

6. Relativ la problema construirii diferitelor norme posibile într-un spațiu vectorial, se știe că ea revine la construcția corpurilor convexe din X (Ascoli) [3], (Mazur) [4]. Dacă $\|x\|$ este o normă, mulțimea punctelor $x \in X$ pentru care $\|x\| = 1$, numită sfera unitate din X , trebuie să fie convexă în X , să admită ca centru punctul 0 și să nu treacă prin acest punct (căci $\|0\| = 0$). Aceste condiții sînt necesare și suficiente pentru ca $\|x\|$ să fie o normă, ceea ce rezultă cu ușurință din axiomele normei.

Ne punem aici întrebarea, dacă într-un spațiu vectorial X , există norme $N(x)$, care să fie funcționale analitice de x , în sensul lui A. Taylor [5], astfel încît să existe diferențiala lui Gâteaux :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N(x + \varepsilon y) - N(x)}{\varepsilon} = \delta_y N(x), \quad y \in X,$$

unde ε ia valori complexe. Observăm cu ușurință că :

Nici o normă $N(x)$ nu este analitică în punctul 0 .

Într-adevăr, în caz contrar, se știe că $N(x)$ ar admite dezvoltarea :

$$N(x) = A_0 + A_1(x) + \dots + A_n(x) + \dots,$$

unde $A_n(x)$ este o funcțională polinomială omogenă de grad n . Am avea, pentru $t > 0$, $N(tx) = A_0 + tA_1(x) + \dots + t^n A_n(x) + \dots = tN(x)$, de unde $A_0 = 0$, $A_n = 0$ pentru $n \geq 2$; deci $N(x) = A_1(x)$. Avem însă $N(x) = N(-x)$; deci, $A_1(x) = A_1(-x) = -A_1(x)$, și $A_1(x) = 0$, $N(x) = 0$.

Originea 0 este deci un punct singular pentru orice normă analitică $N(x)$. Vom putea însă construi norme analitice în $X - 0$, prin dezvoltări

$$N(x) = N(x_0) + \delta N(x_0; x - x_0) + \dots + \frac{1}{n!} \delta^n N(x_0; x - x_0) + \dots$$

unde rămîne ca termenii dezvoltării să fie aleși astfel încît toate axiomele normei să fie verificate. O astfel de normă este aceea uzitată în spațiul

L^p . Se constată cu ușurință că $\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$ este o funcțională analitică de x , cu excepția punctului 0 , și avem $\delta \|x\| = \|x\|^{1-p} \int_0^1 |x|^{p-2} xy$.

De altfel, se știe că, în orice punct x , există derivate la dreapta și la stînga (Mazur) [4]; există exemple de norme peste tot neanalitice în X .

BIBLIOGRAFIE

1. M. Fréchet, *La notion de différentielle dans l'Analyse générale*. Annales de l'École norm. sup. **42**, (1925), 293—323.
2. G. Birkhoff, *On the combination of topologies*. Fundam. math. **26**, (1936), 156.
3. G. Ascoli, *Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari*. Annali di matem., **10**, 1932, 33, 203.
4. S. Mazur, *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*. Studia matem., (1933), **4**, 70—84.
5. A. Taylor, *Analytic functions in general Analysis*. Annali della R. Scuola norm., Pisa, **6**, (1937), 277—292.

SUR LA STRUCTURE DES CONDITIONS D'UNIVALENCE D'UNE FONCTION HOLOMORPHE DANS UN CERCLE

BULL. MATH. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R. **1(49)**, 3 (1957), 251—258

(Communication au Congrès des mathématiciens roumains. Bucarest, mai—juin 1956)

Le problème des fonctions univalentes dans un domaine à frontière circulaire est, parmi les problèmes spéciaux concernant les fonctions analytiques, l'un de ceux qui ont suscité de nombreuses recherches dans les 30 dernières années. Ce problème se pose de deux manières équivalentes, en partant de l'une ou l'autre des définitions suivantes :

I. Appelons S la classe des fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle-unité, dont le développement est de la forme

$$\varphi(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

II. Appelons Σ la classe des fonctions holomorphes à l'extérieur du cercle-unité, en exceptant le point ∞ qui est un pôle simple, univalentes pour $|z| > 1$ et de la forme

$$f(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \dots + \frac{\alpha_n}{z^n} + \dots$$

On passe de S à Σ , ou inversement, par des transformations simples, ce qui permet de se borner à l'étude de l'une de ces deux classes. Les propriétés de ces fonctions, connues aujourd'hui, sont assez diverses et assez nombreuses.

Nous voulons indiquer ici des considérations qui ont permis d'écrire les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les coefficients α pour que $f(z)$ appartienne à la classe Σ . Le problème correspondant pour la classe S se ramène au précédent, en posant par exemple

$$f(z) = \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Le premier résultat remarquable concernant les coefficients α d'une fonction de la classe Σ fut le théorème de l'aire de L. Bieberbach (1919), qui s'exprime par l'inégalité

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_n|^2 \leq 1.$$

Ce résultat permet d'établir des propriétés fondamentales des fonctions de la classe \mathcal{S} , à savoir l'inégalité $|a_2| \leq 2$ et les théorèmes de contraction qui jouent un rôle dans la théorie de l'uniformisation.

La condition (1) étant nécessaire pour que $f(z)$ appartienne à la classe Σ , on se pose naturellement le problème des conditions nécessaires et suffisantes pour $f(z) \in \Sigma$. Plusieurs méthodes furent employées afin d'arriver à ces conditions, mais les inégalités obtenues d'abord sont loin de présenter la simplicité de l'inégalité (1) de Bieberbach. Mentionnons le travail de Prawitz [1] (1926) où de nouvelles conditions nécessaires sont obtenues, grâce à une généralisation du procédé de Biberbach, basé sur le calcul d'une aire. Grunsky [2] (1939) obtient des conditions nécessaires et suffisantes d'une forme compliquée et sans analogie avec l'inégalité (1). Ensuite, G. Golusin [3] (1940) et M. Biernacki [4] (1946), donnent au théorème de l'aire toute son extension, en l'appliquant aux fonctions p -valentes dans un cercle. Une infinité de nouvelles conditions nécessaires pour $f(z) \in \Sigma$ apparaissent ainsi, et W. Wolibner [5] (1951) établit que ces conditions sont aussi suffisantes pour $f(z) \in \Sigma$, sans essayer d'écrire effectivement les inégalités en question. En 1954, j'ai été conduit [6] à ces conditions par une voie un peu différente, mais basée elle-aussi sur la généralisation du théorème de l'aire. Les inégalités que j'ai obtenues sont analogues à (1), quoique de plus en plus compliquées à mesure que leur nombre augmente. J'ai cru qu'il peut être intéressant d'indiquer ici l'essentiel sur la structure de ces conditions et sur la manière la plus simple qui permet de les obtenir. Soit

$$Z = f(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{z^n} + \dots$$

une fonction holomorphe pour $|z| > 1$, sauf au point ∞ . On sait qu'une telle fonction est toujours univalente dans un domaine $|z| > R$, pour R suffisamment grand. Elle transforme tout cercle γ_r , $|z| = r > 1$ en une courbe fermée analytique Γ_r , et ce sera une courbe simple pour $r > R$. Le principe qui mène à la condition (1) de Bieberbach consiste à remarquer que l'aire orientée de cette courbe fermée Γ sera toujours positive pour $r > 1$ si la fonction $f(z)$ appartient à la classe Σ . Nous entendons par aire orientée de Γ_r la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_r} X dY - Y dX$$

prise dans le sens qui correspond sur Γ_r au sens positif sur le cercle γ_r . En écrivant

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r} X dY - Y dX &= \int_{\Gamma_r} I(\bar{Z} dZ) = -i \int_{\Gamma_r} \bar{Z} dZ = -i \int_{\Gamma_r} \overline{f(z)} f'(z) dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \overline{f(z)} z f'(z) d\theta > 0, \end{aligned}$$

on arrive sans peine à la condition (1) appelée théorème de l'aire.

D'une manière générale, F représentant une fonction entière quelconque, la fonction $F[f(z)]$ sera holomorphe pour $|z| > 1$, sauf au point ∞ . Si $f(z) \in \Sigma$, la courbe Γ_r étant simple, donc d'aire positive, $F(Z)$ transforme cette courbe en une autre courbe fermée analytique Γ'_r d'aire positive. En effet, cette aire est donnée aussi par

$$\iint_{(\Gamma'_r)} dX' dY' = \iint_{(\Gamma_r)} |F'(Z)|^2 dX dY.$$

Ainsi, pour $f(z) \in \Sigma$, la fonction $F[f(z)]$ transforme le cercle γ_r en Γ'_r d'aire positive. Il en résulte

$$-i \int \overline{F(Z)} dF(Z) > 0.$$

En prenant pour $F(Z)$ un polynôme quelconque

$$F(Z) = a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots + a_r Z^r$$

ceci nous donne

$$\sum_{p,q=1}^n a_p \bar{a}_q \mu_{pq} > 0, \quad \mu_{pq} = -i \int_{\Gamma_r} \bar{Z}^q d(\bar{Z}^p).$$

C'est une forme hermitienne qui doit être positive, d'où les conditions nécessaires pour l'univalence de $f(z)$

$$(3) \quad \mu_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

La première de ces conditions (qui sont en nombre infini), à savoir $\mu_{11} > 0$, coïncide avec le théorème de l'aire, et conduit à l'inégalité (1). Mais les conditions (3) sont aussi suffisantes pour $f(z) \in \Sigma$.

Il suffit de montrer que si $f(z)$ est holomorphe pour $|z| > 1$, sauf au point ∞ qui est un pôle simple, et $f(z)$ n'est pas univalente pour $|z| > 1$, la forme hermitienne (3) peut prendre des valeurs négatives. Ceci résulte du fait que si $f(z)$ n'est pas univalente dans $|z| > 1$, la courbe Γ_r possède des points multiples pour des valeurs $r > 1$; elle décompose alors le plan en un nombre fini de régions bornées, et parmi ces régions il y a toujours une, G , dont l'aire orientée est négative, région qui est contigue, tout le long d'un arc de courbe, à la région illimitée définie par Γ_r . Une démonstration rigoureuse de ces propriétés a été donnée par Wolibner [5] (1951) à l'aide de l'indicatrice de Γ_r . Nous reviendrons à l'instant sur cette démonstration.

Remarquons d'abord que, grâce à ces propriétés, on pourra choisir pour $F(Z)$ un polynôme qui, dans G , approche une constante A aussi grande que l'on veut, tandis que $F(Z)$ approche zéro dans les autres régions bornées définies par la courbe Γ_r . Ceci est possible grâce au fait que l'on

peut joindre un point de G au point ∞ par un chemin qui ne traverse aucune autre région bornée définie par la courbe Γ_r (Montel, 1910). Pour ce choix du polynôme $F(Z)$ on aura donc

$$-i \int_{\Gamma_r} \overline{F(Z)} dF(Z) < 0$$

et les conditions (3) ne seront pas vérifiées, ces conditions étant nécessaires et suffisantes pour la positivité de la forme hermitienne (2). Ainsi, (3) sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'univalence de $f(z)$

Voici maintenant la démonstration par laquelle Wolibner établit les propriétés que nous venons d'utiliser. Désignons par

$$I(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_r} d[\arg(Z - u)]$$

l'indicatrice de la courbe Γ_r au point u . C'est le nombre de tours que le vecteur $Z - u$ effectue autour du point u lorsque Z décrit la courbe Γ_r dans le sens positif. Soient D_i , $i = 1, 2, \dots, p$, les régions bornées simplement connexes définies par Γ_r dans le plan (Z), et D_0 la région illimitée extérieure à cette courbe. Désignons par I_i la valeur de $I(u)$ pour un point quelconque de la région D_i . On a évidemment $I_0 = 0$. De plus, $1 - I(u)$ représente le nombre de fois que $f(z)$ prend la valeur u pour $|z| > r$, donc $1 - I(u) \geq 0$. Pour le voir, il suffit de considérer un second cercle $\gamma_{r'}$, avec $r' > r$, et d'évaluer le nombre des zéros de $f(z) - u = 0$ dans la couronne $(\gamma_r, \gamma_{r'})$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r'}} \frac{f'(z)}{f(z) - u} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z) - u} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_r} d[\arg(Z - u)] - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_r} d[\arg(Z - u)].$$

Pour r' suffisamment grand, la courbe Γ_r sera simple et tournera une fois autour du point u , donc $1 - I(u)$ donne le nombre des zéros de $f(z) - u = 0$ pour $|z| > r$. Ainsi, $I(u) \leq 1$. Les régions D_i pour lesquelles $I_i \leq 0$ forment une région unique, d'un seul tenant, puisque ces régions correspondent aux valeurs u effectivement prises par $f(z)$ pour $|z| > r$, et puisque $|z| > r$ est un domaine connexe. Il existe donc une D_i qui est contiguë à D_0 le long d'un arc de Γ_r et pour laquelle $I_i < 0$. En effet, il existe un $I_i < 0$ puisque $f(z)$ n'est pas univalent dans $|z| > r$, donc $1 - I(u) > 1$ pour des valeurs de u qui remplissent un domaine. Et si toutes les régions D_i contiguës à D_0 auraient des $I_i > 0$, la région D_0 , pour laquelle $I_0 = 0$ serait séparée des régions négatives ($I_i < 0$), ce qui contredit la propriété déjà établie suivant laquelle toutes les régions où $I_i \leq 0$ forment une région unique. Les conditions (3) sont donc nécessaires et suffisantes pour $f(z) \in \Sigma$.

Il reste à faire apparaître dans ces inégalités les coefficients α_n du développement

$$Z = f(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{z^n} + \dots$$

Posons

$$Z^m = z^m + B_{-m+1}^m z^{m-1} + \dots + \frac{B_n^m}{z^n} + \dots = \sum_{n=-m}^{\infty} \frac{B_n^m}{z^n}, \quad B_{-m}^m = 1; \quad B_{-p}^m = 0, \quad p > m.$$

On a, avec $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho = \min(p, q)$,

$$\begin{aligned} \mu_{pq} &= -i \int_{\Gamma_r} Z^q d(Z^p) = -i \sum_{n,s=-p+q}^{\infty} \bar{B}_n^q B_s^p \int_{\Gamma_r} \frac{-s}{\bar{z}^n z^{s+1}} dz = \\ &= \sum_{n,s=-p}^{\infty} B_s^p \bar{B}_n^q \int_0^{2\pi} \frac{-s}{r^{n+s}} e^{i(n-s)\theta} d\theta, \quad \mu_{pq} = -2\pi \sum_{r=-p} n B_n^p \bar{B}_n^q r^{-2n}. \end{aligned}$$

En portant ces expressions dans les conditions (3), et en posant

$$D_{n_1 n_2 \dots n_p}^{s_1 s_2 \dots s_p} = \begin{vmatrix} B_{n_1}^{s_1} B_{n_2}^{s_2} \dots B_{n_p}^{s_p} \\ \dots \\ B_{n_1}^{s_p} B_{n_2}^{s_p} \dots B_{n_p}^{s_p} \end{vmatrix}$$

on trouve les inégalité en nombre infini

$$(4) \quad (-1)^p \sum_{n_1, n_2, \dots, n_p = -p}^{\infty} \frac{n_1 n_2 \dots n_p}{r^{2(n_1 + \dots + n_p)}} \left| D_{n_1 n_2 \dots n_p}^{1, 2, \dots, p} \right|^2 > 0, \quad r > 1, \quad p = 1, 2, \dots$$

On peut y ajouter $n_1 < n_2 < \dots < n_p$.

Ces conditions nécessaires et suffisantes pour que $f(z) \in \Sigma$, sont analogues à la condition (1) de Bieberbach, qui correspond à $p = 1$, $r = 1$. Nous verrons d'ailleurs que l'on peut mettre $r = 1$ dans (4), et remplacer le signe $>$ par \geq . Mais il peut être avantageux d'y adjoindre les inégalités

$$\mu_{ss} > 0, \quad \begin{vmatrix} \mu_{ss} & \mu_{st} \\ \mu_{ts} & \mu_{tt} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} \mu_{ss} & \mu_{st} & \mu_{su} \\ \mu_{ts} & \mu_{tt} & \mu_{tu} \\ \mu_{us} & \mu_{ut} & \mu_{uu} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

qui, d'ailleurs, sont des conséquences de (3). On remplace alors (4) par

$$(5) \quad (-1)^p \sum_{n_1, n_2, \dots, n_p = -p}^{\infty} \frac{n_1 n_2 \dots n_p}{r^{2(n_1 + \dots + n_p)}} \left| D_{n_1 n_2 \dots n_p}^{s_1 s_2 \dots s_p} \right|^2 > 0, \quad r > 1, \quad p = 1, 2, \dots,$$

les nombres entiers positifs s_1, s_2, \dots, s_p étant quelconques, mais distincts, et $\rho = \min(s_1, s_2, \dots, s_p)$.

La convergence des séries (4) pour $r = 1$ résulte du fait que

$$\mu_{qp}(r=1) = -2\pi \sum_{n=-p}^{\infty} n B_n^p \bar{B}_n^q$$

est une série convergente, car

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} n B_n^p \bar{B}_n^q \right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n |B_n^p|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n |B_n^q|^2,$$

tandis que la convergence des dernières séries résulte de (5) pour $p = 1$. En faisant apparaître les sommes positives

$$A_{s_1, s_2, \dots, s_p} = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_p=1}^{\infty} n_1 n_2 \dots n_p |D_{n_1 n_2 \dots n_p}^{s_1 s_2 \dots s_p}|^2, \quad n_1 < n_2 < \dots < n_p,$$

la structure des conditions (5) devient visible. On a

$$A_1 \leq 1, A_2 \leq 2, A_3 \leq 3 + 9 |\alpha_1|^2, \dots, A_p \leq p |B_{-p}^p|^2 +$$

$$(6) \quad + (p-1) |B_{-p+1}^p|^2 + \dots + |B_{-1}^p|^2, \dots, 2A_1 + A_2 \leq 2 + A_{12}, A_3 \leq \\ \leq A_{13}, \dots, 6A_1 + 3A_2 + 2A_3 + A_{123} \leq 6 + 3A_{12} + 2A_{13} + A_{23}, \dots,$$

Remarquons que l'égalité dans l'une des conditions (4) ne peut avoir lieu que si $r = 1$ et toutes les conditions deviennent des égalités, donc aussi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_n|^2 = 1.$$

En effet, nous avons vu que, si $f(z) \in \Sigma$, un polynôme quelconque $F(Z)$ transforme la courbe Γ_r en une courbe d'aire positive, donnée par

$$\mathfrak{A} = \sum_{p,q=1}^n a_p \bar{a}_q \mu_{pq}, \quad \text{avec } F(Z) = a_1 Z + \dots + a_n Z^n$$

En posant $a_n = 1$, on trouve qu'il existe alors un seul polynôme du degré n qui rend l'aire \mathfrak{A} minima. En posant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{21} & \dots & \mu_{n1} \\ \mu_{12} & \mu_{22} & \dots & \mu_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{1n} & \mu_{2n} & \dots & \mu_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{on a } F(Z_n) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{21} & \dots & \mu_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{1, n-1} & \mu_{2, n-1} & \dots & \mu_{n, n-1} \\ Z & Z^2 & \dots & Z^n \end{vmatrix}$$

et l'on trouve pour le minimum de l'aire \mathfrak{A} la valeur $\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$. Ceci redonne

$\Delta_n > 0$, donc les conditions (3). Mais on voit en même temps que l'on ne peut avoir $\Delta_n = 0$ que si $r = 1$, l'aire intérieure à la courbe Γ_r et celle intérieure à sa transformée par $F_n(Z)$ ne pouvant être nulles. De plus, si

pour $r = 1$, $\Delta_n = 0$, puisque $F_n(Z)$ tend uniformément pour $r \rightarrow 1$, vers un polynôme-limite $F_n^*(Z)$, l'aire intérieure à Γ_r doit tendre elle aussi vers zéro, pour $r \rightarrow 1$. Ainsi, $f(z)$ transforme $|z| > 1$ en un domaine dont le complément est un continu borné d'aire nulle, donc sans points intérieurs. On aura alors $\Delta_n = 0$ pour $r = 1$ et pour chaque $n > 0$. Mais les conditions (5) ne deviennent pas toutes des égalités, en même temps que les conditions (4). Ainsi, les égalités

$$(-1)^p \sum_{n_1, n_2, \dots, n_p=-p}^{\infty} n_1 n_2 \dots n_p |D_{n_1 n_2 \dots n_p}^{12 \dots p}|^2 = 0$$

paraissent définir les éléments-frontière de la famille Σ . Plaçons-nous dans l'espace de Hilbert complexe, dont les points $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$ qui correspondent aux fonctions $f(z) \in \Sigma$ forment un continu compact Σ^* , grâce à la normalité de la famille Σ . La convergence de $\sum |\alpha_n|^2$ pour $f(z) \in \Sigma$ est assurée par la condition (1). On a, avec la définition connue du produit scalaire

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \overline{g(re^{i\theta})} d\theta = \sum_{n,p} \frac{\alpha_n \bar{\beta}_p}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{z^n \bar{z}^p} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{\alpha_n \bar{\beta}_n}{r^{2n}}$$

et l'on trouve pour l'aire intérieure à la courbe Γ_r

$$i \int_{\Gamma_r} f(z) \overline{f'(z)} dz = (f, z f') = r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{|\alpha_n|^2}{r^{2n}} > 0.$$

L'identité immédiate $(f, g) = r^{-2m} (z^m f, z^m g)$, où m est un entier, permet de donner un sens au produit scalaire $(f^p, z[f^q]')$, et l'on trouve

$$\mu_{pq} = (f^p, z[f^q]') = q(f^p, z f' f^{q-1}).$$

Ceci permet de donner aux conditions (3) une forme intégrale assez simple, et qui peut être utile pour le calcul

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 \frac{z f'}{f} d\theta > 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_1 f_2 V(f_1, f_2)|^2 \cdot \frac{z_1 f_1'}{f_1} \cdot \frac{z_2 f_2'}{f_2} d\theta_1 d\theta_2 > 0,$$

$$\dots \dots \dots \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_1 \dots f_p V(f_1, \dots, f_p)|^2 \cdot \frac{z_1 f_1' z_2 f_2'}{f_1 f_2} \dots \frac{z_p f_p'}{f_p} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_p > 0.$$

On a posé ici $z_k = r e^{i\theta_k}$, $f_k = f(z_k)$, et $V(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est le déterminant de Vandermonde correspondant à u_1, u_2, \dots, u_p .

La détermination de la classe Σ revient à celle du continu Σ^* dans l'espace de Hilbert, problème qui n'est pas résolu. Il nous semble probable

que la frontière de ce continu corresponde aux fonctions f pour lesquelles les conditions (4) deviennent toutes des égalités.

Remarquons encore que les conditions (4) se réduisent toutes à des inégalités rationnelles en termes finis pour des fonctions de la forme

$$f(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \dots + \frac{\alpha_n}{z^n}$$

qui joue ici le rôle des polynômes univalents de la classe S .

L'étude des fonctions de cette forme à l'aide des inégalités (4) présente de l'intérêt, étant donnée la possibilité d'approcher uniformément à l'aide de telles fonctions toutes les autres fonctions de la classe Σ . Posons, pour terminer, le problème suivant: Peut-on déterminer des classes de fonctions, appartenant à S ou à Σ , dépendant de N paramètres, exprimables en termes finis, et pour lesquelles les conditions nécessaires et suffisantes d'univalence se réduisent à un nombre fini d'inégalités en termes finis, reliant ces paramètres?

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Prawitz, *Über Mittelwerte analytischer Funktionen*. Archiv för Mathem. Astron. och Fisik **20** (1927-28), 8.
2. H. Grunsky, *Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen*, Math. ZS., **45** (1939), 29.
3. G. Golusin, *Über p -valente Funktionen*, Recueil Math., **8** (1940), 277.
4. M. Biernacki, *Sur les fonctions en moyenne multivalentes*, Bull. de la Soc. Math. de France, **73** (1946), 3.
5. W. Wolibner, *Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction analytique soit univalente*, Colloquium mathematicum **II** (1951), 249.
6. G. Călugăreanu, *Despre funcțiile univalente (II)*, Stud. și Cerc. Șt. Cluj, **V** (1954), 15.

L'INTÉGRALE DE GAUSS ET L'ANALYSE DES NŒUDS TRIDIMENSIONNELS

(Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 4, 1959 p. 5-20)

On doit à Gauss la découverte du premier invariant d'isotopie¹⁾ relatif à un enlacement de deux courbes fermées de l'espace euclidien tridimensionnel. Les courbes fermées rectifiables C_1 et C_2 étant sans point commun, cet invariant est donné par la double intégrale curviligne

$$I = \frac{1}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{1}{r_{12}^3} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & dx_1 & dx_2 \\ y_1 - y_2 & dy_1 & dy_2 \\ z_1 - z_2 & dz_1 & dz_2 \end{vmatrix} \quad r_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

les points $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ parcourant les courbes C_1 et C_2 respectivement. En désignant par $\omega(M_2)$ une détermination de l'angle solide sous lequel on voit le contour C_1 en se plaçant en M_2 , on trouve

$$I = \frac{1}{4\pi} \int_{C_2} d\omega(M_2).$$

I représente la variation, divisée par 4π , de $\omega(M_2)$ lorsque M_2 parcourt C_2 , donc I est un nombre entier. C'est un invariant pour toute déformation continue des courbes C_1 et C_2 pendant laquelle C_1 et C_2 ne se traversent jamais l'une l'autre, et cette invariance résulte du fait que I , regardée comme fonction des lignes C_1 et C_2 , est continue par rapport à C_1 et C_2 tant que r_{12} reste supérieur à un nombre positif fixe, et du fait que I ne prend que des valeurs entières.

A notre connaissance, aucun invariant de cette nature n'a été signalé pour une courbe fermée C unique et, afin d'en obtenir un, nous avons songé à faire coïncider C_1 et C_2 dans l'invariant I de Gauss. Nous montrerons ici que l'on obtient ainsi un invariant d'isotopie attaché à une courbe fermée C de l'espace, et que cet invariant n'est pas banal, c'est-à-dire qu'il n'est pas nul pour toute courbe fermée C . Examinons d'abord la double intégrale curviligne

$$(1) \quad J = \frac{1}{4\pi} \int_C \int_C \frac{1}{r_{12}^3} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x'_1 & x'_2 \\ y_1 - y_2 & y'_1 & y'_2 \\ z_1 - z_2 & z'_1 & z'_2 \end{vmatrix} dt_1 dt_2$$

¹⁾ Deux courbes fermées de l'espace, C et C_1 , sans points multiples, sont isotopes s'il existe une déformation continue de C en C_1 , pendant laquelle la courbe déformée n'acquiert jamais de point multiple. L'isotopie est une relation d'équivalence qui permet de partager l'ensemble des courbes sans points multiples en classes d'isotopie qu'il s'agit de caractériser par une suite d'invariants d'isotopie. Un problème analogue se pose pour les enlacements de deux ou plusieurs courbes fermées sans points communs deux à deux. On appelle *noeud* toute courbe fermée sans points multiples.