

In cel de al V-lea an de apariție (1960) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* cuprinde aceleași serii:

- I. matematică, fizică, chimie;
- II. geologie, geografie, biologie;
- III. filozofie, economie politică, psihologie, pedagogie, științe juridice;
- IV. istorie, lingvistică, literatură.

Fiecare serie apare anual în 2 fascicule.

V. (1960-as) évfolyamában a *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* változatlanul alábbi sorozatokat öleli fel:

- I. matematika, fizika, kémia;
- II. geológia, földrajz, biológia;
- III. filozófia, politikai gazdaságtan, lélektan, pedagógia, jogtudomány;
- IV. történet-, nyelv- és irodalomtudomány.

Minden sorozatban évenként két füzet jelenik meg.

На V году издания (1960), *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* выходит теми сериями:

- I. математика, физика, химия;
- II. геология, география, биология;
- III. философия, политэкономия, психология, педагогика, юридические н.
- IV. история, языкознание, литературоведение.

В каждой серии ежегодно выходят два выпуска.

Dans leur V-me année de la publication (1960) les *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* comportent les mêmes séries:

- I-e mathématiques, physique, chimie;
- II-e géologie, géographie, biologie;
- III-e philosophie, économie politique, psychologie, pédagogie, sciences juridiques;
- IV-e histoire, linguistique, littérature.

Chaque série comprend deux fascicules par année.

P. 577

STUDIA

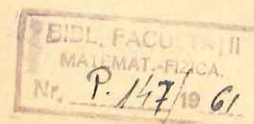
UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES I FASCICULUS 1

1960

MATHEMATICA
PHYSICA

C L U J



BCU Cluj-Napoca



PMATE 2014 00338

COMITETUL DE REDACȚIE — SZERKESZTŐ BIZOTTSAG
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ — COMITÉ DE RÉDACTION

Acad. Prof. C. DAICOVICIU (redactor responsabil), Conf. I. CETERCHI, Conf. V. I. CIMPIANU, Prof. J. DEMETER, Conf. Ó. FELSZEGHY, Conf. M. KALLÓS, Prof. N. LASCU, Prof. T. LÁSZLÓ, Prof. D. MACREA, Prof. GY. MARTON, Prof. T. MORARIU, membru coresp. Acad., Conf. L. NAGY, Prof. I. PÉTERFI, membru coresp. Acad. (redactor responsabil adjunct), Acad. Prof. E. PETROVICI, Prof. Gh. PIC, Prof. T. POPOVICIU, membru coresp. Acad., Prof. E. A. PORA, membru coresp. Acad., Acad. Prof. R. RIPAN, Prof. Al. ROȘCA, Conf. I. URSU

Redacția:
CLUJ, str. Kogălniceanu 1
Telefon 34—50

S U M A R

T. POPOVICIU, Opera științifică a lui J. Bolyai	9
E. KISS, Rezolvarea în numere naturale a ecuației diofantiene $x^2 + y^3 = z^4$	15
Gh. PIC, Despre o teoremă a lui B. H. Neumann	21
G. CALUGĂREANU, Asupra izotopiei curbilor închise	27
G. CALUGĂREANU, Asupra unui sistem de invarianți de izotopie	35
F. RADO, Generalizarea țeșturilor spațiale pentru structuri algebrice	41
M. FRODA-SCHECHTER, Studiul unei proprietăți a translațiilor de mulțimi	57
I. MARUȘCIAC, Asupra polinoamelor lui Cebîșev k-restrânse pe o mulțime mărgi- nită și închisă din planul complex	73
P. T. MOCĂNU, O teoremă asupra funcțiilor univalente	91
D. V. IONESCU, O teoremă asupra sistemelor de ecuații liniare	97
F. MUNTEANU, Extinderea unei teoreme referitoare la sisteme de ecuații liniare	107
M. FERTIG, Despre comportarea integralelor ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți, care depind de un parametru	121
G. KÁLIK și P. SZILÁGYI, Despre rezolvarea problemei la limită a lui Neumann	131
L. NEMETI, Tensiuni termice în prisme lungi	143
A. NEY, Despre cazul de nehotărîre al criteriului de convergență al lui D'Alembert	153
E. MOLDOVAN, Observații asupra problemei celei mai bune aproximații într-un spațiu abstract	163
F. CONSTANTINESCU, Asupra distanței a două mulțimi într-un spațiu vectorial normat	167
T. MIHĂILESCU, Rețele izoterm-conjugate situate pe suprafețele riglate	169
E. GERGELY, Despre ovale pe baza ecuațiilor lor intrinseci	175
L. BAL, Asupra unor suprafețe ce intervin în nomografie	181
D. D. STANCU, Asupra calculului coeficienților unei formule generale de cuadratură	187
F. COȚIU și A. COȚIU, Delimitarea erorii procedurii de ordinul al cincilea a lui Kutta de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale	193
E. TATARU, Studiu asupra proprietăților de radiație ale antenelor lentile excitare de pîlnii electromagnetice piramidale sau sectoriale	199
F. KELEMEN, Influența temperaturii asupra potențialului de mișcare al metalelor în apă distilată	205
V. MERCEA, Viscosimetru cu capilară inelară	217
V. MERCEA, Rezistențe la scurgere în scurgeri capilare de gaze și măsurarea lor cu viscosimetru cu capilară	239
I. MAXIM, IULIU POP și A. NICULA, O metodă sensibilă pentru determinarea relativă a susceptibilității magnetice, cu compensare în câmpul gravitațional	254
I. MAXIM, A. NICULA și IULIU POP, O metodă magnetometrică pentru măsurarea remanenței magnetice	265
KOCH F., Unele probleme legate de variația cu temperatura a efectului Procopiu	269

Cronică

Ecuații funcționale în legătură cu nomografia (F. RADO)	277
Mulțimi de funcții interpolatoare și noțiunea de funcție convexă (E. MOLDOVAN)	279
Cursuri speciale: Curs special predat de prof. G. CALUGĂREANU Curs special predat de prof. T. POPOVICIU Curs special predat de prof. E. MOLDOVAN	285

СОДЕРЖАНИЕ

Т. ПОПОВИЧУ, Научная деятельность И. Бойан	9
Э. КИШШ, Решение в натуральных числах диофантового уравнения $x^2 + y^2 = z^4$	15
Г. ПИК, Об одной теореме Б. Х. Неймана	21
Дж. КЭЛУГЭРЯНУ, Об изотопии замкнутых кривых	27
Дж. КЭЛУГЭРЯНУ, Об одной системе инвариантов изотопии	35
Ф. РАДО, Обобщение пространственных тканей для алгебраических структур	41
М. ФРОДА-ШЕХТЕР, Исследование одного свойства переносов множеств	57
И. МАРУЩАК, О полиномах Чебышева k -условных на замкнутом и ограниченном множестве комплексной плоскости	73
П. Т. МОКАНУ, Одна теорема об однолистных функциях	91
Д. В. ИОНЕСКУ, Одна теорема о системах линейных уравнений	97
Ф. МУНТЯНУ, Расширение одной теоремы, относящейся к системе уравнений	107
М. ФЕРТИГ, О поведении интегралов дифференциальных линейных уравнений с постоянными коэффициентами, зависящими от одного параметра	121
К. КАЛИК, П. СИЛАДИ, О решении проблемы Неймана	131
Л. НЕМЕТИ, Тепловые напряжения в длинных призмах	143
А. НЕЙ, О случае сомнения признака сходимости Даламбера	153
Е. МОЛДОВАН, Замечания относительно наилучшего приближения в абстрактных пространствах	163
Ф. КОНСТАНТИНЕСКУ, О расстоянии двух множеств в нормированном векторном пространстве	167
Т. МИХЭИЛЕСКУ, Изотермо-сопряженные сети на линейчатых поверхностях	169
Е. ГЕРГЕЙ, Об овалах на основании их внутренних уравнений	175
Л. БАЛ, О некоторых поверхностях, возникающих в номографии	181
Д. Д. СТАНКУ, О вычислении коэффициентов одной общей формулы квадратуры	187
Ф. КОЦИЮ, А. КОЦИЮ, Оценка ошибки способа пятой степени Кутта числового интегрирования дифференциальных уравнений	193
Э. ТЭТАРУ, Изучение излучительных свойств линзовых антенн, раздраженных электромагнитными пирамидальными или секториальными рупорами	199
Ф. КЕЛЕМЕН, Влияние температуры на потенциал движения металлов в дистиллированной воде	205
В. МЕРЧА, Вискозиметр с кольцевым капилляром	217
В. МЕРЧА, Сопротивление истечения при капиллярных истечениях газов и измерение их при помощи вискозиметра с кольцевыми капиллярами	239
И. МАКСИМ, Ю. ПОП, А. НИКУЛА, Чувствительный метод для относительного определения магнитной восприимчивости с компенсацией в гравитационном поле	259
И. МАКСИМ, А. НИКУЛА, Ю. ПОП, Магнитометрический метод для измерения остаточного магнетизма	265
Ф. КОХ, Некоторые проблемы в связи с температурной вариацией эффекта Прокопну	269
Хроника	279

S O M M A I R E

T. POPOVICIU, L'oeuvre scientifique de J. Bolyai	9
E. KISS, Résolution en nombres naturels de l'équation diophantienne $x^2 + y^3 = z^4$	15
GH. PIC, Sur un théorème de B. H. Neumann	21
G. CALUGAREANU, Sur l'isotopie des courbes fermées	27
G. CALUGAREANU, Sur un système d'invariants d'isotopie	35
F. RADO, Généralisation des tissus spatiaux, pour certaines structures algébriques	41
M. FRODA-SCHECHTER, Étude d'une propriété des translations d'ensembles	57
I. MARUȘCIAC, Sur les polynômes de Tchebychev k-restreints à un ensemble limité et fermé du plan complexe	73
P. T. MOCANU, Un théorème sur les fonctions univalentes	91
D. V. IONESCU, Un théorème sur les systèmes d'équations linéaires	97
F. MUNTEANU, Extension d'un théorème relatif à des systèmes d'équations	107
M. FERTIG, Sur le comportement des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients constants qui dépendent d'un paramètre	121
C. KALIK, P. SZILAGYI, Sur la solution du problème de la limite de Neumann	131
L. NEMETI, Tensions thermiques dans des prises longs	143
A. NEY, Sur le cas d'indétermination du critérium de convergence de d'Alembert	153
E. MOLDOVAN, Sur la meilleure approximation dans espaces abstraits	163
F. CONSTANTINESCU, Sur la distance de deux ensembles dans un espace vectoriel normé	167
T. MIHAILESCU, Les réseaux isothermes-conjugués situés sur des surfaces réglés	169
E. GERGELY, Problèmes des ovales fondés sur leurs équations itrisèques	175
L. BAL, Sur certaines surfaces intervenant en nomographie	181
D. D. STANCU, Sur le calcul des coefficients d'une formule générale de quadrature	187
F. COȚIU et A. COȚIU, Délimitation de l'erreur du procédé de cinquième ordre de Kutta pour l'intégration numérique des équations différentielles	193
E. TATARU, Étude sur les propriétés de radiation des antennes lentilles excitées par des pavillons électromagnétiques, pyramidaux ou sectoriaux	199
F. KELEMEN, L'influence de la température sur le potentiel de mouvement des métaux dans l'eau distillée	205
V. MERCEA, Le viscosimètre à capillaire annulaire	217
V. MERCEA, Les résistances à l'écoulement dans les écoulements capillaires de gaz et leur mesure avec le viscosimètre à capillaires annulaires	238
I. MAXIM, I. POP, A. NICULA, Sur une méthode sensible pour la détermination relative de la susceptibilité magnétique, avec compensation dans le champ gravitationnel	259
I. MAXIM, A. NICULA, I. POP, Méthode magnétométrique pour la mesure de la rémanence magnétique	265
F. KOCH, Problèmes liés à la variation de l'effet Procopiu en fonction de la température	269
Chronique	297

OB UNO TEOREMA B. X. NEIMANA

(Краткое содержание)

Излагается обобщение некоторых результатов Б. Х. Неймана [4].

Будучи дана группа G , тогда множество нормальных подгрупп N , для которых G/N является FC -группой, образует структуру. Эта структура может иметь минимальный элемент, например, и в случае, когда характеристические подгруппы обладают минимальным ограничением. Эта подгруппа, если существует, обозначается через $R(G)$. Доказывается, что $R(G)$ полностью инвариантна и, если H и K являются двумя нормальными подгруппами, тогда из $H \subset K$ вытекает $R(H) \subset R(K)$.

Определение $R(G)$ может быть обобщено и, таким образом, вводится $R_k(G)$ как минимальный элемент структуры характеристических подгрупп M , содержащихся в $R_{k-1}(G)$, для которых $R_{k-1}(G)/M$ является FC -группой в G/M .

Эти подгруппы обладают тем свойством, что $R_k(G)$ находятся в убывающем центре с порядковым числом k . Данное свойство можно рассматривать как конечно дуальное со свойством, доказанным Ф. Хаймо [3] для возрастающих FC центров. Из остальных свойств отмечаем формулу $[R_k(G)/N] = [R_k(G) \cdot N]/N$.

Наконец даются следующие обобщения некоторых известных теорем Б. Неймана, а именно:

ТЕОРЕМА. R_k/S_k является абелевой группой без кручения, где через S_k обозначена нормальная подгруппа элементов R_k конечного порядка mod R_k .

ТЕОРЕМА. $[GoR_{k-1}]/R_k$ является группой кручения.

SUR UN THÉORÈME DE B. H. NEUMANN

(Résumé)

L'auteur généralise certains résultats dus à B. H. Neumann [4].

Étant donné un groupe G , l'ensemble des sous-groupes normaux N tels que G/N soit un groupe FC forme un treillis (lattice). Ce treillis peut avoir un élément minimal, par exemple, dans le cas où les sous-groupes caractéristiques ont une limitation minimale. Ce sous-groupe, s'il existe, se note $R(G)$. On peut démontrer que $R(G)$ est invariant pour tous les endomorphismes du groupe et que, si H et K sont deux sous-groupes normaux, il résulte alors de $H \subset K$ que $R(H) \subset R(K)$.

On peut généraliser la définition de $R(G)$ et l'on introduit ainsi $R_k(G)$ comme élément minimal de la structure des sous-groupes caractéristiques M contenus dans $R_{k-1}(G)$ pour lesquels $R_{k-1}(G)/M$ est un groupe- FC dans G/M .

Ces sous-groupes jouissent de la propriété que $R_k(G)$ est contenu dans le k -ième centre descendant. Cette propriété peut être considérée comme étant la duale d'une proposition démontrée par F. Haimo [3] pour les FC centres ascendants. Parmi les autres propriétés nous relevons la formule $R_k(G)/N = [R_k(G) \cdot N]/N$.

On présente enfin les généralisations suivantes de théorèmes de B. H. Neumann, à savoir :

THÉORÈME. R_k/S_k est un groupe abélien sans torsion, dans lequel S_k désigne le sous-groupe normal des éléments de R_k qui sont d'ordre fini mod R_{k+1} .

THÉORÈME. $[GoR_{k-1}]/R_k$ est un groupe de torsion.

ASUPRA IZOTOPIEI CURBELOR ÎNCHISE

de

G. CĂLUGĂREANU

Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Universităților
„Victor Babeș” și „Bolyai”, din mai 1959

Problema clasificării din punct de vedere topologic a curbelor închise orientate, din spațiul euclidian tridimensional, este încă departe de a fi rezolvată. O curbă închisă, fără puncte multiple, orientată prin alegerea unui sens pozitiv de parcurs, se numește nod, în sensul accepției comune a acestui cuvânt. Se spune că două noduri, C și C' , sînt *izotope*, dacă ele pot fi aduse în coincidență, orientările fiind și ele concordante, printr-o deformare continuă a uneia din curbele C sau C' , astfel ca în tot timpul deformării curba deformată să rămînă fără puncte multiple, deci să nu se traverseze pe ea însăși (mai scurt, să nu se autotraverseze). Două noduri aparțin aceleiaș clase de izotopie dacă ele sînt izotope. Problema clasificării nodurilor revine la formarea unui sistem complet de *invarianți de izotopie*.

Fie C un nod oarecare, iar $I(C)$ o funcție de linia C (în sensul lui Volterra), cu valori numerice reale. Dacă curba C este reprezentată parametric sub forma

$$(1) \quad x = x(t), y = y(t), z = z(t); t \in [t_0, t_1],$$

$I(C)$ va fi deci o funcțională $I[x(t), y(t), z(t)]$ de trei argumente.

Spunem că $I(C)$ este un invariant de izotopie dacă avem $I(C) = I(C')$ ori de cîte ori C' este izotop cu C , deci $I(C)$ păstrează o valoare constantă în fiecare clasă de izotopie. Desigur că un astfel de invariant nu va putea fi util în ce privește clasificarea nodurilor dacă el păstrează aceeaș valoare în toate clasele de izotopie, și din contra, va fi cel mai interesant dacă ia valori diferite în clase diferite.

S-au definit diferenți invarianți de izotopie, pe o cale directă, exprimînd proprietățile geometrice ale nodului invariante în fiecare clasă de izotopie. În mod natural se introduce astfel următorii doi invarianți :

Ordinul n al unei clase de izotopie [1], este numărul minim de puncte duble al proiecției ortogonale pe un plan oarecare, corespunzător unui

nod din acea clasă de izotopie deformat astfel încît proiecția sa să nu aibă ca puncte multiple decît puncte duble.

Numărul de innodare s al unei clase de izotopie [2], este numărul minim de autotraversări necesar pentru a aduce nodul în coincidență cu un cerc, printr-o deformare continuă.

Nu există însă procedee de calcul al acestor invarianți, pentru un nod dat sub formă analitică. Deaceia se pune și problema formării invarianților de izotopie prin procedee analitice, care să conducă la expresii calculabile ale acestor invarianți.

La Sesiunea științifică universitară din anul trecut am prezentat un invariant de această natură, care este

$$(2) \quad K = \frac{1}{4\pi} \int_c \int_c \frac{1}{r_{12}^3} \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & x_1 - x_2 \\ dy_1 & dy_2 & y_1 - y_2 \\ dz_1 & dz_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2\pi} \int_c \tau ds,$$

obținut din cunoscutul invariant al lui Gauss

$$(3) \quad G(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{c_1} \int_{c_2} \frac{1}{r_{12}^3} \begin{vmatrix} x_1 dx_2 & x_1 - z_2 \\ dy_1 & y_1 - y_2 \\ dz_1 & dz_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix}, \quad r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

prin suprapunerea curbelor C_1 și C_2 pe o aceeaș curbă C .

Avînd în vedere formarea unui sistem complet de invarianți, ale căror valori să determine deci complet clasa de izotopie a nodului considerat mi-am pus întrebarea dacă procedeul „suprapunerii” nu poate conduce la formarea altor invarianți de această natură. Pentru aceasta este însă necesară cunoașterea altor invarianți analogi invariantului lui Gauss, pentru sisteme de două sau mai multe curbe închise orientate, două câte două fără puncte comune. Ori, astfel de invarianți nu se cunosc pînă azi, și de aceea am cercetat, în cursul acestui an, această problemă preliminară, care de altfel are interes și ca o generalizare naturală a problemei clasificării nodurilor, în sensul clasificării *înlănțuirilor* de noduri.

Se numește *înlănțuire de multiplicitate m* orice sistem de m noduri, două câte două fără puncte comune. Relativ la *înlănțuiri*, putem defini [3] mai multe feluri de izotopie, dintre care mai importante sînt următoarele două:

Spunem că două *înlănțuiri* (C_1, C_2, \dots, C_m) și $(C'_1, C'_2, \dots, C'_m)$ sînt *izotope în sens larg* dacă putem aduce în coincidență C_1 cu C'_1 , C'_2 cu C_2, \dots, \dots, C'_m cu C_m , orientările fiind toate concordante, printr-o deformare simultană a curbelor, astfel ca în timpul deformării două curbe C , sau două curbe C' , să nu se traverseze, însă orice curbă C sau C' putînd să se autotraverseze, și orice curbă C putînd să traverseze orice curbă C' . Vom numi *deformare izotopă în sens larg* o astfel de deformare. Două *înlănțuiri* aparțin aceleiași clase de izotopie largă dacă ele sunt izotope în sens larg. Acestor clase le corespund *invarianți de izotopie largă*.

Spunem că două *înlănțuiri* sînt *izotope în sens strict* dacă putem aduce în coincidență C'_i cu C_i , $i = 1, 2, \dots, m$, orientările fiind concordante, deformînd curbele simultan astfel ca în timpul deformării două curbe din aceeaș *înlănțuire* C sau C' să nu se traverseze, nici o curbă C sau C' să nu se autotraverseze, însă orice curbă C putînd să traverseze orice curbă C' . Vom numi *deformare izotopă în sens strict* o astfel de deformare. Două *înlănțuiri* aparțin aceleiași clase de izotopie strictă dacă ele sînt izotope în sens strict. Acestor clase le corespund *invarianți de izotopie strictă*.

În cazul $m = 2$, se constată că integrala lui Gauss $G(C_1, C_2)$ este un invariant de izotopie largă. În cazul $m = 1$, cazul unui singur nod, izotopia definită inițial este aceea în sens strict, iar izotopia în sens larg își pierde interesul, deoarece două noduri oarecare sînt izotope în sens larg, și izotope cu un cerc. Remarcăm aci că prin suprapunerea nodurilor C_1 și C_2 , un invariant de izotopie largă, $G(C_1, C_2)$, a putut conduce la un invariant de izotopie strictă, anume K .

În afara celor două feluri de izotopie menționate, se mai pot defini alte specii intermediare care își au interesul lor, dar asupra cărora nu ne vom opri aci.

O altă noțiune esențială [4] este aceea de *înlănțuire reductibilă*. Spunem că *înlănțuirea* (C_1, C_2, \dots, C_m) este *reductibilă în sens larg* dacă putem împărți sistemul acestor m curbe în două subsisteme complementare de p , respectiv $m - p$ curbe, fie (C'_1, \dots, C'_p) și $(C''_1, \dots, C''_{m-p})$, astfel încît deformînd simultan curbele fără ca două curbe să se traverseze, însă fiecare curbă putînd să se autotraverseze, să putem aduce sistemul (C'_1, \dots, C'_p) în interiorul unei sfere date, celălalt sistem rămînînd în afara acesteia. *Înlănțuirea* (C_1, \dots, C_m) este *reductibilă în sens strict* dacă, în aceleaș condiții, cu restricția suplimentară ca nici o curbă să nu se autotraverseze în timpul deformării, sistemele (C'_1, \dots, C'_p) și $(C''_1, \dots, C''_{m-p})$ se pot separa ajutorul unei sfere. Se demonstrează că o *înlănțuire reductibilă* se poate descompune univoc în *componente ireductibile*, și este evident că studiul se poate limita la *înlănțuirile ireductibile*.

În cele ce urmează ne vom ocupa de problema formării invarianților de izotopie largă în cazul *înlănțuirilor ireductibile* de multiplicitate $m = 3$.

Se știe că invariantul lui Gauss $G(C_1, C_2)$ se obține cu ajutorul noțiunii de unghi solid. Fie O_2 un punct fix ales ca origină a arcelor pe curba C_2 , iar M_2 un punct mobil pe această curbă. Să notăm cu $\omega(M_2)$ unghiul solid sub care curba C_1 este văzută din punctul M_2 . Se constată că $\omega(M_2)$ este o funcție multiformă, continuă în tot spațiul $E_3 - C_1$, dată de expresia

$$(4) \quad \omega(M_2) = \int_{O_2, M_2} \int_{C_1} \frac{1}{r_{12}^3} \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & x_1 - x_2 \\ dy_1 & dy_2 & y_1 - y_2 \\ dz_1 & dz_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix}.$$

Această funcție admite *curba critică* C_1 , în sensul că atunci cînd M_2 parcurge o curbă închisă C_2 care traversează odată o membrană întinsă pe curba C_1 , $\omega(M_2)$ urmărită prin continuitate dealungul curbei C_2 nu revine în punctul inițial cu valoarea inițială, ci cu acea valoare sporită cu $\pm 4\pi$ (aria sferei unitate). $\omega(M_2)$ este deci o *funcție multiformă cu perioade*,

și invariantul lui Gauss $G(C_1, C_2)$ nu este decât expresia generală a perioadei acestei funcții.

În cazul unei înlănțuirii de trei curbe (C_1, C_2, C_3) , am încercat să formez invarianti analogi cu acel al lui Gauss, generalizând noțiunea de unghi solid. Fie O_3 origina arcelor pe curba C_3 , iar M_3 un punct mobil pe aceasta. Formarea invariantilor $I(C_1, C_2, C_3)$ devine posibilă dacă putem construi o funcție $\omega(M_3)$, continuă și multiformă în spațiul $E_3 - C_1 - C_2$, admitând curbele critice C_1 și C_2 , și numai acestea, și comportându-se ca o funcție multiformă cu perioade, așa încât diversele determinări ale funcției $\omega(M_3)$ să difere între ele prin combinații lineare cu coeficienți întregi a două constante fundamentale. În cazul unei astfel de funcții care în plus s-ar putea scrie sub forma

$$(5) \quad \omega(M_3) = \int_{O_3 M_3} \int_{C_1} \int_{C_2} F$$

unde F e o formă trilineară în raport cu diferențialele $dx_1, dy_1, dz_1; dx_2, dy_2, dz_2; dx_3, dy_3, dz_3$, reprezentând respectiv componentele deplasărilor pe $C_1; C_2; C_3$ se obțin invarianti de izotopie largă de forma

$$(6) \quad I = \int_{C_1} \int_{C_2} \int_{C_3} F$$

Întru totul analogi invariantului lui Gauss. Menționez că pînă în prezent am reușit să formez mai multe funcții multiforme de forma (5), avînd liniile critice C_1 și C_2 , însă deși acestea sînt funcții multiforme cu perioade, perioadele nu sînt constante, ci funcții de punct. Rămîne de văzut în ce măsură aceste funcții se pot utiliza pentru clasificarea înlănțuirilor de trei

curbe. Deoarece perioadele acestor funcții multiforme nu sînt constante, nu am obținut pînă acum un invariant nenul de forma (6).

În cazul cînd C_1 și C_2 sînt neînlănțuite, deci $G(C_1, C_2) = 0$, am putut demonstra printr-un raționament simplu că orice invariant de forma (6) este în mod necesar identic nul, deci lipsit de interes, însă în cazul cînd $G(C_1, C_2) \neq 0$ acel raționament nu subsistă, și problema existenței invariantilor de forma (6) rămîne deschisă. Iată care este acel raționament.

Se observă că dacă schimbăm sensul pozitiv de parcurs pe una din curbele C_1 sau C_2 , atît $\omega(M_3)$ cît și $I(C_1, C_2, C_3)$ schimbă semnul. Să considerăm înlănțuirea (A) din fig. 1, unde $G(C_1, C_2) = 0$. Notînd cu π_1 și π_2 perioadele funcției $\omega(M_3)$ corespunzătoare curbelor critice C_1 , respectiv C_2 , avem, notînd cu $[\omega]_C$, variația funcției

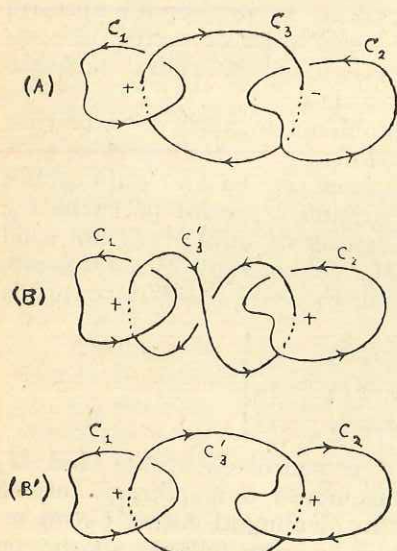


Fig. 1.

$\omega(M_3)$ atunci cînd M_3 descrie curba C_3 , și ținînd seama de sensurile pozitive indicate pe figură,

$$I = [\omega]_{C_3} = \pi_1 - \pi_2.$$

De asemenea, găsim în cazul (B),

$$I' = [\omega]_{C'_3} = \pi_1 + \pi_2.$$

Însă înlănțuirea (B) este izotopă cu (B'), care rezultă din (B) printr-o răsucire de 180° a curbei C_2 în jurul unei axe convenabile. Apoi (B') este izotopă cu (A), dacă în (A) inversăm sensul pozitiv de parcurs pe curba C_2 . Așadar

$$I' = -I, \pi_1 + \pi_2 = -\pi_1 + \pi_2, \pi_1 = 0$$

deci C_1 nu este o curbă critică pentru $\omega(M_3)$, contrar ipotezei. Acest raționament nu subsistă în cazul cînd C_1 și C_2 sînt înlănțuite, deci $G(C_1, C_2) \neq 0$. Deși problema formării invariantilor de forma (6) rămîne deschisă, se vede că impunînd funcției $\omega(M_3)$ forma integrală (5) se face, poate, o restricție prea tare, care în cazul $G(C_1, C_2) = 0$ exclude existența invariantilor. Ori, în cazul bine cunoscut al înlănțuirii din fig. 2, avem $G(C_1, C_2) = 0$, $G(C_2, C_3) = 0$, $G(C_3, C_1) = 0$, deci invariantul lui Gauss nu revelează nimic din natura înlănțuirii, și se impune căutarea unor invarianti care să permită a deosebi acest caz de acel a trei curbe neînlănțuite.

Să observăm că există o strînsă legătură între clasele de izotopie în sens larg a înlănțuirilor (C_1, C_2, C_3) și elementele grupului fundamental al spațiului $E_3 - C_1 - C_2$. Întrucît autotraversările sînt admise pentru fiecare curbă, în fiecare clasă de izotopie putem alege reprezentanți (C_1, C_2, C_3) în care fiecare curbă C_1, C_2 sau C_3 să fie izotopă cu un cerc. Clasa înlănțuirii (C_1, C_2) este definită univoc de valoarea $G(C_1, C_2) = n$. Curba C_3 corespunde unei clase a grupului fundamental al spațiului $E_3 - C_1 - C_2$. Fie o punctul de bază, iar A și B generatorii grupului fundamental, reprezentați de două drumuri închise plecînd din o care înconjură odată curba C_1 , respectiv C_2 . Se constată că pentru $G(C_1, C_2) = 0$, generatorii A și B nu sînt legați prin nici o relație, și un drum oarecare, de ex. C_3 , poate fi reprezentat sub forma

$$C_3 = A^{p_1} B^{q_1} A^{p_2} B^{q_2} \dots A^{p_n} B^{q_n}$$

unde p_i și q_i sînt întregi. Clasa de izotopie a înlănțuirii (C_1, C_2, C_3) este bine determinată dacă se cunosc numerele p_i și q_i în ordinea lor, căreia i se poate totuși aplica o permutare circulară oarecare, deoarece alegerea originii O pe curba C_3 este arbitrară. Fiecare exponent p_i sau q_i este un invariant de izotopie largă al înlănțuirii (C_1, C_2, C_3) .

În cazul $G(C_1, C_2) = \pm 1$, se găsește că generatorii A, B sînt legați prin relația unică $AB = BA$,

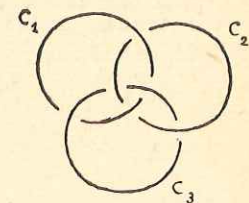


Fig. 2.

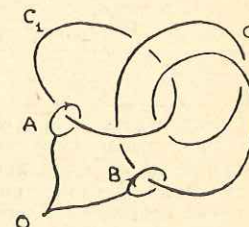


Fig. 3.

deci grupul fundamental este comutativ. Avem $C_3 = A^p B^q$ și întregii p, q sînt dați de $G(C_1, C_3)$ și $G(C_2, C_3)$, așa încît în cazul $G(C_1, C_2) = \pm 1$ înlănțuirea (C_1, C_2, C_3) poate fi complet caracterizată din punct de vedere al izotopiei largi, numai cu ajutorul invariantului lui Gauss. Este de altfel singurul caz de această natură.

Pentru $G(C_1, C_2) = n, |n| > 1$, găsim că generatorii sînt totdeauna legați prin relația unică $(AB)^n = (BA)^n$. Clasele de izotopie sînt și aci caracterizate de invariantii p_i, q_i , între care vor putea exista relații, decurgînd din relația care leagă generatorii A și B . Deoarece $C = A^{p_1} B^{q_1} \dots A^{p_n} B^{q_n}$, avem în toate aceste cazuri

$$G(C_1, C_3) = p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad G(C_2, C_3) = q_1 + q_2 + \dots + q_n.$$

Pentru calculul invariantilor p_i și q_i atunci cînd curbele sînt date, sînt deci necesari alți invarianti calculabili direct și exprimabili în funcție de p_i, q_i . Formarea unor astfel de invarianti revine, cum am arătat, la formarea unor funcții multiforme cu perioade, problemă asupra căreia vom reveni.

Catedra de teoria funcțiilor

BIBLIOGRAFIE

1. K. Reidemeister, *Knotentheorie*. 1932.
2. H. W. Endt, *Die gordische Auflösung von Knoten*. „Mathem. Zeitschrift”, t. 42, 1937, p. 680—696.
3. E. Pannwitz, *Eine elementargeometrische Eigenschaft von Verschlingungen und Knoten*. „Mathem. Annalen”, t. 108, 1933, p. 629—672.
4. Y. Hashizume, *On the uniqueness of the decomposition of a link*. „Osaka math. Journ.” t. 10, 1958, p. 283—300.

ОБ ИЗОТОПИИ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ

(Краткое содержание)

Называется сцеплением кратности m любая система узлов, направленных попарно без общей точки в пространстве E_3 . Определяются два рода изотопии сцеплений. Два сцепления (C_1, C_2, \dots, C_m) и $(C'_1, C'_2, \dots, C'_m)$ называются *изотопными в широком смысле*, если возможно привести C'_1 в совпадение с C_1 , C'_2 с C_2 , ..., C'_m с C_m , направления являясь тождественными посредством деформации, в течение которой кривые одной и той же системы не пересекаются, но каждая кривая может пройти саму себя; сцепления называются *изотопными в узком смысле*, если, вдобавок, ни одна кривая не может пройти себя во время деформации. Указанные два рода изотопии являются эквивалентными отношениями, из чего следует определение *изотопных классов в общем или узком смысле* для сцеплений, а также определение *изотопных инвариантов в общем или узком смысле*. Для $m=2$ коэффициент сцепления, данный интегралом Гаусса, является изотопным инвариантом в общем

смысле пары (C_1, C_2) . Ищется аналогичный инвариант и для тройки (C_1, C_2, C_3) , данной тройным криволинейным интегралом, что сводится к построению одной точечной функции, определенной в $E^3 - C_1 - C_2$, многозначной с периодами, и для которой C_1 и C_2 являются критическими кривыми; это является обобщением телесного угла. Показывается, что подобная функция не существует, если C_1 и C_2 не сцеплены.

Если $G(C_1, C_2) \neq 0$, тогда вопрос остаётся открытым. Показывается, что если $G(C_1, C_2) = \pm 1$, тогда фундаментальная группа пространства $E^3 - C_1 - C_2$ является коммутативной, и инвариант Гаусса характеризует полностью классы изотопии. Для $G(C_1, C_2) = n, n \neq 1$ образующие A, B этой фундаментальной группы связаны единственным соотношением $(AB)^n = (BA)^n$, и инвариант Гаусса не позволяет описать все существующие классы изотопии. Контур C_3 выражается в виде $C_3 = A^{p_1} B^{q_1} A^{p_2} B^{q_2} \dots A^{p_n} B^{q_n}$, где целые p_i, q_i образуют одну систему изотопных инвариантов, полностью характеризующую класс тройки (C_1, C_2, C_3) .

SUR L'ISOTOPIE DES COURBES FERMÉES

(Résumé)

On appelle *enlacement de multiplicité m* tout système de noeuds (orientés) deux à deux sans point commun, dans l'espace E^3 . On définit deux genres d'*isotopie* des enlacements : Deux enlacements (C_1, C_2, \dots, C_m) et $(C'_1, C'_2, \dots, C'_m)$ sont *isotopes au sens large* si l'on peut amener C'_1 en coïncidence avec C_1 , C'_2 avec C_2 , ..., C'_m avec C_m , les orientations étant concordantes, par une déformation telle que deux courbes d'un même système ne se traversent pas, mais chaque courbe pouvant se traverser elle-même ; les enlacements sont *isotopes au sens strict* si, de plus, aucune courbe ne peut se traverser elle-même pendant la déformation. Les deux genres d'*isotopie* étant des relations d'équivalence, on en déduit la définition des *classes d'isotopie* au sens large, ou strict, pour les enlacements, et celle des *invariants d'isotopie* au sens large ou strict. Pour $m=2$ le coefficient d'enlacement, donné par l'intégrale de Gauss, est un invariant d'*isotopie* au sens large du couple (C_1, C_2) . On se propose d'obtenir un invariant analogue pour un triplet (C_1, C_2, C_3) , donné par une triple intégrale curviligne, ce qui revient à la construction d'une fonction de point définie dans $E^3 - C_1 - C_2$, multiforme à périodes, ayant C_1 et C_2 comme courbes critiques ; c'est une généralisation de l'angle solide. On montre qu'une telle fonction ne peut exister lorsque C_1 et C_2 ne sont pas enlacées.

Lorsque $G(C_1, C_2) \neq 0$, le problème reste ouvert. On remarque encore que lorsque $G(C_1, C_2) = \pm 1$, le groupe fondamental de $E^3 - C_1 - C_2$ est commutatif, et l'invariant de Gauss suffit encore à caractériser les classes d'*isotopie*. Pour $G(C_1, C_2) = n, n \neq 1$, les générateurs A, B du même groupe fondamental sont liés par l'unique relation $(AB)^n = (BA)^n$ et l'invariant de Gauss ne permet plus de caractériser toutes les classes d'*isotopie* existantes. Le contour fermé C_3 s'exprime sous la forme $C_3 = A^{p_1} B^{q_1} A^{p_2} B^{q_2} \dots A^{p_n} B^{q_n}$, où les entiers p_i, q_i forment un système d'invariants d'*isotopie* qui caractérise complètement la classe d'un triplet (C_1, C_2, C_3) .