Les adresses des auteurs

O. BORŮVKA — Kotlářská 2, Brno, ČSR.
CORNELIU CONSTANTINESCU — Institutul de matematică al Academiei R.P.R., Str. M. Eminescu 47, Bucarest, Roumanie.
EINAR HILLE — Edwards St. 210, New Haven 11, Conn., U.S.A.
GRIGORE C. MOISIL — Institutul de matematică al Academiei R.P.R., Str. M. Eminescu 47, Bucarest, Roumanie.
ŞTEFAN PETRESCU — str. Antim 4 b, Bucarest, Roumanie.
HELENA RASIOVA — Instytut Matematyczny, Pan Sniadeckich 8, Warszawa, Polska.
И. Н. Бекуа — Математический Институт АН СССР, Первый академический проезд, д. 8, Москва Б—134, СССР.

Lei 15.—

C-da 368. Intreprinderea Poligrafică nr. 4. Calea Şerban Vodă nr. 133 — Bucureşti, R.P.R.

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

BULLETIN MATHÉMATIQUE

DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

Nouvelle série

TOME 1 (49), n° 3, 1957

EDITURA TEHNICĂ

1. La rédaction du *Bulletin Mathématique* de la Société des Sciences Mathématiques et Physiques offre cette revue en échange avec les périodiques mathématiques d'autres pays.
S'adresser à la rédaction:
Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. Redacţia *Bulletin Mathématique*, Bucarest 1, Str. Academiei nr. 14, Roumanie (R.P.R.)

2. Le *Bulletin Mathématique* de la Société des Sciences Mathématiques et Physiques publiera des recensions des livres de mathématiques parus, pour lesquels les auteurs ou les maisons d'édition auront envoyé un exemplaire à la rédaction:
Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. Redacţia *Bulletin Mathématique*, Bucarest 1, Str. Academiei nr. 14, Roumanie (R.P.R.)

BULLETIN MATHÉMATIQUE

DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES DE LA R.P.R.
Tome 1 (49), nº 3, 1957

SOMMAIRE

EDITURA TEHNICĂ
Bucureşti 1957

BULL. MATH. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R.
Tome 1 (49), nº 3, 1957

SUR LA STRUCTURE DES CONDITIONS D'UNIVALENCE D'UNE FONCTION HOLOMORPHE DANS UN CERCLE

PAR

G. CĂLUGĂREANU (Cluj)

(Communication au Congrès des mathématiciens roumains, Bucarest, mai-juin 1956)

Le problème des fonctions univalentes dans un domaine à frontière circulaire est, parmi les problèmes spéciaux concernant les fonctions analytiques, l'un de ceux qui ont suscité de nombreuses recherches dans les 30 dernières années. Ce problème se pose de deux manières équivalentes, en partant de l'une ou l'autre des définitions suivantes:

I. Appelons S la classe des fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle-unité, dont le développement est de la forme

$$\varphi(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

II. Appelons Σ la classe des fonctions holomorphes à l'extérieur du cercle-unité, en exceptant le point ∞ qui est un pôle simple, univalentes pour $|z| > 1$ et de la forme

$$f(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \dots + \frac{\alpha_n}{z^n} + \dots$$

On passe de S à Σ, ou inversement, par des transformations simples, ce qui permet de se borner à l'étude de l'une de ces deux classes. Les propriétés de ces fonctions, connues aujourd'hui, sont assez diverses et assez nombreuses.

Nous voulons indiquer ici des considérations qui ont permis d'écrire les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les coefficients α_n pour que $f(z)$ appartienne à la classe Σ. Le problème correspondant pour la classe S se ramène au précédent, en posant par exemple

$$f(z) = \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Le premier résultat remarquable concernant les coefficients α_n d'une fonction de la classe Σ fut le théorème de l'aire de L. Bieberbach (1919), qui s'exprime par l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|\alpha_n|^2 \leqslant 1. \tag{1}$$

Ce résultat permit d'établir des propriétés fondamentales des fonctions de la classe S, à savoir l'inégalité $|a_2| \leqslant 2$ et les théorèmes de contraction qui jouent un rôle dans la théorie de l'uniformisation.

La condition (1) étant nécessaire pour que $f(z)$ appartienne à la classe Σ, on se posa naturellement le problème des conditions nécessaires et suffisantes pour $f(z) \in \Sigma$. Plusieurs méthodes furent employées afin d'arriver à ces conditions, mais les inégalités obtenues d'abord sont loin de présenter la simplicité de l'inégalité (1) de Bieberbach. Mentionnons le travail de Prawitz [1] (1926) où de nouvelles conditions nécessaires sont obtenues, grâce à une généralisation du procédé de Bieberbach, basé sur le calcul d'une aire. Grunsky [2] (1939) obtient des conditions nécessaires et suffisantes d'une forme compliquée et sans analogie avec l'inégalité (1). Ensuite, G. Golusin [3] (1940) et M. Biernacki [4] (1946), donnent au théorème de l'aire toute son extension, en l'appliquant aux fonctions p-valentes dans un cercle. Une infinité de nouvelles conditions nécessaires pour $f(z) \in \Sigma$ apparaissent ainsi, et W. Wolibner [5] (1951) établit que ces conditions sont aussi suffisantes pour $f(z) \in \Sigma$, sans essayer d'écrire effectivement les inégalités en question. En 1954, j'ai été conduit [6] à ces conditions par une voie un peu différente, mais basée elle-aussi sur la généralisation du théorème de l'aire. Les inégalités que j'ai obtenues sont analogues à (1), quoique de plus en plus compliquées à mesure que leur nombre augmente. J'ai cru qu'il peut être intéressant d'indiquer ici l'essentiel sur la structure de ces conditions et sur la manière la plus simple qui permet de les obtenir. Soit

$$Z = f(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{z^n} + \ldots$$

une fonction holomorphe pour $|z| > 1$, sauf au point ∞. On sait qu'une telle fonction est toujours univalente dans un domeine $|z| > R$, pour R suffisamment grand. Elle transforme tout cercle γ_r, $|z| = r > 1$ en une courbe fermée analytique Γ_r, et ce sera une courbe simple pour $r > R$. Le principe qui mène à la condition (1) de Bieberbach consiste à remarquer que l'aire orientée de cette courbe fermée Γ_r sera toujours positive pour $r > 1$ si la fonction $f(z)$ appartient à la classe Σ. Nous entendons par aire orientée de Γ_r la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_r} XdY - YdX$$

prise dans le sens qui correspond sur Γ_r au sens positif sur le cercle γ_r. En écrivant

$$\int\limits_{\Gamma_r} XdY - YdX = \int\limits_{\Gamma_r} I\,(\overline{Z}dZ) = -i\int\limits_{\Gamma_r} \overline{Z}dZ = -i\int\limits_{\Gamma_r} \overline{f(z)}\,f'(z)\,dz = \int\limits_{0}^{2\pi} \overline{f(z)}\,zf'(z)\,d\theta > 0,$$

on arrive sans peine à la condition (1) appelée théorème de l'aire.

D'une manière générale, F représentant une fonction entière quelconque, la fonction $F[f(z)]$ sera holomorphe pour $|z| > 1$, sauf au point ∞. Si $f(z) \in \Sigma$, la courbe Γ_r étant simple, donc d'aire positive, $F(Z)$ transforme cette courbe en

une autre courbe fermée analytique Γ'_r *d'aire positive*. En effet, cette aire est donnée aussi par

$$\iint\limits_{(\Gamma'_r)} dX'dY' = \iint\limits_{(\Gamma_r)} |F'(Z)|^2\, dXdY.$$

Ainsi, pour $f(z) \in \Sigma$, la fonction $F[f(z)]$ transforme le cercle γ_r en Γ'_r d'aire positive. Il en résulte

$$-i\int \overline{F(Z)}\, dF(Z) > 0.$$

En prenant pour $F(Z)$ un polynôme quelconque

$$F(Z) = a_1 Z + a_2 Z^2 + \ldots + a_r Z^r$$

ceci nous donne

$$\sum_{p,q=1}^{n} a_p \overline{a}_q\, \mu_{pq} > 0\,, \quad \mu_{pq} = -i\int\limits_{\Gamma_r} Z^q\, d\,(\overline{Z^p})\,.$$

C'est une forme hermitienne qui doit être positive, d'où les conditions nécessaires pour l'univalence de $f(z)$

$$\mu_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots \tag{3}$$

La première de ces conditions (qui sont en nombre infini), à savoir $\mu_{11} > 0$, coïncide avec le théorème de l'aire, et conduit à l'inégalité (1). Mais les conditions (3) sont aussi suffisantes pour $f(z) \in \Sigma$.

Il suffit de montrer que si $f(z)$ est holomorphe pour $|z| > 1$, sauf au point ∞ qui est un pôle simple, et $f(z)$ n'est pas univalente pour $|z| > 1$, la forme hermitienne (3) peut prendre des valeurs négatives. Ceci résulte du fait que si $f(z)$ n'est pas univalente dans $|z| > 1$, la courbe Γ_r possède des points multiples pour des valeurs $r > 1$; elle décompose alors le plan en un nombre fini de régions bornées, et parmi ces régions il y en a toujours une, G, dont l'aire orientée est négative, région qui est contiguë, tout le long d'un arc de courbe, à la région illimitée définie par Γ_r. Une démonstration rigoureuse de ces propriétés à été donnée par Wolibner [5] (1951) à l'aide de l'indicatrice de Γ_r. Nous reviendrons à l'instant sur cette démonstration.

Remarquons d'abord que, grâce à ces propriétés, on pourra choisir pour $F(Z)$ un polynôme qui, dans G, approche une constante A aussi grande que l'on veut, tandis que $F(Z)$ approche zéro dans les autres régions bornées définies par la courbe Γ_r. Ceci este possible grâce au fait que l'on peut joindre un point de G au point

∞ par un chemin qui ne traverse aucune autre région bornée définie par la courbe Γ_r (M o n t e l, 1910). Pour ce choix du polynôme $F(Z)$ on aura donc

$$-i\int_{\Gamma_r} \overline{F(Z)}\, dF(Z) < 0$$

et les conditions (3) ne seront pas vérifiées, ces conditions étant nécessaires et suffisantes pour la positivité de la forme hermitienne (2). Ainsi, (3) sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'univalence de $f(z)$.

Voici maintenant la démonstration par laquelle W o l i b n e r établit les propriétés que nous venons d'utiliser. Désignons par

$$I(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r} d\,[\arg]\,(Z-u)]$$

l'indicatrice de la courbe Γ_r au point u. C'est le nombre de tours que le vecteur $Z-u$ effectue autour du point u lorsque Z décrit la courbe Γ_r dans le sens positif. Soient D_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, les régions bornées simplement connexes définies par Γ_r dans le plan (Z), et D_0 la région illimitée extérieure à cette courbe. Désignons par I_i la valeur de $I(u)$ pour un point quelconque de la région D_i. On a évidemment $I_0 = 0$. De plus, $1 - I(u)$ représente le nombre de fois que $f(z)$ prend la valeur u pour $|z| > r$, donc $1 - I(u) \geqslant 0$. Pour le voir, il suffit de considérer un second cercle γ'_r, avec $r' > r$, et d'évaluer le nombre des zéros de $f(z) - u = 0$ dans la couronne (γ_r, γ'_r):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'_r} \frac{f'(z)}{f(z)-u}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z)-u}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{r'}} d\,[\arg\,(Z-u)] - \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r} d\,[\arg\,(Z-u)].$$

Pour r' suffisamment grand, la courbe $\Gamma_{r'}$ sera simple et tournera une fois autour du point u, donc $1 - I(u)$ donne le nombre des zéros de $f(z) - u = 0$ pour $|z| > r$. Ainsi, $I(u) \leqslant 1$. Les régions D_i pour lesquelles $I_i \leqslant 0$ forment une région unique, d'un seul tenant, puisque ces régions correspondent aux valeurs u effectivement prises par $f(z)$ pour $|z| > r$, et puisque $|z| > r$ est un domaine connexe. Il existe donc une D_i qui est contiguë à D_0 le long d'un arc de Γ_r et pour laquelle $I_i < 0$. En effet, il existe un $I_i < 0$ puisque $f(z)$ n'est pas univalente dans $|z| > r$, donc $1 - I(u) > 1$ pour des valeurs de u qui remplissent un domaine. Et si toutes les régions D_i contiguës à D_0 auraient des $I_i > 0$, la région D_0, pour laquelle $I_0 = 0$ serait séparée des régions négatives $(I_i < 0)$, ce qui contredit la propriété déjà établie suivant laquelle toutes les régions où $I_i \leqslant 0$ forment une région unique. Les conditions (3) sont donc nécessaires et suffisantes pour $f(z) \in \Sigma$.

Il reste à faire apparaître dans ces inégalités les coefficients α_n du développement

$$Z = f(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{z^n} + \ldots$$

Posons

$$Z^m = z^m + B^m_{-m+1} z^{m-1} + \ldots + \frac{B^m_n}{z^n} + \ldots = \sum_{n=-m}^{\infty} \frac{B^m_n}{z^n},\ B^m_{-m} = 1;\ B^m_{-p} = 0, p > m.$$

On a, avec $z = re^{i\theta}$, $\rho = \min(p, q)$,

$$\mu_{pq} = -i\int_{\Gamma_r} Z^q\, d\,(Z^p) = -i \sum_{n,s=-(p+q)}^{\infty} \overline{B}^q_n B^p_s \int_{\gamma_r} \frac{-s}{\overline{z}^n\, z^{s+1}}\,dz =$$

$$= \sum_{n,s=-\rho}^{\infty} B^p_s \overline{B}^q_n \int_0^{2\pi} \frac{-s}{r^{n+s}} e^{i(n-s)\theta}\,d\theta,\ \mu_{pq} = -2\pi \sum_{r=-\rho} nB^p_n \overline{B}^q_n r^{-2n}.$$

En portant ces expressions dans les conditions (3), et en posant

$$D^{s_1 s_2 \ldots s_k}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \begin{vmatrix} B^{s_1}_{n_1} B^{s_1}_{n_2} \ldots B^{s_1}_{n_k} \\ \ldots \quad \ldots \\ B^{s_k}_{n_1} B^{s_k}_{n_2} \ldots B^{s_k}_{n_k} \end{vmatrix}$$

on trouve les inégalités en nombre infini

$$(-1)^p \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_p = -\rho}^{\infty} \frac{n_1 n_2 \ldots n_p}{r^{2(n_1 + \ldots + n_p)}} \left| D^{12\ldots p}_{n_1 n_2 \ldots n_p} \right|^2 > 0,\ r > 1,\ p = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

On peut y ajouter $n_1 < n_2 < \ldots < n_p$.

Ces conditions nécessaires et suffisantes pour que $f(z) \in \Sigma$, sont analogues à la condition (1) de B i e b e r b a c h, qui correspond à $p = 1$, $r = 1$. Nous verrons d'ailleurs que l'on peut mettre $r = 1$ dans (4), et remplacer le signe $>$ par $\geqslant$. Mais il peut être avantageux d'y adjoindre les inégalités

$$\mu_{ss} > 0,\ \begin{vmatrix} \mu_{ss} & \mu_{st} \\ \mu_{ts} & \mu_{tt} \end{vmatrix} > 0,\ \begin{vmatrix} \mu_{ss} & \mu_{st} & \mu_{su} \\ \mu_{ts} & \mu_{tt} & \mu_{tu} \\ \mu_{us} & \mu_{ut} & \mu_{uu} \end{vmatrix} > 0, \ldots$$

qui, d'ailleurs, sont des conséquences de (3). On remplace alors (4) par

$$(-1)^p \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_p = -\rho}^{\infty} \frac{n_1 n_2 \ldots n_p}{r^{2(n_1 + \ldots + n_p)}} \left| D^{s_1 s_2 \ldots s_p}_{n_1 n_2 \ldots n_p} \right|^2 > 0,\ r > 1,\ p = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

les nombres entiers positifs $s_1, s_2, \ldots, s_p$ étant quelconques, mais distincts, et $\rho = \min(s_1, s_2, \ldots, s_p)$.

La convergence des séries (4) pour $r = 1$ résulte du fait que

$$\mu_{pq}\,(r = 1) = -2\pi \sum_{n=-\rho}^{\infty} nB_n^p\, \overline{B_n^q}$$

est une série convergente, car

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} nB_n^p\, \overline{B_n^q} \right|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n\,|B_n^p|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n\,|B_n^q|^2,$$

tandis que la convergence des dernières séries résulte de (5) pour $p = 1$. En faisant apparaître les sommes positives

$$A_{s_1 s_2 .. s_p} = \sum_{n_1, n_2, .., n_p = 1}^{\infty} n_1 n_2 \ldots n_p \left| D^{s_1 s_2 .. s_p}_{n_1 n_2 .., n_p} \right|^2, \; n_1 < n_2 < \ldots < n_p,$$

la structure des conditions (5) devient visible. On a

$$A_1 \leqslant 1,\; A_2 \leqslant 2,\; A_3 \leqslant 3 + 9\,|\alpha_1|^2, \ldots,\; A_p \leqslant p\,|B^p_{-p}|^2 +$$
$$+ (p-1)\,|B^p_{-p+1}|^2 + \ldots + |B^p_{-1}|^2, \ldots,\; 2A_1 + A_2 \leqslant 2 + A_{12},\; A_3 \leqslant A_{13}, \ldots, \tag{6}$$
$$6A_1 + 3A_2 + 2A_3 + A_{123} \leqslant 6 + 3A_{12} + 2A_{13} + A_{23}, \ldots$$

Remarquons que l'égalité dans l'une des conditions (4) ne peut avoir lieu que si $r = 1$ et toutes les conditions deviennent des égalités, donc aussi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|\alpha_n|^2 = 1.$$

En effet, nous avons vu que, si $f(z) \in \Sigma$, un polynôme quelconque $F(Z)$ transforme la courbe Γ_r en une courbe d'aire positive, donnée par

$$\mathcal{A} = \sum_{p,q=1}^{n} a_p\, \overline{a_q}\, \mu_{pq}, \text{ avec } F(Z) = a_1 Z + \ldots + a_n Z^n.$$

En posant $a_n = 1$, on trouve qu'il existe alors un seul polynôme du degré n qui rend l'aire $\mathcal{A}$ minima. En posant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{21} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{12} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \mu_{1n} & \mu_{2n} & \cdots & \mu_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{on a } F_n(Z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{21} & \cdots & \mu_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \mu_{1,n-1} & \mu_{2,n-1} & \cdots & \mu_{n,n-1} \\ Z & Z^2 & \cdots & Z^n \end{vmatrix}$$

et l'on trouve pour le minimum de l'aire $\mathcal{A}$ la valeur $\dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$. Ceci redonne $\Delta_n > 0$, donc les conditions (3). Mais on voit en même temps que l'on ne peut avoir $\Delta_n = 0$ que si $r = 1$, l'aire intérieure à la courbe Γ_r et celle intérieure à sa transformée par $F_n(Z)$ ne pouvant être nulles. De plus, si pour $r = 1$, $\Delta_{n_0} = 0$, puisque $F_n(Z)$

tend uniformément pour $r \to 1$, vers un polynôme-limite $F_n^*(Z)$, l'aire intérieure à Γ_r doit tendre elle-aussi vers zéro, pour $r \to 1$. Ainsi, $f(z)$ transforme $|z| > 1$ en un domaine dont le complément est un continu borné d'aire nulle, donc sans points intérieurs. On aura alors $\Delta_n = 0$ pour $r = 1$ et pour chaque $n > 0$. Mais les conditions (5) ne deviennent pas toutes des égalités, en même temps que les conditions (4). Ainsi, les égalités

$$(-1)^p \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_p = -p}^{\infty} n_1 n_2 \ldots n_p \left| D^{1\,2 \ldots p}_{n_1 n_2 \ldots n_p} \right|^2 = 0$$

paraissent définir les éléments-frontière de la famille Σ. Plaçons-nous dans l'espace de H i l b e r t complexe, dont les points $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ldots)$ qui correspondent aux fonctions $f(z) \in \Sigma$ forment un continu compact Σ^*, grâce à la normalité de la famille Σ. La convergence de $\Sigma\,|\alpha_n|^2$ pour $f(z) \in \Sigma$ est assurée par la condition (1). On a, avec la définition connue du produit scalaire

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, \overline{g(re^{i\theta})}\, d\theta = \sum_{n,p} \frac{\alpha_n\, \overline{\beta_p}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{z^n\, \overline{z}^p} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta_n}{r^{2n}}$$

et l'on trouve pour l'aire intérieure à la courbe Γ_r

$$i \int_{\gamma_r} f(z)\, \overline{f'(z)}\, dz = (f, zf') = r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{|\alpha_n|^2}{r^{2n}} > 0.$$

L'identité immédiate $(f, g) = r^{-2m}\,(z^m f, z^m g)$, où m est un entier, permet de donner un sens au produit scalaire $(f^p, z[f^q]')$, et l'on trouve

$$\mu_{pq} = (f^p, z[f^q]') = q\,(f^p, zf' f^{q-1}).$$

Ceci permet de donner aux conditions (3) une forme intégrale assez simple, et qui peut être utile pour le calcul

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 \frac{zf'}{f}\, d\theta > 0,$$

$$\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} |f_1 f_2\, V(f_1, f_2)|^2 \cdot \frac{z_1 f_1'}{f_1} \cdot \frac{z_2 f_2'}{f_2}\, d\theta_1 d\theta_2 > 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi}}_{\cdots} |f_1 \ldots f_p\, V(f_1, \ldots, f_p)|^2 \cdot \underbrace{\frac{z_1 f_1'}{f_1} \frac{z_2 f_2'}{f_2} \cdots \frac{z_p f_p'}{f_p}}_{\cdots}\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_p > 0,$$

On a posé ici $z_k = re^{i\theta_k}$, $f_k = f(z_k)$, et $V(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est le déterminant de V a n d e r m o n d e correspondant à $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

La détermination de la classe Σ revient à celle du continu Σ^* dans l'espace de H i l b e r t, problème qui n'est pas résolu. Il nous semble probable que la frontière de ce continu corresponde aux fonctions f pour lesquelles les conditions (4) deviennent toutes des égalités.

Remarquons encore que les conditions (4) se réduisent toutes à des inégalités rationnelles en termes finis pour des fonctions de la forme

$$f(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \ldots + \frac{\alpha_n}{z^n},$$

qui jouent ici le rôle des polynômes univalents de la classe S.

L'étude des fonctions de cette forme à l'aide des inégalités (4) présente de l'intérêt, étant donnée la possibilité d'approcher uniformément à l'aide de telles fonctions toutes les autres fonctions de la classe Σ. Posons, pour terminer, le problème suivant: Peut-on déterminer des classes de fonctions, appartenant à S ou à Σ, dépendant de N paramètres, exprimables en termes finis, et pour lesquelles les conditions nécessaires et suffisantes d'univalence se réduisent à un nombre fini d'inégalités en termes finis, reliant ces paramètres?

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Prawitz, *Über Mittelwerte analytischer Funktionen.* Archiv för Mathem. Astron. och Fisik **20** (1927—28), 8.
2. H. Grunsky, *Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen,* Math. ZS. **45** (1939), 29.
3. G. Golusin, *Über p-valente Funktionen,* Recueil Mathém. 8 (1940), 277.
4. M. Biernacki, *Sur les fonctions en moyenne multivalentes,* Bull. de la Soc. Math. de France **70** (1946), 3.
5. W. Wolibner, *Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction analytique soit univalente,* Colloquium mathematicum II (1951), 249.
6. G. Călugăreanu, *Despre funcțiile univalente* (II), Stud. și Cerc. Șt. Cluj V (1954), 15.

BULL MATH. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R.
Tome 1 (49), n° 3, 1957

MÉTHODES VARIATIONELLES DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS UNIVALENTES

PAR

Z. CHARZYŃSKI (Łódź)

(Communication au Congrès des mathématiciens roumains, Bucarest, mai-juin 1956)

1. Introduction

Je vais présenter certains résultats de la théorie des fonctions univalentes basés sur les méthodes de variations. Ils concèrnent le problème connu, des coefficients, dont je m'occupe avec mon collègue Mr. Janowski à l'Université de Łódź, depuis quelques années.

Considérons la famille F_M de fonctions de la forme

$$F(z) = z + A_2 z^2 + \ldots, \qquad |z| < 1, \tag{1}$$

univalentes et bornées, c.à.d. telles que

$$F(z_1) \neq F(z_2) \text{ si } z_1 \neq z_2 \text{ et } |F(z)| < M \text{ pour } |z| < 1, \tag{2}$$

$1 \leqslant M \leqslant +\infty$ étant un nombre arbitraire ou l'infini.

Prenons un nombre N naturel quelconque et faisons correspondre à chaque fonction (1) le point

$$P = (\lambda_2 \ldots, \lambda_N, \mu_2 \ldots, \mu_N), \text{ où } \lambda_k + i\mu_k = A_k, \; k = 2, \ldots, N, \tag{3}$$

de l'espace euclidien à $2N$—2 dimensions. Si la fonction (1) parcourt la famille F_M, on obtient dans l'espace cité un ensemble $V_N^{(M)}$ de points (3). Nous l'appellerons *la N-ième région de coefficients*, correspondant à la famille F_M. La caractérisation de l'ensemble $V_N^{(M)}$ est le problème fondamental de la théorie.

Pour l'étudier on peut appliquer la méthode des fonctions extrémales comme suit.

On prend une fonction quelconque réelle de variables réelles

$$H(X_2, \ldots, X_N, Y_2, \ldots, Y_N) \tag{4}$$

définie dans une région suffisamment grande et y possédant les derivées partielles du premier ordre continues, qui ne s'annullent nulle part simultanément. On fait correspondre à chaque fonction (1) le nombre réel

$$H_F = H(\lambda_2, \ldots, \mu_N). \tag{5}$$