

P.554 2 B5
Mat-fiz
Bolyai

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMINE

BULETIN ȘTIINȚIFIC

SECȚIUNEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE

1

TOMUL VI

IANUARIE — FEBRUARIE — MARTIE 1954

Bibl. Fac. MATEM.

Nr. P.457 1963



EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMINE

BOLYAI TUD. EGYESLET

KÖNYVTÁRA - clozevár

P.1023 19.55

BULETIN ȘTIINȚIFIC

Secțiunea de științe matematice și fizice

Tomul VI/1954

INDICE SISTEMATIC ALFABETIC

| <i>MATEMATICĂ</i> | <i>nr.</i> | <i>pag.</i> |
|---|------------|-------------|
| ANDREIAN CABIRIA, Asupra teoriei lui R. Nevanlinna | 2 | 271 |
| ARGHIRIADE E., Citeva completări la teoria cvadricelor osculatoare ale unei suprafețe | 3 | 573 |
| BARBĂLAT I., O proprietate globală a traiectoriilor unui sistem de ecuații diferențiale echivalent cu ecuația oscilațiilor neliniare a lui Liénard | 4 | 853 |
| BĂDESCU RADU, Asupra unei ecuații funcționale | 4 | 789 |
| BENADO MIHAIL, Asupra teoriei divizibilității | 2 | 263 |
| BENADO MIHAIL, Asupra unei probleme a lui Garrett Birkhoff | 4 | 703 |
| CĂLUGĂREANU G. și RADO FR., Asupra unei probleme de propagare a căldurii | 1 | 17 |
| CHIȘ GHEORGHE, Observații de minime ale stelei variabile de eclipsă W W Cygni | 3 | 623 |
| CIORĂNESCU NICOLAE, O generalizare a funcțiilor lui Bessel și aplicațiile lor la integrarea unor ecuații liniare cu derivate parțiale de ordin oarecare | 3 | 499 |
| CRISTESCU ROMULUS, Asupra unei noțiuni de convergență | 2 | 297 |
| ELIANU I. P., Asupra funcțiilor neanalitice de mai multe variabile complexe | 3 | 511 |
| ELIANU I. P., Invarianți matriciali absoluți pentru sistemele de tip Laplace | 4 | 847 |
| GALBURĂ GH., Despre varietățile canonice și ciclurile caracteristice ale unei varietăți algebrice | 1 | 61 |
| GHEORGHIEV GH., Citeva probleme geometrice legate de un câmp de vectori unitari | 1 | 101 |
| HAIMOVICI ADOLF, Asupra unor invarianți atașați unei perechi de vectori în spații cu conexiune afină cu două dimensiuni | 1 | 31 |
| HALANAY A., În legătură cu metoda parametrului mic | 3 | 483 |
| IACOB CAIUS, Asupra unei generalizări a regulii lui Jukovski pentru determinarea circulației | 2 | 221 |
| IACOB CAIUS, Cercetări asupra teoriei mișcărilor conice supersonice | 3 | 603 |
| IACOB CAIUS, Calculul presiunii exercitate asupra unui solid mobil de un curent lichid variabil cu înălțimea | 4 | 801 |
| IONESCU DAN GH., Asupra vectorului lui Galerkin în teoria elasticității și în hidrodinamica fluidelor viscoase | 3 | 555 |
| IONESCU D. V., O generalizare a unei proprietăți care intervine în metoda lui Runge-Kutta pentru integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale | 2 | 229 |
| MARCUS F., Asupra suprafețelor izoterm-asimptotice | 4 | 819 |
| MARCUS S., Compunerea funcțiilor cu variație mărginită | 2 | 243 |
| MARINESCU G., Asupra diferențialei și derivației în spațiile normate | 2 | 213 |

| | nr. | pag. |
|---|-----|------|
| MIHOC G., Extinderea legii lui Poisson pentru lanțurile Markov multiple și omogene . | 1 | 5 |
| MOISIL GR. C., Asupra invarianților sistemelor lui Vecua. Nota II..... | 3 | 595 |
| MOISIL GR. C., Asupra unei teoreme a lui Zolotarev | 4 | 797 |
| MOLDOVAN ELENA, Observații asupra unor procedee de interpolare generalizate | 3 | 477 |
| MURGULESCU ELENA, Mișcarea supersonică în jurul unei aripi în Δ cu fuzelaj conic | 4 | 741 |
| NEUMANN MARIA, Despre interpretarea geometriei lui Lobacevski pe hiperboloid.... | 4 | 861 |
| NICOLAU EDMOND, O proprietate a sistemelor diferențiale autoadjuante | 4 | 903 |
| NICOLESCU LILLY-JEANNE, Integrale Perron-Stieltjès | 4 | 755 |
| PIC G., Despre o nouă generalizare a noțiunii de nilpotență a unui grup | 2 | 199 |
| POENARU VALENTIN, Cîteva propoziții de topologie a planului | 3 | 579 |
| ROȘCULEȚ N. MARCEL, Algebre liniare neasociative | 2 | 251 |
| ROȘCULEȚ N. MARCEL, Asupra unor ecuații cu derivate parțiale | 3 | 489 |
| ROȘCULEȚ N. MARCEL, Asupra derivatelor parțiale orientate polidimensionale | 4 | 811 |
| SINGER IVAN, Despre cea mai bună aproximare a funcțiilor continue prin combinații liniare de funcții date | 3 | 465 |
| SOLOMON LIVIU, Despre ipoteza descompunerii stării de tensiune | 3 | 523 |
| TELEMAN C., Asupra grupurilor de rotații | 4 | 771 |
| VASILACHE SERGIU, Asupra unei clase de ecuații integrale singulare ce apar în teoria ecuațiilor integro-diferențiale | 3 | 541 |
| VRANCEANU G., Proprietăți diferențiale globale ale spațiilor A_n cu grup maxim G_n^2 .. | 1 | 49 |
| VRANCEANU G., Asupra invarianților spațiilor A_2 cu conexiune liniară | 4 | 779 |
| ZAIDMAN S. și BOBOC N., Unicitatea problemei lui Dirichlet pentru ecuații de tip eliptic | 4 | 839 |

FIZICĂ

| | | |
|---|---|-----|
| AGÎRBICEANU I., Asupra dependenței polarizației fluorescenței de natura excitației și de direcția de observație | 4 | 913 |
| ATANASIU GH., Prezența și dozarea radiului în depozitele naturale ale unor izvoare minerale din R. P. R. | 1 | 125 |
| AVRAMESCU AUREL, Contribuții la calculul răcirii blocurilor de beton | 2 | 407 |
| BALLY D., Acțiunea tratamentului termic asupra aliajelor cu forță coercitivă mare .. | 3 | 679 |
| BLUM LYA, Prepararea hidroxidului de crom pe cale electrolitică | 2 | 305 |
| CIȘMAN ALEX., LAMOTH PETRE și CHIȘU AURICA, Cercetări experimentale asupra stratificării magnetice a păturilor electrolitice de nichel | 3 | 631 |
| CONSTANTINESCU LIVIU, Contribuții la studiul morfologiei furtunilor magnetice .. | 3 | 651 |
| FRIEDLÄNDER E., Un caz de generare a unei perechi de mezozi π într-o emulsie nucleară | 4 | 873 |
| GHEORGHITĂ ȘT. I., Cîteva mișcări în medii poroase neomogene | 4 | 823 |
| IONESCU TH. V., Structura ionilor negativi moleculari de hidrogen (H_2) și de oxigen (O_2). Explicarea frecvențelor critice din ionosferă cu ajutorul frecvențelor proprii ale ionilor negativi de oxigen | 2 | 339 |
| IONESCU TH. V., Potențialul de activare a ionilor negativi moleculari de hidrogen (H_2) | 4 | 919 |
| IOSIPESCU N., TEODORESCU E. și ARIZAN D., Cercetări fotoelastice asupra unui profil de șină | 1 | 173 |
| IOSIPESCU N. și TELEMAN S., Contribuție la studiul punctelor singulare produse la un disc circular | 2 | 437 |
| MERCEA VICTOR, Cercetări asupra scurgerilor capilare de gaze | 1 | 135 |
| MERCEA VICTOR, Cercetări asupra separărilor moleculare de gaze | 2 | 387 |
| MIHUL C., RUSCIOR C. și ARVENTIEV B., Fluorescența benzinelor din petrolul romînesc | 3 | 667 |
| NICOLAU EDMOND, Stabilitatea oscilatorilor electronici | 3 | 691 |
| NICOLAU EDMOND, Studiul pe cale electronică a unui sistem diferențial neliniar .. | 4 | 945 |
| PAVA ROLAND, Contribuții la studiul marelui atmosferice | 1 | 157 |
| PETRESCU G. și IOSIF T., Studiul cutremurului de la 15 octombrie 1953 | 4 | 937 |
| POPOVICI ANDREI, Deducerea variațională a ecuațiilor gravifrice și electromagnetice conform-covariante de al II-lea ordin | 1 | 65 |
| PROCOPIU ȘTEFAN și TUTOVAN VASILE, Inducții magnetice alternative produse de un fir de fier prin care trece un curent alternativ axial. Influența tracțiunii și a unui cîmp magnetizant longitudinal | 2 | 311 |

| | nr. | pag. |
|--|-----|------|
| PROCOPIU ȘTEFAN și VASILIU RADU, Absorbția razelor γ ale radiumului de către nichel la punctul lui Curie, cu ajutorul tubului Geiger-Müller..... | 3 | 685 |
| PROTOPOEȘCU C., Determinarea sodiului, potasiului și litiului prin metoda spectro- fotometrică în cîteva ape minerale din țară | 4 | 891 |
| RUCKENȘTEIN E., Despre coeficientul de transport de căldură în sisteme cu agitator I | 2 | 449 |
| SZABÓ ÁRPÁD, Studiul amănunțit al radioactivității apelor minerale din R.P.R. | 1 | 145 |
| ȘAICHIN A., Distribuția temperaturilor în plăci de beton în timpul prizei | 2 | 423 |
| VASILIU GH., CALINICENCO N. și ONU CONST., Determinări de conductibilități ale aerului în regiuni de munte | 2 | 397 |

BULETIN ȘTIINȚIFIC

SECȚIUNEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE

Tomul VI, nr. 1

Ianuarie-februarie-martie 1954

SUMAR

| | Pag. |
|--|------|
| G. MIHOC, Extinderea legii lui Poisson pentru lanțurile Markov multiple și omogene | 5 |
| G. CĂLUGĂREANU și FR. RADO, Asupra unei probleme de propagare a căldurii | 17 |
| ADOLF HAIMOVICI, Asupra unor invarianți atașați unei perechi de vectori în spații cu conexiune afină cu două dimensiuni | 31 |
| G. VRÂNCEANU, Proprietăți diferențiale globale ale spațiilor A_n cu grup maxim G_n^* | 49 |
| GH. GALBURĂ, Despre varietățile canonice și ciclurile caracteristice ale unei varietăți algebrice | 61 |
| ANDREI POPOVICI, Deducerea variațională a ecuațiilor gravifice și electromagnetice conform-covariante de al II-lea ordin | 65 |
| GH. GHEORGHIEV, Cîteva probleme geometrice legate de un cîmp de vectori unitari | 101 |
| GH. ATANASIU, Prezența și dozarea radiului în depozitele naturale ale unor izvoare minerale din R.P.R. | 125 |
| VICTOR MERCEA, Cercetări asupra scurgerilor capilare de gaze | 135 |
| ÁRPÁD SZABÓ, Studiul amănunțit al radioactivității apelor minerale din R.P.R. | 145 |
| ROLAND PAVA, Contribuții la studiul mareelor atmosferice | 157 |
| N. IOSIPESCU, E. TEODORESCU și D. ARIZAN, Cercetări fotoelastice asupra unui profil de șină | 173 |

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICILE POȘTALE
PRIN FACTORII POȘTALI ȘI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN ÎNTREPRINDERI ȘI INSTITUȚII

BULLETIN SCIENTIFIQUE

SECTION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

Tome VI, N° 1

Janvier-février-mars 1954

SOMMAIRE

| | Page |
|---|------|
| G. MIHOC, Extension de la loi de Poisson pour les chaînes de Markov, multiples et homogènes | 5 |
| G. CĂLUGĂREANU et FR. RADO, Sur un problème de propagation de la chaleur | 17 |
| ADOLF HAIMOVICI, Sur quelques invariants attachés à un couple de vecteurs d'un espace à connexion affine à deux dimensions | 31 |
| G. VRĂNCEANU, Propriétés différentielles globales des espaces A_n à groupe maximum G_n^2 | 49 |
| GH. GALBURĂ, Sur les variétés canoniques et cycliques, caractéristiques d'une variété algébrique | 61 |
| ANDREI POPOVICI, Déduction variationnelle des équations gravifiques et électromagnétiques, conformes covariantes de 1 ^{er} ordre | 65 |
| GH. GHEORGHIEV, Quelques problèmes géométriques relatifs à un champ de vecteurs unitaires | 101 |
| GH. ATANASIU, Sur la présence et le dosage du radium dans les dépôts naturels de quelques sources minérales de la République Populaire Roumaine | 125 |
| VICTOR MERCEA, Recherches sur les écoulements capillaires des gaz.... | 135 |
| ÁRPÁD SZABÓ, Étude détaillée de la radioactivité des eaux minérales de la République Populaire Roumaine | 145 |
| ROLAND PAVA, Contributions à l'étude des marées atmosphériques | 157 |
| N. IOSIPESCU, E. TEODORESCU et D. ARIZAN, Recherches photo-élastométriques sur le profil du rail | 173 |

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

Том VI, № 1

Январь — февраль — март 1954

СОДЕРЖАНИЕ

| | Стр. |
|--|------|
| Г. МИХОК, Распространение закона Пуассона на множественные и однородные марковские цепи | 5 |
| Г. КЭЛУГЭРЯНУ и Ф. РАДО, Об одной задаче, касающейся пространства теплоты | 17 |
| А. ХАЙМОВИЧ, О некоторых инвариантах, связанных с парой векторов пространства аффинной связности двух измерений | 31 |
| Г. ВРЭНЧАНУ, Глобальные дифференциальные свойства пространств A_n с максимальной группой G_n^2 | 49 |
| Г. ГАЛБУРЭ, О канонических многообразиях и характеристических циклах алгебраического многообразия | 61 |
| А. ПОПОВИЧ, Вариационный вывод гравитационных и электромагнитных конформно-ковариантных уравнений второго порядка .. | 65 |
| Г. ГЕОРГИЕВ, Несколько геометрических задач, относящихся к полю единичных векторов | 101 |
| Г. АТАНАСИУ, Обнаружение и количественное определение радия в естественных отложениях некоторых источников минеральных вод РНР | 125 |
| В. МЕРЧА, Исследование капиллярного течения газов | 135 |
| АРПАД САБО, Подробное исследование радиоактивности минеральных вод РНР | 145 |
| Р. ПАВА, К вопросу об исследовании атмосферных приливов | 157 |
| Н. ИОСИПЕСКУ, Е. ТЕОДОРЕСКУ и Д. АРИЗАН, Фотоэластметрические исследования профиля рельса | 173 |

ASUPRA UNEI PROBLEME DE PROPAGARE A CĂLDURII

DE

G. CĂLUGĂREANU și FR. RADO

*Comunicare prezentată de MIRON NICOLESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.,
în ședința din 11 ianuarie 1954*

1. În prezenta lucrare vor fi arătate cercetările care sînt în legătură cu problema tehnică a uzurii țevilor în cazanele cu aburi, ridicată de ing. L. N é m e t i. Asupra acestei probleme a mai apărut o lucrare cu același titlu [1], în care s-a studiat cazul unui tub de lungime infinită și s-a formulat problema matematică corespunzătoare pentru acest caz. În încercarea de a o rezolva s-a ivit dificultatea rezolvării unui sistem liniar infinit de o natură complicată. În legătură cu acest sistem a apărut Nota [2], care scoate în evidență unele proprietăți ale sistemului și arată dificultățile de rezolvare. În această lucrare, problema matematică este formulată pentru cazul tubului limitat. O încercare, de altă natură, în cazul tubului limitat [3] conduce de asemenea la rezolvarea unui sistem liniar infinit.

În Nota [1] problema s-a formulat astfel: să se integreze ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{1+y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

unde funcția $u = u(y, z)$ este regulată în banda $-\varepsilon < y < \varepsilon$ și care trebuie să satisfacă următoarele condiții la limită

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \gamma u, \text{ pentru } y = -\varepsilon, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 1, \text{ pentru } y = \varepsilon, \end{aligned} \quad (2)$$

în care

$$\gamma = \begin{cases} \gamma^+, z > 0 \\ \gamma^-, z < 0, \end{cases} \quad \gamma^+ > \gamma^- > 0.$$

Aici ε reprezintă un parametru fără dimensiuni, care ia valori mici. Considerăm cazul tubului limitat. Banda infinită se înlocuiește cu dreptunghiul

$$\begin{aligned} -\varepsilon < y < \varepsilon \\ -l < z < l. \end{aligned}$$

Menținând condițiile (2) pe frontiera $y = -\varepsilon$ și $y = \varepsilon$, ecuația cu derivate parțiale (1) urmează să se integreze cu condițiile la limită (2) și

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \text{pentru } z = \pm l. \quad (3)$$

Prin următoarea transformare:

$$y = \frac{2}{\pi} \varepsilon' Y, z = \frac{2}{\pi} \varepsilon' Z; \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2} \varepsilon'; \quad l = \frac{2}{\pi} \varepsilon' \Omega$$

și schimbând pe Y în y , Z în z , ε' în ε , sîntem conduși la următoarea ecuație cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

și condițiile la limită

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon \gamma u, & \text{pentru } y = -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon, & \text{pentru } y = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0, & \text{pentru } z = \pm \Omega. \end{cases} \quad (5)$$

Datorită faptului că ε la valori mici, este natural să căutăm soluția ecuației (4) sub forma unei dezvoltări după puterile lui ε . Această metodă se va aplica imediat pentru un caz mai general, în care domeniul dreptunghiular se înlocuiește cu un domeniu simplu conex mărginit, și ecuația (4) cu una mai generală. Conținutul prezentei lucrări stabilește următoarea

T e o r e m ă. Fie D un domeniu plan mărginit de o curbă analitică închisă. Ecuația cu derivate parțiale

$$\left[1 + \varepsilon p(\xi, \eta) \right] \Delta u + \varepsilon \left[q(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + r(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] = 0 \quad (6)$$

cu condiția la limită

$$\frac{du}{dn} = \varepsilon [A_1(\sigma) u + B_1(\sigma)] \quad (7)$$

verificată de-a lungul frontierei domeniului D , admite o soluție unică de forma

$$u = u_0(\xi, \eta) + \varepsilon u_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 u_2(\xi, \eta) + \dots, \quad (8)$$

pentru $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Coeficienții $p(\xi, \eta)$, $q(\xi, \eta)$ și $r(\xi, \eta)$ sînt funcții marginile integrabile în D , iar $A_1(\sigma)$ și $B_1(\sigma)$ sînt funcții marginile integrabile de-a lungul frontierei și $\int A_1(\sigma) d\sigma \neq 0$, integrala fiind luată de-a lungul frontierei domeniului D .

2. Transformăm domeniul D , situat în planul ξ, η în cercul unitate din planul x, y , punînd

$$\zeta = \xi + i\eta = f(x + iy) = f(z) \quad (9)$$

unde $f(z)$ este o funcție olomorfă și univalentă în cercul unitate C din planul variabilei complexe z . Ecuația cu derivate parțiale (6) devine

$$[1 + \varepsilon a(x, y)] \Delta u + \varepsilon \left[b(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0, \quad (10)$$

cu condiția la limită, verificată de-a lungul cercului unitate,

$$\frac{du}{dn} = \varepsilon [A(s) u + B(s)], \quad (11)$$

unde

$$\begin{aligned} a(x, y) &= p(\xi, \eta) \\ b(x, y) &= q(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial x} + r(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ c(x, y) &= r(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial x} - q(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ A(s) &= A_1(\sigma) \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2} \\ B(s) &= B_1(\sigma) \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2}; \end{aligned}$$

punctele (ξ, η) din domeniul D și (x, y) din cercul unitate se corespund și tot astfel punctele definite de arcele σ și s pe frontierele acestor domenii. Ipotezele asupra funcțiilor $p(\xi, \eta)$, $q(\xi, \eta)$, $r(\xi, \eta)$, $A_1(\sigma)$ și $B_1(\sigma)$ din enunțul teoremei rămîn valabile pentru $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $A(s)$ și $B(s)$.

3. Căutăm o soluție a ecuației (10) de forma,

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \dots + \varepsilon^n u_n(x, y) + \dots \quad (12)$$

Înlocuind în ecuațiile (10) și (11) obținem prin identificare

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0, & \frac{du_0}{dn} = 0 \\ \Delta u_1 + a \Delta u_0 + b \frac{\partial u_0}{\partial x} + c \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, & \frac{du_1}{dn} = A u_0 + B \\ \Delta u_2 + c \Delta u_1 + b \frac{\partial u_1}{\partial x} + c \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, & \frac{du_2}{dn} = A u_1 \\ \dots & \dots \\ \Delta u_n + a \Delta u_{n-1} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + c \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} = 0, & \frac{du_n}{dn} = A u_{n-1} \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (13)$$

Problema este astfel transformată într-un șir de probleme Neumann pentru ecuația de tip Poisson

$$\Delta u_n = - \left(a \Delta u_{n-1} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + c \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} \right), \quad (14)$$

condiția la limită fiind

$$\frac{du_n}{dn} = Au_{n-1}, \quad (15)$$

unde u_{n-1} se presupune determinat de condițiile analoge de un rang mai mic. În cazul $n=1$, condiția la limită (15) trebuie înlocuită cu

$$\frac{du_1}{dn} = Au_0 + B.$$

Fie

$$\omega_{n-1}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{(C)} \left(a \Delta u_{n-1} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + c \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} \right) g(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (16)$$

soluția ecuației Poisson (14), care este nulă pe cercul C , $g(x, y; \xi, \eta)$; reprezintă aici funcția lui Green pentru cercul C . Punem

$$u_n = \omega_{n-1}(x, y) + H_n(x, y);$$

pentru $H_n(x, y)$ avem

$$\Delta H_n = 0 \text{ și } \frac{dH_n}{dn} = Au_{n-1} - \frac{d\omega_{n-1}}{dn} \text{ pe cercul } C.$$

Sintem conduși astfel la o problemă Neumann pentru ecuația lui Laplace în cazul cercului. Integrala este dată de formula lui Dini

$$H_n(x, y) = \sigma_n(x, y) + C_n,$$

$$\sigma_n(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_C \left(Au_{n-1} - \frac{d\omega_{n-1}}{dn} \right) \log R ds, \quad (17)$$

unde C_n este o constantă, iar R distanța punctului (x, y) la punctul curent de pe cerc.

Constanta C_n se determină scriind condiția necesară pentru ca problema lui Neumann relativă la $H_{n+1}(x, y)$ să fie posibilă. Condiția este

$$\int_C \frac{dH_{n+1}}{dn} ds = 0,$$

său

$$\int_C \left(Au_n - \frac{d\omega_n}{dn} \right) ds = 0.$$

Înlocuind

$$u_n = \omega_{n-1} + \sigma_n + C_n \quad (18)$$

deducem

$$C_n = \frac{1}{\int_C Ads} \int_C \left[\frac{d\omega_n}{dn} - A(\omega_{n-1} + \sigma_n) \right] ds. \quad (19)$$

Am stabilit deci următorul algoritm pentru calculul succesiv al funcțiilor $u_n(x, y)$ din dezvoltarea seriei (12): presupunem cunoscut u_{n-1} , calculăm prin formula (16) funcția $\omega_{n-1}(x, y)$ și prin (17) calculăm $\sigma_n(x, y)$; cu aceștia formăm funcția

$$\omega_{n-1}(x, y) + \sigma_n(x, y) = u_n(x, y) - C_n, \quad (20)$$

care diferă de $u_n(x, y)$ numai printr-o constantă. Utilizând (16) putem calcula $\omega_n(x, y)$, observind că în (16) apar numai derivatele parțiale ale funcției u_n , sau, ceea ce este același lucru, derivatele parțiale ale funcției $u_n(x, y) - C_n$. Formula (19) determină constanta C_n .

4. Vom studia convergența seriei (12), majorând funcțiile $u_n(x, y)$. Notăm

$$\begin{aligned} \sup |u_n| &= U_n \\ \sup \left| \sqrt{1-r^2} \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| &= V_n, \quad \sup \left| \sqrt{1-r^2} \frac{\partial u_n}{\partial y} \right| = V'_n, \\ \sup \left| \sqrt{1-r^2} \Delta u_n \right| &= W_n, \end{aligned}$$

unde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ și supremum se ia în cercul C (domeniul inclus). Funcțiile $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ și $A(s)$ fiind mărginite, avem

$$|a(x, y)| \leq L, \quad |b(x, y)| \leq L, \quad |c(x, y)| \leq L, \quad |A(s)| \leq M$$

pentru toate punctele din interiorul cercului C , și de pe cerc. Notăm mai departe

$$\frac{1}{\left| \int_C Ads \right|} = N.$$

Majorând integrala dublă (16), obținem

$$|\omega_{n-1}| \leq \frac{L}{2\pi} (W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1}) \iint_{(C)} \frac{g(x, y; \xi, \eta)}{\sqrt{1 - (\xi^2 + \eta^2)}} d\xi d\eta. \quad (21)$$

Pentru a calcula integrala dublă din membrul doi, observăm că ea este soluția ecuației lui Poisson

$$\Delta \psi = - \frac{1}{\sqrt{1-r^2}},$$

care se anulează pe contur și este regulată în interiorul lui. Deoarece ψ este independent de argumentul φ , transformând $\Delta \psi$ în coordonate polare obținem

$$r \frac{d^2 \psi}{dr^2} - \frac{d\psi}{dr} = - \frac{r}{\sqrt{1-r^2}},$$

de unde, ținând seama că ψ este o funcție regulată în origine, iar $\psi(1) = 0$,

$$r \frac{d\psi}{dr} = \sqrt{1-r^2} - 1,$$

$$\psi = \sqrt{1-r^2} - \log(1 + \sqrt{1-r^2}).$$

Aceasta fiind o funcție monotonă de r în intervalul $[0,1]$, își atinge maximum pentru $r=0$

$$\max \psi = \max |\psi| = 1 - \log 2 = \Gamma < 1.$$

Din (21) rezultă

$$|\omega_{n-1}| \leq L\Gamma(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1}). \quad (22)$$

Pentru a majora $\frac{d\omega_{n-1}}{dn}$ derivăm normal în formula (16)

$$\frac{d\omega_{n-1}}{dn} = \frac{1}{2\pi} \iint_{(C)} \left(a \Delta u_{n-1} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + c \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} \right) \frac{dg}{dn} d\xi d\eta.$$

Notînd argumentul punctului (x, y) de pe cercul C cu θ , obținem

$$\left| \frac{d\omega_{n-1}}{dn} \right| \leq \frac{L}{2\pi} (W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1}) \iint_{(C)} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{1+\rho^2-2\rho \cos(\varphi-\theta)} \rho d\rho d\varphi,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \iint_{(C)} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{1+\rho^2-2\rho \cos \alpha} \rho d\rho d\alpha &= \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho \cos \alpha} d\alpha = \\ &= \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = 1. \end{aligned}$$

Observînd că integrala în raport cu α este egală cu 1, în virtutea formulei lui Poisson, rezultă

$$\left| \frac{d\omega_{n-1}}{dn} \right| \leq L(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1}). \quad (23)$$

Să trecem la majorarea lui $\sigma_n(x, y)$. Utilizînd formulele (17) și (23), avem

$$|\sigma_n| \leq \frac{1}{\pi} [MU_{n-1} + L(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1})] \int_0^{2\pi} |\log R| ds.$$

Vom arăta la punctul 6 că avem

$$\Gamma' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\log R| ds \leq \frac{2\pi}{3}. \quad (24)$$

Așadar pentru σ_n avem

$$|\sigma_n| \leq \Gamma' [MU_{n-1} + L(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1})]. \quad (25)$$

Majorînd constanta C_n , dată de (19), se obține utilizînd (23) pentru indicele n , apoi (22) și (25)

$$|C_n| \leq N \{ L(W_n + V_n + V'_n) + M[L(\Gamma + \Gamma')(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1}) + \Gamma' MU_{n-1}] \}. \quad (26)$$

Formula (18) ne dă, ținînd seamă de (22), (25) și (26),

$$U_n \leq NL(W_n + V_n + V'_n) + M\Gamma'(MN + 1)U_{n-1} + L(\Gamma + \Gamma')(MN + 1)(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1}). \quad (27)$$

Obținem majorări pentru V_n și V'_n calculînd $\frac{\partial v_n}{\partial x}$ și $\frac{\partial u_n}{\partial y}$. Ținînd seama de (18), avem

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_n}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_n}{\partial y}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \iint_{(C)} \left(a \Delta u_{n-1} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + c \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} \right) \frac{dg}{dx} d\xi d\eta,$$

$$\left| \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x} \right| \leq \frac{L}{2\pi} (W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1}) \iint_{(C)} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| d\rho d\varphi.$$

Vom arăta la punctul 6 că avem

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{(C)} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| d\rho d\varphi \leq \frac{\Gamma''}{\sqrt{1-r^2}}; \quad 0 < \Gamma'' < 4, \quad (29)$$

unde $r^2 = x^2 + y^2$. Ținînd seama de simetrie, rezultatul se aplică și pentru $\frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial y}$; deci

$$\left| \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial y} \right| \leq \frac{L\Gamma''}{\sqrt{1-r^2}} (W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1}), \quad (30)$$

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_C \left(Au_{n-1} - \frac{d\omega_{n-1}}{dn} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x} ds,$$

$$\left| \frac{\partial \sigma_n}{\partial x} \right| \leq \frac{1}{\pi} [MU_{n-1} + L(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1})] \int_C \frac{1}{R} \left| \frac{\partial R}{\partial x} \right| ds,$$

$$\int_C \frac{1}{R} \left| \frac{\partial R}{\partial x} \right| ds = \int_C \frac{|x-\xi|}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds = \int_0^{2\pi} \frac{|r \cos \theta - \cos \varphi|}{1+r^2-2r \cos(\varphi-\theta)} d\varphi.$$

Aplicînd inegalitatea lui Buniakovski

$$\left[\int_0^{2\pi} 1 \cdot \frac{|r \cos \theta - \cos \varphi| d\varphi}{1+r^2-2r \cos(\varphi-\theta)} \right]^2 \leq 2\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{r \cos \theta - \cos \varphi}{1+r^2-2r \cos(\varphi-\theta)} \right]^2 d\varphi$$

și ținind seama de

$$\left[\frac{r \cos \theta - \cos \varphi}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \theta)} \right]^2 = \frac{(x - \xi)^2}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \cdot \frac{1}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \leq \leq \frac{1}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \theta)},$$

obținem

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{r \cos \theta - \cos \varphi}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \theta)} \right]^2 d\varphi \leq \frac{2\pi}{1 - r^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2) d\varphi}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \theta)} = \frac{2\pi}{1 - r^2}$$

$$\int_C \frac{1}{R} \left| \frac{\partial R}{\partial x} \right| ds \leq \frac{2\pi}{\sqrt{1 - r^2}}.$$

Găsim în definitiv pentru derivatele parțiale ale lui σ_n

$$\left| \frac{\partial \sigma_n}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \sigma_n}{\partial y} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{1 - r^2}} [M U_{n-1} + L(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1})]. \quad (31)$$

Ținând seamă de (28), (30) și (31), avem

$$\sqrt{1 - r^2} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| \leq 2 M U_{n-1} + L(\Gamma'' + 2)(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1}) = K,$$

în orice punct interior cercului unitate. Atunci

$$V_n = \sup \left| \sqrt{1 - r^2} \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| \leq K, \text{ și la fel } V'_n \leq K,$$

deci putem scrie

$$V_n, V'_n \leq 2 M U_{n-1} + L(\Gamma'' + 2)(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1}). \quad (32)$$

Ținând seamă de (14), avem imediat

$$\sqrt{1 - r^2} \Delta u_n = - \left(a \sqrt{1 - r^2} \Delta u_{n-1} + b \sqrt{1 - r^2} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + c \sqrt{1 - r^2} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} \right)$$

$$|\sqrt{1 - r^2} \Delta u_n| \leq L(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1}),$$

pentru orice punct interior cercului unitate, deci

$$W_n \leq L(W_{n-1} + V_{n-1} + V'_{n-1}). \quad (33)$$

5. Pe baza inegalităților (27), (32) și (33) vom arăta că seria (12), pentru soluția căutată $u(x, y)$, converge uniform în cercul închis C , pentru $|\varepsilon|$ destul de mic, iar în acest caz seriile derivate în raport cu x și y converg uniform în orice cerc concentric cu C și de rază < 1 .

Notăm pentru prescurtare

$$Z_n = V_n + V'_n + W_n. \quad (34)$$

Din inegalitățile (27), (32) și (33) rezultă

$$U_n \leq \alpha U_{n-1} + \beta Z_{n-1},$$

$$Z_n \leq \gamma U_{n-1} + \delta Z_{n-1}, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (35)$$

unde s-a notat

$$\alpha = M[4LN + \Gamma'(MN + 1)],$$

$$\beta = L[NL(2\Gamma'' + 5) + (\Gamma + \Gamma')(MN + 1)], \quad (36)$$

$$\gamma = 4M,$$

$$\delta = L(2\Gamma'' + 5).$$

Integrând inegalitățile (35), obținem

$$U_{n+1} \leq \alpha_n U_1 + \beta_n Z_1,$$

$$Z_{n+1} \leq \gamma_n U_1 + \delta_n Z_1,$$

unde matricea cu elementele $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$, se obține din matricea

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

ridicînd-o la puterea n . Notînd cu h cel mai mare dintre numerele $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, găsim astfel

$$U_{n+1} \leq (2h)^n \frac{U_1 + Z_1}{2},$$

$$Z_{n+1} \leq (2h)^n \frac{U_1 + Z_1}{2}. \quad (37)$$

Seria (12) este majorată de următoarea serie cu coeficienți constanți:

$$U_0 + U_1 \varepsilon + U_2 \varepsilon^2 + \dots + U_{n+1} \varepsilon^{n+1} + \dots,$$

căre converge pentru

$$|\varepsilon| < \frac{1}{2h}. \quad (38)$$

Dacă ε satisface acestei condiții, atunci (12) converge uniform și absolut, cînd punctul (x, y) este în cercul închis C .

Pentru derivatele parțiale avem însă

$$\left| \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} V_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} Z_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} \cdot \frac{U_1 + Z_1}{2} (2h)^n$$

$$\left| \frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} \frac{U_1 + Z_1}{2} (2h)^n;$$

la fel

$$|\Delta u_{n+1}| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} \cdot \frac{U_1 + Z_1}{2} (2h)^n.$$

În oricare cerc concentric cu C și de rază mai mică decât 1, seriile obținute prin derivarea seriei (12) în raport cu x sau y , converg uniform, deci avem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} + \dots + \varepsilon^n \frac{\partial u_n}{\partial x} + \dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial y} + \dots + \varepsilon^n \frac{\partial u_n}{\partial y} + \dots$$

pentru ε suficient de mic. La fel

$$\Delta u = \Delta u_0 + \varepsilon \Delta u_1 + \dots + \varepsilon^n \Delta u_n + \dots$$

Am arătat deci că seria (12) reprezintă o soluție a ecuației cu derivate parțiale (10), pentru $|\varepsilon| < \varepsilon_0 = \frac{1}{2h}$.

Rămâne să arătăm că funcția reprezentată de seria (12) satisface condiția la limită (11). Pentru a arăta aceasta, este de ajuns să stabilim convergența uniformă a seriei

$$\frac{du_0}{dn} + \varepsilon \frac{du_1}{dn} + \dots + \varepsilon^n \frac{du_n}{dn} + \dots, \quad (39)$$

unde punctul (x, y) , considerat pe cercul C , este arbitrar.

Derivând normal funcția (20), avem

$$\frac{du_n}{dn} = \frac{d\omega_{n-1}}{dn} + \frac{d\sigma_n}{dn}. \quad (40)$$

Pentru modulul primului termen s-a obținut deja majorarea (23). În ce privește al doilea termen, este vorba de derivata normală a unui potențial logaritmic de simplu strat. Potențialul logaritmic de simplu strat

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \log [1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \theta)] d\varphi,$$

este o funcție continuă pe cercul C în condițiile precizate la punctul 1, și derivata normală $\frac{d\sigma}{dn}$ există și este continuă pe frontieră [4]. Pe de altă parte, avem

$$-\frac{\partial \sigma}{\partial n} = \frac{\partial \sigma}{\partial r} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \frac{r - \cos(\varphi - \theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \theta)} d\varphi$$

$$\left| \frac{d\sigma}{dn} \right| \leq \frac{\sup |F(\varphi)|}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|r - \cos \alpha|}{1 + r^2 - 2r \cos \alpha} d\alpha.$$

Calculând primitiva, găsim

$$\left| \frac{d\sigma}{dn} \right| \leq \frac{2}{\pi r} \operatorname{arctg} \frac{r}{|1-r|} \sup |F(\varphi)| \leq 2 \sup |F(\varphi)|. \quad (41)$$

În cazul nostru

$$F(\varphi) = Au_{n-1} - \frac{d\omega_{n-1}}{dn} \text{ și } \sigma = \sigma_n,$$

așadar ținând seamă de (40), (41) și (23) avem

$$\left| \frac{d\sigma_n}{dn} \right| \leq 3LZ_{n-1} + 2MU_{n-1},$$

deci, aplicând (37)

$$\left| \frac{d\sigma_n}{dn} \right| \leq \frac{3L + 2M}{4h} \cdot \frac{U_1 + Z_1}{2} (2h)^n.$$

Am stabilit deci convergența uniformă a seriei (39) pentru $\varepsilon < \frac{1}{2h}$. Urmează că și condiția la limită este verificată de funcția (12).

6. Au rămas de stabilit inegalitățile (24) și (29). Să demonstrăm inegalitatea (24). Descompunem circumferința C în arcele $(-\alpha, \alpha)$ și $(\alpha, 2\pi - \alpha)$ pe care avem $R < 1$, respectiv $R > 1$. Găsim $\cos \alpha = \frac{r}{2}$ și

$$2 \int_0^{2\pi} |\log R| ds = - \int_{-\alpha}^{\alpha} \log(1 + r^2 - 2r \cos \theta) d\theta + \int_{\alpha}^{2\pi - \alpha} \log(1 + r^2 - 2r \cos \theta) d\theta.$$

Utilizând următoarea dezvoltare

$$\log(1 + r^2 - 2r \cos \theta) = -2 \left(r \cos \theta + r^2 \frac{\cos 2\theta}{2} + \dots + r^n \frac{\cos n\theta}{n} + \dots \right),$$

obținem

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\log R| ds &= 4 \left(r \sin \alpha + r^2 \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \dots + r^n \frac{\sin n\alpha}{2^n} + \dots \right) = \\ &= 4J \left(re^{i\alpha} + \frac{(re^{i\alpha})^2}{2^2} + \dots + \frac{(re^{i\alpha})^n}{n^2} + \dots \right) \leq 4 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \right) = \frac{2\pi^2}{3}, \end{aligned}$$

de unde rezultă inegalitatea (24).

Vom stabili acum inegalitatea (29). Funcția lui Green $g(x, y; \xi, \eta)$ este partea reală a funcției de variabilă complexă $z = x + iy$

$$g + ih = \log \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z},$$

în care $\alpha = \xi + i\eta$. Deci

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \leq \left| \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2} \right| = \left| \frac{d}{dz} (g + ih) \right| = \frac{1 - \rho^2}{g|z - \alpha| |z - \alpha'|},$$

unde $\rho = |\alpha|$, iar $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$. Găsim

$$\iint_{(C)} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| d\rho d\varphi \leq \iint_{(C)} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{|z-\alpha||z-\alpha'|} d\rho d\varphi \leq \int_0^1 \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}} \rho d\rho, \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|z-\alpha|};$$

s-a ținut seama de

$$|z-\alpha'| \geq \frac{1}{\rho} - 1.$$

Mai avem

$$\left[\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|z-\alpha|} \right]^2 \leq 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|z-\alpha|^2} = \frac{4\pi^2}{|r^2-\rho^2|^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|r^2-\rho^2| d\varphi}{r^2+\rho^2-2r\rho \cos(\varphi-\theta)} = \frac{4\pi^2}{|r^2-\rho^2|^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \iint_{(C)} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| d\rho d\varphi &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}} \frac{2\pi}{|r^2-\rho^2|} \rho d\rho \leq \int_0^1 \frac{2\rho d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)|r^2-\rho^2|}} = \\ &= \log \frac{1+r}{1-r} = \frac{\log 1+r}{1-r} + \pi, \end{aligned}$$

Se arată ușor că

$$\log \frac{1+r}{1-r} + \pi < \frac{4}{\sqrt{1-r^2}}, \text{ pentru } 0 \leq r \leq 1.$$

Deci inegalitatea (29) este stabilită.

7. Aplicarea directă a metodei din Nota de față, ecuației (4) cu condițiile la limită (5), în cazul întâlnit în tehnica proiectării țevilor din cazan cu aburi [1] — problemă practică din care a luat naștere problema noastră — nu dă

rezultat satisfăcător, deoarece pentru valori de ordinul $\varrho = 200$, $\varepsilon = \frac{1}{20}$,

seria (12) nu converge. Metoda se poate aplica direct numai pentru valori mult mai mici ale lui ε , deci pentru tuburi cu perete foarte subțire sau pentru tuburi cu pereți de grosime normală, care sînt mult prea scurte.

O prelungire analitică a seriei (12) în raport cu ε permite teoretic determinarea funcției căutate, în condițiile realizate practic, însă calculele la care sîntem conduși astfel, prezintă dificultăți mult prea mari.

Metoda arătată se poate aplica totuși problemei tehnice considerate, în felul următor: din punct de vedere tehnic interesează natura fenomenului caloric numai la nivelul $y=0$ al tubului. Considerînd, în locul tubului întreg, numai o porțiune care este cuprinsă între $y=H$ și $y=-H$, se poate aplica metoda arătată mai sus acestei porțiuni a tubului, dacă luăm $H \approx \pi$. Vom admite că pentru $y = \pm H$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \text{const.}$, ceea ce va da informații utile asupra comportării soluției u în regiunea $y \approx 0$ a tubului.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ, КАСАЮЩЕЙСЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛОТЫ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе авторы, исходя из технической задачи, изложенной в [1], формулируют более обобщенную задачу для некоторых уравнений с частными производными второго порядка и приходят к следующей теореме.

Пусть D — плоская область, ограниченная замкнутой аналитической кривой. Уравнение с частными производными (6) с предельным условием (7), проверенное вдоль границы области D , допускает для $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ единственное решение формы (8). Коэффициенты $p(\xi, \eta)$, $q(\xi, \eta)$ и $r(\xi, \eta)$ являются ограниченными функциями, интегрируемыми в D , а $A_1(\sigma)$ и $B_1(\sigma)$ являются ограниченными функциями, интегрируемыми вдоль границы, и $\int A_1(\sigma) d\sigma \neq 0$, причем интеграл взят на границе области.

Метод состоит в установлении алгоритма вычисления последовательными приближениями членов ряда (12); в настоящей работе, путем подходящих увеличений, доказывается сходимость способа для достаточно малого значения ε . Хотя условия применения этой теоремы не предусматривают случай технической задачи, послужившей исходной точкой для подхода к самой теореме, ввиду того что развития ее сходится при слишком малом значении ε , тем не менее метод может применяться, если ограничиться областью, представляющей существенный интерес с технической точки зрения, то есть отрезком, близким к уровню $y = 0$.

SUR UN PROBLÈME DE PROPAGATION DE LA CHALEUR

(RÉSUMÉ)

Le problème technique qui fait l'objet du travail [1] a conduit les Auteurs à une extension de ce problème concernant certaines équations aux dérivées partielles du second ordre; ils ont obtenu le théorème suivant:

Soit D un domaine plan limité par une courbe analytique fermée. L'équation aux dérivées partielles (6) avec la condition aux limites (7), vérifiée le long de la frontière du domaine D , admet une solution de la forme (8) pour $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Les coefficients $p(\xi, \eta)$, $q(\xi, \eta)$ et $r(\xi, \eta)$ sont des fonctions bornées, intégrables dans D , et $A_1(\sigma)$, $B_1(\sigma)$ sont des fonctions bornées, intégrables le long de la frontière, et $\int A_1(\sigma) d\sigma \neq 0$, l'intégrale étant prise le long de la même frontière.

La méthode consiste à établir un algorithme permettant de déterminer de proche en proche les termes de la série (12); par des majorations convenables, on arrive à démontrer dans ce travail, la convergence du procédé pour ε suffisamment petit. Quoique les conditions d'application du théorème n'embrassent pas le cas du problème technique qui a servi de point de départ, parce

que les développements convergent seulement pour ε très petit; l'application est toutefois possible, si l'on se restreint au domaine voisin du niveau $y=0$ qui, seul, intéresse au point de vue technique.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Călugăreanu, Studii și cercetări științifice, Filiala Cluj, 1952, vol. 3-4.
2. F. Rado, Bul. științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științe matematice și fizice, t. V, nr. 2, aprilie-iunie 1953, p. 285.
3. L. Némethi și D. V. Ionescu, Studii și cercetări științifice, 1953, an. 1-2, t. IV, p. 73-77.
4. N. M. Günther, *La théorie du potentiel*. Col. Borel, 1934, cap. II.

ASUPRA UNOR INVARIANTI ATAȘAȚI UNEI PERECHI
DE VECTORI ÎN SPAȚII CU CONEXIUNE AFINĂ,
CU DOUĂ DIMENSIUNI

DE

ADOLF HAIMOVICI

Comunicare prezentată de academician GR. C. MOISIL în ședința din 11 ianuarie 1954

În notele [1] și [2], am studiat spațiile cu conexiune afină care admit o metrică unghiulară; unghiul a fost definit ca o mărime atașată unei perechi de direcții ale unui spațiu cu conexiune afină cu n dimensiuni, invariantă la transport paralel și care satisface anumitor condiții impuse de natura noțiunii de unghi.

În Nota de față, ne propunem problema — analogă cu cea precedentă — de a găsi spațiile cu conexiune afină cu două dimensiuni, care admit un invariant la transport paralel, atașat unei perechi de vectori și, în același timp, de a găsi acești invarianti.

Această problemă conține, ca un caz particular, pe cea precedentă: atunci când invariantul depinde numai de raportul componentelor vectorilor, el are tocmai caracter unghiular. Un alt caz particular al spațiilor studiate aici este acela al spațiilor metrice, adică al spațiilor cu conexiune afină în care se poate atașa unui vector o lungime, invariantă la transport paralel; aceste din urmă spații au fost studiate de către L. Berwald [3] și de către M. Haimovici [4], drept cazuri particulare ale unor spații generale.

§ 1. Să considerăm un spațiu cu conexiune afină*) cu două dimensiuni V_2 , în care un punct M este definit prin coordonatele sale x^1, x^2 , iar un vector cu originea în M prin componentele X^1, X^2 . Vectorul $X^i + dX^i$ cu originea în $M'(x^i + \alpha x^i)$ ***) este paralel cu vectorul X^i cu originea în $M(x^i)$, dacă

$$dX^i + \Gamma_{hk}^i X^h dx^k = 0, \quad (1)$$

Γ_{hk}^i fiind componentele conexiunii afine — funcții continue de x^i , derivabile de câte ori va fi nevoie în cursul operațiilor. Fie $U(x^i, X^i, Y^i)$ o funcție de punct

*) În ceea ce privește teoria generală a spațiilor cu conexiune afină, a se vedea [5], [6], iar în ceea ce privește teoria sistemelor liniare de ecuații cu derivate parțiale de ordinul I vezi de exemplu [7], [8].

**) Indicii i, j, k, l, \dots parcurg valorile 1, 2.