \qquad (32)$$

Ținînd seamă de (14), avem imediat

$$\sqrt{1-r^2}\,\Delta u_n = -\left(a\sqrt{1-r^2}\,\Delta u_{n-1} + b\sqrt{1-r^2}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + c\sqrt{1-r^2}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right)$$

$$\left|\sqrt{1-r^2}\,\Delta u_n\right| \leqslant L(W_{n-1}+V_{n-1}+V'_{n-1}),$$

pentru orice punct interior cercului unitate, deci

$$W_n \leqslant L(W_{n-1}+V_{n-1}+V'_{n-1}). \qquad (33)$$

**5.** Pe baza inegalităților (27), (32) și (33) vom arăta că seria (12), pentru soluția căutată $u(x, y)$, converge uniform în cercul închis $C$, pentru $|\varepsilon|$ destul de mic, iar în acest caz seriile derivate în raport cu $x$ și $y$ converg uniform în orice cerc concentric cu $C$ și de rază $< 1$.

Notăm pentru prescurtare

$$Z_n = V_n + V'_n + W_n. \qquad (34)$$



Din inegalitățile (27), (32) și (33) rezultă

$$\begin{aligned} U_n &\leqslant \alpha U_{n-1} + \beta Z_{n-1}, \\ Z_n &\leqslant \gamma U_{n-1} + \delta Z_{n-1}, \quad (n = 1,2,\ldots), \end{aligned} \qquad (35)$$

unde s-a notat

$$\begin{aligned} \alpha &= M[4LN + \Gamma'(MN+1)], \\ \beta &= L[NL(2\Gamma''+5) + (\Gamma+\Gamma')\ (MN+1)], \\ \gamma &= 4M, \\ \delta &= L(2\Gamma''+5). \end{aligned} \qquad (36)$$

Integrînd inegalitățile (35), obținem

$$U_{n+1} \leqslant \alpha_n U_1 + \beta_n Z_1,$$

$$Z_{n+1} \leqslant \gamma_n U_1 + \delta_n Z_1,$$

unde matricea cu elementele $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$, $\delta_n$, se obține din matricea

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$$

ridicînd-o la puterea $n$. Notînd cu $h$ cel mai mare dintre numerele $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, găsim astfel

$$\begin{aligned} U_{n+1} &\leqslant (2h)^n \frac{U_1+Z_1}{2}, \\ Z_{n+1} &\leqslant (2h)^n \frac{U_1+Z_1}{2}. \end{aligned} \qquad (37)$$

Seria (12) este majorată de următoarea serie cu coeficienți constanți:

$$U_0 + U_1\varepsilon + U_2\varepsilon^2 + \ldots + U_{n+1}\varepsilon^{n+1} + \ldots,$$

care converge pentru

$$|\varepsilon| < \frac{1}{2h}. \qquad (38)$$

Dacă $\varepsilon$ satisface acestei condiții, atunci (12) converge uniform și absolut, cînd punctul $(x, y)$ este în cercul închis $C$.

Pentru derivatele parțiale avem însă

$$\left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}V_{n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}Z_{n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\cdot\frac{U_1+Z_1}{2}(2h)^n$$

$$\left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\frac{U_1+Z_1}{2}(2h)^n;$$

la fel

$$|\Delta u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\cdot\frac{U_1+Z_1}{2}(2h)^n.$$

În oricare cerc concentric cu $C$ şi de rază mai mică decît 1, seriile obţinute prin derivarea seriei (12) în raport cu $x$ sau $y$, converg uniform, deci avem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} + \ldots + \varepsilon^n \frac{\partial u_n}{\partial x} + \ldots$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial y} + \ldots + \varepsilon^n \frac{\partial u_n}{\partial y} + \ldots$$

pentru $\varepsilon$ suficient de mic. La fel

$$\Delta u = \Delta u_0 + \varepsilon \, \Delta u_1 + \ldots + \varepsilon^n \, \Delta u_n + \ldots$$

Am arătat deci că seria (12) reprezintă o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale (10), pentru $|\varepsilon| < \varepsilon_0 = \frac{1}{2h}$.

Rămîne să arătăm că funcţia reprezentată de seria (12) satisface condiţia la limită (11). Pentru a arăta aceasta, este deajuns să stabilim convergenţa uniformă a seriei

$$\frac{du_0}{dn} + \varepsilon \frac{du_1}{dn} + \ldots + \varepsilon^n \frac{du_n}{dn} + \ldots, \tag{39}$$

unde punctul $(x,y)$, considerat pe cercul $C$, este arbitrar.

Derivînd normal funcţia (20), avem

$$\frac{du_n}{dn} = \frac{d\omega_{n-1}}{dn} + \frac{d\sigma_n}{dn}. \tag{40}$$

Pentru modulul primului termen s-a obţinut deja majorarea (23). În ce priveşte al doilea termen, este vorba de derivata normală a unui potenţial logaritmic de simplu strat. Potenţialul logaritmic de simplu strat

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \log \left[1 + r^2 - 2r \cos (\varphi - \theta)\right] d\varphi,$$

este o funcţie continuă pe cercul $C$ în condiţiile precizate la punctul 1, şi derivata normală $\frac{d\sigma}{dn}$ există şi este continuă pe frontieră [4]. Pe de altă parte, avem

$$-\frac{\partial \sigma}{\partial n} = \frac{\partial \sigma}{\partial r} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \frac{r - \cos (\varphi - \theta)}{1 + r^2 - 2r \cos (\varphi - \theta)} d\varphi$$

$$\left| \frac{d\sigma}{dn} \right| \leqslant \frac{\sup |F(\varphi)|}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|r - \cos \alpha|}{1 + r^2 - 2r \cos \alpha} d\alpha.$$

Calculînd primitiva, găsim

$$\left| \frac{d\sigma}{dn} \right| \leqslant \frac{2}{\pi r} \operatorname{arctg} \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \sup |F(\varphi)| \leqslant 2 \sup |F(\varphi)|. \tag{41}$$



În cazul nostru

$$F(\varphi) = A u_{n-1} - \frac{d\omega_{n-1}}{dn} \text{ şi } \sigma = \sigma_n,$$

aşadar ţinînd seamă de (40), (41) şi (23) avem

$$\left| \frac{d\sigma_n}{dn} \right| \leqslant 3 \, L \, Z_{n-1} + 2 M U_{n-1},$$

deci, aplicînd (37)

$$\left| \frac{d\sigma_n}{dn} \right| \leqslant \frac{3L + 2M}{4h} \cdot \frac{U_1 + Z_1}{2} (2h)^n.$$

Am stabilit deci convergenţa uniformă a seriei (39) pentru $\varepsilon < \frac{1}{2h}$. Urmează că şi condiţia la limită este verificată de funcţia (12).

**6.** Au rămas de stabilit inegalităţile (24) şi (29). Să demonstrăm inegalitatea (24). Descompunem circumferinţa $C$ în arcele $(-\alpha, \alpha)$ şi $(\alpha, 2\pi - \alpha)$ pe care avem $R < 1$, respectiv $R > 1$. Găsim $\cos \alpha = \frac{r}{2}$ şi

$$2 \int_0^{2\pi} |\log R| \, ds = - \int_{-\alpha}^{\alpha} \log (1 + r^2 - 2 r \cos \theta) \, d\theta + \int_{\alpha}^{2\pi - \alpha} \log (1 + r^2 - 2r \cos \theta) \, d\theta.$$

Utilizînd următoarea dezvoltare

$$\log (1 + r^2 - 2 r \cos \theta) = -2 \left( r \cos \theta + r^2 \frac{\cos 2\theta}{2} + \ldots + r^n \frac{\cos n\theta}{n} + \ldots \right),$$

obţinem

$$\int_0^{2\pi} |\log R| \, ds = 4 \left( r \sin \alpha + r^2 \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \ldots + r^n \frac{\sin n\alpha}{2^n} + \ldots \right) =$$

$$= 4 \mathcal{J} \left( r e^{i\alpha} + \frac{(re^{i\alpha})^2}{2^2} + \ldots + \frac{(re^{i\alpha})^n}{n^2} + \ldots \right) \leqslant 4 \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \right) = \frac{2\pi^2}{3},$$

de unde rezultă inegalitatea (24).

Vom stabili acum inegalitatea (29). Funcţia lui Green $g(x, y; \xi, \eta)$ este partea reală a funcţiei de variabilă complexă $z = x + iy$

$$g + ih = \log \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z},$$

în care $\alpha = \xi + i\eta$. Deci

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \leqslant \sqrt{\left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2} = \left| \frac{d}{dz} (g + ih) \right| = \frac{1 - \rho^2}{g \, |z - \alpha| \, |z - \alpha'|},$$

unde $\rho = |\alpha|$, iar $\alpha' = \frac{1}{\bar{\alpha}}$. Găsim

$$\iint_{(C)} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| d\rho\, d\varphi \leqslant \iint_{(C)} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{|z-\alpha||z-\alpha'|}\, d\rho\, d\varphi \leqslant \int_0^1 \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}\,\rho\, d\rho, \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|z-\alpha|};$$

s-a ţinut seama de

$$|z-\alpha'| \geqslant \frac{1}{\rho} - 1.$$

Mai avem

$$\left[\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{|z-\alpha|}\right]^2 \leqslant 2\pi\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{|z-\alpha|^2} = \frac{4\pi^2}{|r^2-\rho^2|}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|r^2-\rho^2|\,d\varphi}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\theta)} = \frac{4\pi^2}{|r^2-\rho^2|},$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{(C)}\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| d\rho\,d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}\,\frac{2\pi}{\sqrt{|r^2-\rho^2|}}\,\rho\,d\rho \leqslant \int_0^1 \frac{2\rho\,d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)\,|r^2-\rho^2|}} =$$

$$= \log\frac{1+r}{1-r} = \frac{\log 1+r}{1-r} + \pi,$$

Se arată uşor că

$$\log\frac{1+r}{1-r}+\pi < \frac{4}{\sqrt{1-r^2}}, \quad \text{pentru } 0 \leqslant r \leqslant 1.$$

Deci inegalitatea (29) este stabilită.

**7.** Aplicarea directă a metodei din Nota de faţă, ecuaţiei (4) cu condiţiile la limită (5), în cazul întîlnit în tehnica proiectării ţevilor din cazan cu aburi [1] — problemă practică din care a luat naştere problema noastră — nu dă rezultat satisfăcător, deoarece pentru valori de ordinul $\mathfrak{L} = 200$, $\varepsilon = \frac{1}{20}$, seria (12) nu converge. Metoda se poate aplica direct numai pentru valori mult mai mici ale lui $\varepsilon$, deci pentru tuburi cu perete foarte subţire sau pentru tuburi cu pereţi de grosime normală, care sînt mult prea scurte.

O prelungire analitică a seriei (12) în raport cu $\varepsilon$ permite teoretic determinarea funcţiei căutate, în condiţiile realizate practic, însă calculele la care sîntem conduşi astfel, prezintă dificultăţi mult prea mari.

Metoda arătată se poate aplica totuşi problemei tehnice considerate, în felul următor: din punct de vedere tehnic interesează natura fenomenului caloric numai la nivelul $y=0$ al tubului. Considerînd, în locul tubului întreg, numai o porţiune care este cuprinsă între $y=H$ şi $y=-H$, se poate aplica metoda arătată mai sus acestei porţiuni a tubului, dacă luăm $H \approx \pi$. Vom admite că pentru $y = \pm H$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \text{const.}$, ceea ce va da informaţii utile asupra comportării soluţiei $u$ în regiunea $y \approx 0$ a tubului.



# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ, КАСАЮЩЕЙСЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛОТЫ

## (КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе авторы, исходя из технической задачи, изложенной в [1], формулируют более обобщенную задачу для некоторых уравнений с частными производными второго порядка и приходят к следующей теореме.

Пусть $D$ — плоская область, ограниченная замкнутой аналитической кривой. Уравнение с частными производными (6) с предельным условием (7), проверенное вдоль границы области $D$, допускает для $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ единственное решение формы (8). Коэффициенты $p(\xi, \eta)$ $q(\xi, \eta)$ и $r(\xi, \eta)$ являются ограниченными функциями, интегрируемыми в $D$, а $A_1(\sigma)$ и $B_1(\sigma)$ являются ограниченными функциями, интегрируемыми вдоль границы, и $\int A_1(\sigma)\, d\sigma \neq 0$, причем интеграл взят на границе области.

Метод состоит в установлении алгорифма вычисления последовательными приближениями членов ряда (12); в настоящей работе, путем подходящих увеличений, доказывается сходимость способа для достаточно малого значения $\varepsilon$. Хотя условия применения этой теоремы не предусматривают случай технической задачи, послужившей исходной точкой для подхода к самой теореме, ввиду того что развития ее сходятся при слишком малом значении $\varepsilon$, тем не менее метод может применяться, если ограничиться областью, представляющей существенный интерес с технической точки зрения, то есть отрезком, близким к уровню $y = 0$.

# SUR UN PROBLÈME DE PROPAGATION DE LA CHALEUR

## (RÉSUMÉ)

Le problème technique qui fait l'objet du travail [1] a conduit les Auteurs à une extension de ce problème concernant certaines équations aux dérivées partielles du second ordre; ils ont obtenu le théorème suivant:

Soit $D$ un domaine plan limité par une courbe analytique fermée. L'équation aux dérivées partielles (6) avec la condition aux limites (7), vérifiée le long de la frontière du domaine $D$, admet une solution de la forme (8) pour $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Les coefficients $p(\xi, \eta)$, $q(\xi, \eta)$ et $r(\xi, \eta)$ sont des fonctions bornées, integrables dans $D$, et $A_1(\sigma)$, $B_1(\sigma)$ sont des fonctions bornées, intégrables le long de la frontière, et $\int A_1(\sigma)\, d\sigma \neq 0$, l'intégrale étant prise le long de la même frontière.

La méthode consiste à établir un algorithme permettant de déterminer de proche en proche les termes de la série (12); par des majorations convenables, on arrive à démontrer dans ce travail, la convergence du procédé pour $\varepsilon$ suffisamment petit. Quoique les conditions d'application du théorème n'embrassent pas le cas du problème technique qui a servi de point de départ, parce

que les développements convergent seulement pour $\varepsilon$ très petit; l'application est toutefois possible, si l'on se restreint au domaine voisin du niveau $y=0$ qui, seul, intéresse au point de vue technique.

## BIBLIOGRAFIE


1. G. Călugăreanu, Studii și cercetări științifice, Filiala Cluj, 1952, vol. 3–4.
2. F. Rado, Bul. științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științe matematice și fizice, t. V, nr. 2, aprilie-iunie 1953, p. 285.
3. L. Némethi și D. V. Ionescu, Studii și cercetări științifice, 1953, an. 1–2, t. IV, p. 73–77.
4. N. M. Günther, *La théorie du potentiel*. Col. Borel, 1934, cap. II.


BULETIN ȘTIINȚIFIC
SECȚIUNEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE
Tomul VI, nr. 1, 1954

# ASUPRA UNOR INVARIANȚI ATAȘAȚI UNEI PERECHI DE VECTORI ÎN SPAȚII CU CONEXIUNE AFINĂ, CU DOUĂ DIMENSIUNI

DE

ADOLF HAIMOVICI

*Comunicare prezentată de academician GR. C. MOISIL în ședința din 11 ianuarie 1954*

În notele [1] și [2], am studiat spațiile cu conexiune afină care admit o metrică unghiulară; unghiul a fost definit ca o mărime atașată unei perechi de direcții ale unui spațiu cu conexiune afină cu $n$ dimensiuni, invariantă la transport paralel și care satisface anumitor condiții impuse de natura noțiunii de unghi.

În Nota de față, ne propunem problema — analogă cu cea precedentă — de a găsi spațiile cu conexiune afină cu două dimensiuni, care admit un invariant la transport paralel, atașat unei perechi de vectori și, în același timp, de a găsi acești invarianți.

Această problemă conține, ca un caz particular, pe cea precedentă: atunci cînd invariantul depinde numai de raportul componentelor vectorilor, el are tocmai caracter unghiular. Un alt caz particular al spațiilor studiate aici este acela al spațiilor metrice, adică al spațiilor cu conexiune afină în care se poate atașa unui vector o lungime, invariantă la transport paralel; aceste din urmă spații au fost studiate de către L. Berwald [3] și de către M. Haimovici [4], drept cazuri particulare ale unor spații generale.

**§ 1.** Să considerăm un spațiu cu conexiune afină*) cu două dimensiuni $V_2$, în care un punct $M$ este definit prin coordonatele sale $x^1$, $x^2$, iar un vector cu originea în $M$ prin componentele $X^1\ X^2$. Vectorul $X^i + dX^i$ cu originea în $M'(x^i+\alpha x^i)$ **) este paralel cu vectorul $X^i$ cu originea în $M(x^i)$, dacă

$$dX^i + \Gamma^i_{hk} X^h dx^k = 0, \tag{1}$$

$\Gamma^i_{hk}$ fiind componentele conexiunii afine — funcții continue de $x^i$, derivabile de cîte ori va fi nevoie în cursul operațiilor. Fie $U(x^i, X^i, Y^i)$ o funcție de punct

*) În ceea ce privește teoria generală a spațiilor cu conexiune afină, a se vedea [5], [6], iar în ceea ce privește teoria sistemelor liniare de ecuații cu derivate parțiale de ordinul I vezi de exemplu [7], [8].

**) Indicii $i$, $j$, $k$, $l$ ... parcurg valorile 1, 2.