

P. 577

mat.

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES I FASCICULUS 1

1960

MATHEMATICA
PHYSICA

CLUJ

P. 577/61

P. 577

STUDIA UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES I FASCICULUS 1

1960

MATHEMATICA
PHYSICA

CLUJ

BIBL. FACULT. II
MATEMAT.-FIZICA
Nr. P. 147/19 61

BCU Cluj-Napoca



PMATE 2014 00338

In cel de al V-lea an de apariție (1960) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* cuprinde aceleași serii:

- I. matematică, fizică, chimie;
- II. geologie, geografie, biologie;
- III. filozofie, economie politică, psihologie, pedagogie, științe juridice;
- IV. istorie, lingvistică, literatură.

Fiecare serie apare anual în 2 fascicule.

V. (1960-as) évfolyamában a *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* változatlanul alábbi sorozatokat öleli fel:

- I. matematika, fizika, kémia;
- II. geológia, földrajz, biológia;
- III. filozófia, politikai gazdaságtan, lélektan, pedagógia, jogtudomány;
- IV. történet-, nyelv- és irodalomtudomány.

Minden sorozatban évenként két füzet jelenik meg.

На V году издания (1960), *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* выходит теми же сериями:

- I. математика, физика, химия;
- II. геология, география, биология;
- III. философия, политэкономия, психология, педагогика, юридические н.
- IV. история, языковедение, литературоведение.

В каждой серии ежегодно выходят два выпуска.

Dans leur V-me année de la publication (1960) les *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* comportent les mêmes séries:

- I-e mathématiques, physique, chimie;
- II-e géologie, géographie, biologie;
- III-e philosophie, économie politique, psychologie, pédagogie, sciences juridiques;
- IV-e histoire, linguistique, littérature.

Chaque série comprend deux fascicules par année.

COMITETUL DE REDACȚIE — SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ — COMITÉ DE RÉDACTION

Acad. Prof. C. DAICOVICIU (redactor responsabil), Conf. I. CETERCHI, Conf. V. I. CIMPIANU, Prof. J. DEMETER, Conf. Ö. FELSZEGHY, Conf. M. KALLÓS, Prof. N. LASCU, Prof. T. LÁSZLÓ, Prof. D. MACREA, Prof. GY. MARTON, Prof. T. MORARIU, membru coresp. Acad., Conf. L. NAGY, Prof. I. PÉTERFI, membru coresp. Acad. (redactor responsabil adjunct), Acad. Prof. E. PETROVICI, Prof. Gh. PIC, Prof. T. POPOVICIU, membru coresp. Acad., Prof. E. A. PORA, membru coresp. Acad., Acad. Prof. R. RIPAN, Prof. AI. ROȘCA, Conf. I. URSU

Redacția:
CLUJ, str. Kogălniceanu 1
Telefon 34—50

S U M A R

T. POPOVICIU, Opera științifică a lui J. Bolyai	9
E. KISS, Rezolvarea în numere naturale a ecuației diofantiene $x^2+y^3=z^4$	15
Gh. PIC, Despre o teoremă a lui B. H. Neumann	21
G. CALUGĂREANU, Asupra izotopiei curbelor închise	27
G. CALUGĂREANU, Asupra unui sistem de invarianți de izotopie	35
F. RADO, Generalizarea țesuturilor spațiale pentru structuri algebrice	41
M. PRODA-SCHECHTER, Studiul unei proprietăți a translațiilor de mulțimi	57
I. MARUȘCIAC, Asupra polinoamelor lui Cebîșev k-restrânse pe o mulțime mărginită și închisă din planul complex	73
P. T. MOCĂNU, O teoremă asupra funcțiilor univalente	91
D. V. IONESCU, O teoremă asupra sistemelor de ecuații liniare	97
F. MUNTEANU, Extinderea unei teoreme referitoare la sisteme de ecuații liniare	107
M. FERTIG, Despre comportarea integralelor ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți, care depind de un parametru	121
G. KALIK și P. SZILÁGYI, Despre rezolvarea problemei la limită a lui Neumann	131
L. NÉMETI, Tensiuni termice în prisme lungi	143
A. NEY, Despre cazul de nehotărîre al criteriului de convergență al lui D'Alembert	153
E. MOLDOVAN, Observații asupra problemei celei mai bune aproximații într-un spațiu abstract	163
F. CONSTANTINESCU, Asupra distanței a două mulțimi într-un spațiu vectorial normat	167
T. MIHAILESCU, Rețele izoterm-conjugate situate pe suprafețele riglate	169
E. GERGELY, Despre ovale pe baza ecuațiilor lor intrinseci	175
L. BAL, Asupra unor suprafețe ce intervin în nomografie	181
D. D. STANCU, Asupra calculului coeficienților unei formule generale de cuadratură	187
F. COȚIU și A. COȚIU, Delimitarea erorii procedurii de ordinul al cincilea a lui Kutta de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale	193
E. TATARU, Studiu asupra proprietăților de radiație ale antenelor lentile excitate de pilnii electromagnetice piramidale sau sectoriale	199
F. KELEMEN, Influența temperaturii asupra potențialului de mișcare al metalelor în apă distilată	205
V. MERCEA, Viscosimetru cu capilară inelară	217
V. MERCEA, Rezistențe la scurgere în scurgeri capilare de gaze și măsurarea lor cu viscosimetru cu capilară	239
I. MAXIM, IULIU POP și A. NICULA, O metodă sensibilă pentru determinarea relativă a susceptibilității magnetice, cu compensare în câmpul gravitațional	254
I. MAXIM, A. NICULA și IULIU POP, O metodă magnetometrică pentru măsurarea remanenței magnetice	265
KOCH F., Unele probleme legate de variația cu temperatura a efectului Procopiu	269

Cronică

Ecuații funcționale în legătură cu nomografia (F. RADO)	277
Mulțimi de funcții interpolatoare și noțiunea de funcție convexă (E. MOLDOVAN)	279
Cursuri speciale: Curs special predat de prof. G. CALUGĂREANU Curs special predat de prof. T. POPOVICIU Curs special predat de prof. E. MOLDOVAN	285

СОДЕРЖАНИЕ

Т. ПОПОВИЧУ, Научная деятельность И. Бойан	9
Э. КИШШ, Решение в натуральных числах диофантового уравнения $x^2 + y^2 = z^4$	15
Г. ПИК, Об одной теореме Б. Х. Неймана	21
Дж. КЭЛУГЭРЯНУ, Об изотопии замкнутых кривых	27
Дж. КЭЛУГЭРЯНУ, Об одной системе инвариантов изотопии	35
Ф. РАДО, Обобщение пространственных тканей для алгебраических структур	41
М. ФРОДА-ШЕХТЕР, Исследование одного свойства переносов множеств	57
И. МАРУЩАК, О полиномах Чебышева k -условных на замкнутом и ограниченном множестве комплексной плоскости	73
П. Т. МОКАНУ, Одна теорема об однолистных функциях	91
Д. В. ИОНЕСКУ, Одна теорема о системах линейных уравнений	97
Ф. МУНТЯНУ, Расширение одной теоремы, относящейся к системе уравнений	107
М. ФЕРТИГ, О поведении интегралов дифференциальных линейных уравнений с постоянными коэффициентами, зависящими от одного параметра	121
К. КАЛИК, П. СИЛАДИ, О решении проблемы Неймана	131
Л. НЕМЕТИ, Тепловые напряжения в длинных призмах	143
А. НЕЙ, О случае сомнения признака сходимости Даламбера	153
Е. МОЛДОВАН, Замечания относительно наилучшего приближения в абстрактных пространствах	163
Ф. КОНСТАНТИНЕСКУ, О расстоянии двух множеств в нормированном векторном пространстве	167
Т. МИХЭЙЛЕСКУ, Изотермо-сопряженные сети на линейчатых поверхностях	169
Е. ГЕРГЕЙ, Об овалах на основании их внутренних уравнений	175
Л. БАЛ, О некоторых поверхностях, возникающих в номографии	181
Д. Д. СТАНКУ, О вычислении коэффициентов одной общей формулы квадратуры	187
Ф. КОЦИЮ, А. КОЦИЮ, Оценка ошибки способа пятой степени Кутта числового интегрирования дифференциальных уравнений	193
Э. ТЭТАРУ, Изучение излучительных свойств линзовых антенн, раздраженных электромагнитными пирамидальными или секториальными рупорами	199
Ф. КЕЛЕМЕН, Влияние температуры на потенциал движения металлов в дистиллированной воде	205
В. МЕРЧА, Вискозиметр с кольцевым капилляром	217
В. МЕРЧА, Сопротивление истечения при капиллярных истечениях газов и измерение их при помощи вискозиметра с кольцевыми капиллярами	239
И. МАКСИМ, Ю. ПОП, А. НИКУЛА, Чувствительный метод для относительного определения магнитной восприимчивости с компенсацией в гравитационном поле	259
И. МАКСИМ, А. НИКУЛА, Ю. ПОП, Магнитометрический метод для измерения остаточного магнетизма	265
Ф. КОХ, Некоторые проблемы в связи с температурной вариацией эффекта Прокопну	269
Хроника	279

S O M M A I R E

T. POPOVICIU, L'oeuvre scientifique de J. Bolyai	9
E. KISS, Résolution en nombres naturels de l'équation diophantienne $x^2 + y^3 = z^4$	15
GH. PIC, Sur un théorème de B. H. Neumann	21
G. CALUGAREANU, Sur l'isotopie des courbes fermées	27
G. CALUGAREANU, Sur un système d'invariants d'isotopie	35
F. RADO, Généralisation des tissus spatiaux, pour certaines structures algébriques	41
M. FRODA-SCHECHTER, Étude d'une propriété des translations d'ensembles	57
I. MARUȘCIAC, Sur les polynômes de Tchebycheff k-restreints à un ensemble limité et fermé du plan complexe	73
P. T. MOCANU, Un théorème sur les fonctions univalentes	91
D. V. IONESCU, Un théorème sur les systèmes d'équations linéaires	97
F. MUNTEANU, Extension d'une théorème relatif à des systèmes d'équations	107
M. FERTIG, Sur le comportement des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients constants qui dépendent d'un paramètre	121
C. KALIK, P. SZILAGYI, Sur la solution du problème de la limite de Neumann	131
L. NEMETI, Tensions thermiques dans des prises longs	143
A. NEY, Sur le cas d'indétermination du critérium de convergence de d'Alembert	153
E. MOLDOVAN, Sur la meilleure approximation dans espaces abstraits	163
F. CONSTANTINESCU, Sur la distance de deux ensembles dans un espace vectoriel normé	167
T. MIHAILESCU, Les réseaux isothermes-conjugués situés sur des surfaces réglés	169
E. GERGELY, Problèmes des ovales fondés sur leurs équations itrisèques	175
L. BAL, Sur certaines surfaces intervenant en nomographie	181
D. D. STANCU, Sur le calcul des coefficients d'une formule générale de quadrature	187
F. COȚIU et A. COȚIU, Délimitation de l'erreur du procédé de cinquième ordre de Kutta pour l'intégration numérique des équations différentielles	193
E. TATARU, Etude sur les propriétés de radiation des antennes lentilles excitées par des pavillons électromagnétiques, pyramidaux ou sectoriaux	199
F. KELEMEN, L'influence de la température sur le potentiel de mouvement des métaux dans l'eau distillée	205
V. MERCEA, Le viscosimètre à capillaire annulaire	217
V. MERCEA, Les résistances à l'écoulement dans les écoulements capillaires de gaz et leur mesure avec le viscosimètre à capillaires annulaires	238
I. MAXIM, I. POP, A. NICULA, Sur une méthode sensible pour la détermination relative de la susceptibilité magnétique, avec compensation dans le champ gravitationnel	259
I. MAXIM, A. NICULA, I. POP, Méthode magnétométrique pour la mesure de la rémanence magnétique	265
F. KOCH, Problèmes liés à la variation de l'effet Procopiu en fonction de la température	269
Chronique	297

ASUPRA UNUI SISTEM DE INVARIANTI DE IZOTOPIE

de

G. CĂLUGĂREANU

*Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Universității „Babeș—Bolyai”
din 21—23 aprilie 1960*

În această notă semnez un mijloc de clasificare a nodurilor din spațiul E_3 cu ajutorul unor invarianți de natură algebrică, rezultând din reprezentarea claselor de izotopie prin noduri algebrice unicursale. Existența acestor reprezentanți ai claselor de izotopie rezultă dintr-o teoremă de aproximație, a cărei demonstrație e dată mai jos.

1. *Noduri. Deformări izotope.* Numim *nod* orice curbă închisă, simplă, orientată, avînd în fiecare punct o tangentă care variază continuu (ca direcție și sens) în funcție de arcul s . Această condiție exclude existența punctelor unghiulare sau de întoarcere.

Numim *deformare izotopă* o deformare continuă a nodului $C[x(t), y(t), z(t)]$, dată de $C_\lambda [X(t, \lambda), Y(t, \lambda), Z(t, \lambda)]$, unde parametrul λ variază continuu de la 0 la 1, și $X(t, 0) = x(t)$, $Y(t, 0) = y(t)$, $Z(t, 0) = z(t)$, astfel încît pentru fiecare $\lambda = \text{const.}$ curba C_λ este un nod, iar tangenta într-un punct oarecare al curbei C_λ variază continuu în funcție de (t, λ) , $t \in [0, T]$, $\lambda \in [0, 1]$.

Două noduri sînt *izotope* dacă există o deformare izotopă a unuia în celălalt. Se constată ușor că izotopia este o relație de echivalență, deci împarte mulțimea nodurilor din E_3 în clase, numite *clase de izotopie*. Problema fundamentală a teoriei nodurilor este aceea a clasificării, adică a caracterizării claselor de izotopie printr-un sistem de *invarianți de izotopie*. Numim *invariant de izotopie* o funcție de linie (în sens Volterra), definită pe mulțimea nodurilor din E_3 , luînd valori reale, și astfel încît ea să rămînă constantă atunci cînd aplicăm nodului o deformare izotopă oarecare, puțînd avea însă un salt atunci cînd printr-o deformare continuă nodul trece dintr-o clasă de izotopie în alta.

2. *O teoremă de aproximare.* Indicăm aci un sistem infinit de invarianți de izotopie, despre care nu știm însă, pînă acum, dacă e un sistem complet, dacă permite deci o caracterizare completă a fiecărei clase de izotopie. Formarea acestor invarianți se bazează pe următoarea: Teoremă de apro-

ximare algebrică. Orice nod poate fi aproximat oricât voim de bine prin noduri algebrice din aceeași clasă de izotopie.

Urmează că în fiecare clasă de izotopie există noduri algebrice, deci putem lua ca reprezentanți ai claselor de izotopie noduri algebrice, ceea ce va reduce problema clasificării la o problemă de eliminare în legătură cu un sistem de ecuații algebrice.

Demonstrația noastră se bazează pe utilizarea dezvoltărilor Fourier ale cosinusurilor directe $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$ ale tangentei într-un punct al nodului C . Aceste funcții de arcul s fiind continue și periodice (putem presupune lungimea lui C egală cu 2π), formăm

$$\alpha \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos ks + b_k \sin ks), \beta \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a'_k \cos ks + b'_k \sin ks),$$

$$\gamma \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a''_k \cos ks + b''_k \sin ks)$$

Notînd cu u_n, v_n, w_n sumele lui Fejér

$$u_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) (a_k \cos ks + b_k \sin ks), v_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) (a'_k \cos ks + b'_k \sin ks),$$

$$w_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) (a''_k \cos ks + b''_k \sin ks)$$

avem

$$\alpha = \lim u_n, \beta = \lim v_n, \gamma = \lim w_n, n \rightarrow \infty,$$

convergența fiind uniformă. Prin integrare formăm

$$U_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right) (a_k \sin ks - b_k \cos ks),$$

$$V_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right) (a'_k \sin ks - b'_k \cos ks),$$

$$W_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right) (a''_k \sin ks - b''_k \cos ks)$$

și avem

$$x(s) = \lim U_n, y(s) = \lim V_n, z(s) = \lim W_n, n \rightarrow \infty$$

unde convergența este de asemenea uniformă.

Să considerăm curba închisă C_n dată de

$$x_n(s) = U_n, y_n(s) = V_n, z_n(s) = W_n.$$

C_n este o curbă algebrică unicursală; vom arăta că pentru n destul de mare, această curbă este un nod izotop cu C .

E destul să formăm o familie (C_μ) de curbe închise fără puncte multiple sau de întoarcere, depinzînd continuu de parametrul μ , și conținînd curbele C și C_n . Este de asemenea necesar ca tangenta într-un punct al curbei C_μ să varieze continuu în funcție de (s, μ) .

Pentru aceasta luăm

$$x_\mu = x_n + (\mu - n)(x_{n+1} - x_n), y_\mu = y_n + (\mu - n)(y_{n+1} - y_n), z_\mu = z_n + (\mu - n)(z_{n+1} - z_n)$$

unde $n = [\mu] =$ partea întregă a lui μ . Punînd $r = \mu - [\mu]$ avem

$$0 \leq r_\mu < 1, \mu - n = r_\mu.$$

Curbele C_μ astfel definite interpolează întreg șirul curbelor C_n cînd μ variază de la 1 la $+\infty$. Interpolarea fiind lineară pe segmente, se vede că x_μ, y_μ, z_μ tind uniform către $x(s), y(s), z(s)$ respectiv, cînd $\mu \rightarrow +\infty$ în mod continuu. În plus, x'_μ, y'_μ, z'_μ (unde accentul reprezintă derivarea în raport cu s) tind uniform către α, β, γ respectiv.

Pentru a traduce analitic izotopia deformării (C_μ) vom forma funcțiile:

$$\Phi(s, s', \mu) = \left(\frac{x_\mu(s) - x_\mu(s')}{s - s'}\right)^2 + \left(\frac{y_\mu(s) - y_\mu(s')}{s - s'}\right)^2 + \left(\frac{z_\mu(s) - z_\mu(s')}{s - s'}\right)^2, s \neq s'$$

$$\Phi(s, s, \mu) = [x'_\mu(s)]^2 + [y'_\mu(s)]^2 + [z'_\mu(s)]^2$$

$$\Psi(s, s') = \Phi(s, s', +\infty) = \left(\frac{x(s) - x(s')}{s - s'}\right)^2 + \left(\frac{y(s) - y(s')}{s - s'}\right)^2 + \left(\frac{z(s) - z(s')}{s - s'}\right)^2, s \leq s'$$

$$\Psi(s, s) = 1.$$

Trebuie observat că pe curba C_μ , s nu mai reprezintă lungimea arcului, ci un simplu parametru. Deoarece C este un nod, $\Psi(s, s')$ este continuă în pătratul $K: s \in [0, 2\pi], s' \in [0, 2\pi]$. Pentru $s \neq s'$ aceasta e evident, iar pentru $s' = s$, rezultă ușor aplicînd teorema creșterilor finite. Avem apoi

$$\Psi(s, s') \geq a > 0, (s, s') \in K$$

deoarece Ψ nu se poate anula în K , curba C fiind un nod.

În fiecare punct $(s, s') \in K$ avem

$$\Phi(s, s', \mu) \rightarrow \Psi(s, s'), \mu \rightarrow \infty$$

deoarece $x_\mu(s) \rightarrow x(s), x'_\mu(s) \rightarrow x'(s)$ etc.

Să considerăm prisma indefinită cu baza K în planul sOs' , a cărei înălțime se întinde pe toată semiaxa pozitivă $O\mu$, luată perpendicular pe sOs' . Funcția $\Phi(s, s', \mu)$ e continuă în orice punct la distanță finită aparținînd acestei prisme, și e deajuns să arătăm că $\Phi(s, s', \mu)$ e continuă și pentru $\mu \in [0, +\infty]$. Vom avea atunci $\Phi(s, s', \mu) > \frac{a}{2}$ pentru $\mu > \mu_0$,

și teorema va fi astfel demonstrată, căci toate curbele C_μ , $\mu > \mu_0$ vor fi fără puncte duble sau de întoarcere, deci C_n va fi un nod izotop cu C pentru $n > \mu_0$.

Pentru a stabili continuitatea funcției $\Phi(s, s', \mu)$ în fiecare punct al „bazei superioare” $\mu = +\infty$ a prisme considerate, e de ajuns să arătăm că

$$|\Phi(u, u', \mu) - \Psi(s, s')| < \varepsilon \quad \text{dacă} \quad (u - s)^2 + (u' - s')^2 < \eta^2(\varepsilon), \mu > \mu_1(\varepsilon)$$

Avem

$$\begin{aligned} x_\mu(s) &= (1 - r_\mu)x_\mu(s) + r_\mu x_{n+1}(s), \dots \\ \Phi(u, u', \mu) &= (1 - r_\mu)^2 S \left[\frac{x_n(u) - x_n(u')}{u - u'} \right] + r_\mu^2 S \left[\frac{x_{n+1}(u) - x_{n+1}(u')}{u - u'} \right] + \\ &+ 2r_\mu(1 - r_\mu) S \left[\frac{x_n(u) - x_n(u')}{u - u'} \cdot \frac{x_{n+1}(u) - x_{n+1}(u')}{u - u'} \right] \end{aligned}$$

unde S indică o sumă de termeni analogi celui scris, și care se deduc din el înlocuind x cu y , apoi cu z . Să punem

$$\begin{aligned} x(s) &= x_n(s) + X_n(s), \quad \alpha(s) = x'_n(s) + X'_n(s), \dots \\ \frac{x_n(u) - x_n(u')}{u - u'} &= \frac{x(u) - x(u')}{u - u'} - \frac{X_n(u) - X_n(u')}{u - u'} = \frac{x(u) - x(u')}{u - u'} - X'_n(u_1), \\ &u_1 \in [u, u'], \dots \end{aligned}$$

Avem

$$\begin{aligned} \Phi(u, u', \mu) &= (1 - r_\mu)^2 S \left[\frac{x(u) - x(u')}{u - u'} - X'_n(u_1) \right]^2 + r_\mu^2 S \left[\frac{x(u) - x(u')}{u - u'} - \right. \\ &\left. - X'_{n+1}(u_2) \right]^2 + 2r_\mu(1 - r_\mu) S \left\{ \left[\frac{x(u) - x(u')}{u - u'} - X'_n(u_1) \right] \left[\frac{x(u) - x(u')}{u - u'} - X'_{n+1}(u_1) \right] \right\} \\ &= \Psi(u, u') + \text{termeni ce conțin în factor } X'_n \text{ sau } Y'_n, Z'_\mu, X'_{n+1}, Y'_{n+1} \text{ sau } Z'_{n+1}. \end{aligned}$$

Dar X'_n, \dots, Z'_{n+1} sînt mai mici în modul decît un număr pozitiv arbitrar dacă μ e destul de mare, iar coeficienții lor în expresia de mai sus sînt uniform mărginiți în K , în timp ce $\Psi(u, u') - \Psi(s, s')$ e de asemenea oricît voim de mică dacă $|u - s|$ și $|u' - s'|$ sînt destul de mici, deci continuitatea funcției $\Phi(s, s', \mu)$ pentru $\mu = +\infty$ este stabilită. Curba C_μ nu are puncte de întoarcere pentru $\mu > \mu_1$ deoarece $\Phi(s, s, \mu) \rightarrow 1, \mu \rightarrow +\infty$.

Astfel, fiecare nod poate fi aproximat cît voim de bine printr-un nod algebric din aceeași clasă de izotopie. Posibilitatea acestei aproximări a fost stabilită de H. Seifert [1] în cazul general al varietăților, dar admițînd existența și continuitatea derivatelor secunde ale coordonatelor, printr-o metodă diferită. În cazul curbelor, demonstrația noastră stabilește în plus posibilitatea aproximării izotope prin noduri algebrice unice cursale.

3. Determinarea claselor de izotopie cu ajutorul reprezentanților algebrici. Orice clasă de izotopie admite deci reprezentanți de forma

$$x_n(u) = \sum_{k=1}^n (a_k \cos ku + b_k \sin ku), \quad y_n(u) = \sum_{k=1}^n (a'_k \cos ku + b'_k \sin ku),$$

$$z(u) = \sum_{k=1}^n (a''_k \cos ku + b''_k \sin ku)$$

sau, sub formă rațională

$$x_n(t) = \frac{P_{2n-1}(t)}{(1+t^2)^n}, \quad y_n(t) = \frac{Q_{2n-1}(t)}{(1+t^2)^n}, \quad z_n(t) = \frac{R_{2n-1}(t)}{(1+t^2)^n}, \quad -\infty \leq t \leq +\infty$$

$P_{2n-1}, Q_{2n-1}, R_{2n-1}$ fiind polinoame arbitrare de gradul $2n - 1$ în t .

Urmează să se determine clasele de izotopie existente pentru fiecare valoare a lui n , și în acest mod sîntem siguri că vom obține toate clasele de izotopie.

Pentru $n = 1$, curba C_n este o elipsă, deci e izotopă cu un cerc, și obținem numai *clasa nulă*, orice valori am da coeficienților arbitrari. Pe măsură ce n crește, apar însă tot mai multe clase de izotopie. Pentru $n = 3$ obținem nodul „în treflă” (nodul 3_1 din tabela lui Alexander — Briggs, [2, p. 70] dat de

$$x = \cos t + 2 \cos 2t, \quad y = \sin t - 2 \sin 2t, \quad z = \sin 3t;$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

Tov. V. Hermann și M. Moghioroși au obținut ecuații simple și pentru alte noduri din tabela amintită.

Variația continuă a coeficienților arbitrari din x_n, y_n, z_n reprezintă o deformare continuă a nodului, și clasa de izotopie nu se schimbă atît timp cît curba nu se traversează ea însăși. Schimbarea clasei de izotopie este deci asociată apariției unui punct multiplu pe curba C . Aceasta are loc cînd sistemul

$$\frac{x_n(u) - x_n(v)}{u - v} = 0, \quad \frac{y_n(u) - y_n(v)}{u - v} = 0, \quad \frac{z_n(u) - z_n(v)}{u - v} = 0$$

este compatibil. Este un sistem algebric de 3 ecuații cu 2 necunoscute u și v , care e compatibil cînd coeficienții polinoamelor $P_{2n-1}, Q_{2n-1}, R_{2n-1}$ anulează sistemul eliminant E_n corespunzător. Se știe [3] că sistemul E_n e format din mai multe polinoame omogene în raport cu cei $6n$ coeficienți arbitrari, care se anulează cînd sistemul considerat este compatibil. Este deci de așteptat ca unele din aceste polinoame să schimbe semnul atunci cînd nodul își schimbă clasa de izotopie în urma unei autotraversări. Semnele polinoamelor în chestiune constituie deci un sistem de invarianți de izotopie, pentru fiecare valoare a lui n .

Să mai observăm că clasele de izotopie existente pentru o valoare a lui n subsită pentru toate valorile următoare. În adevăr, varietatea E_n e un con cu vîrfurile 0 în spațiul euclidian cu $6n$ dimensiuni, și determină în acest spațiu mai multe domenii Δ_i^n corespunzînd claselor de izotopie ce există

pentru această valoare a lui n . Să notăm cu μ_n un punct din spațiul cu $6n$ dimensiuni; el reprezintă curba C_n . Dacă μ_n e interior unui domeniu Δ_i^n , C_n este un nod. Obținem $x_{n+1}(u)$ dacă adăugăm $a_{n+1} \cos(n+1)u + b_{n+1} \sin(n+1)u$ la $x_n(u)$, deci $C_{u+1}[x_{n+1}(u), y_{u+1}(u), z_{u+1}(u)]$ este un nod izotop cu C_n dacă $a_{n+1}, b_{n+1}, a'_{n+1}, b'_{u+1}, a''_{n+1}, b''_{n+1}$ sînt destul de mici. Există deci un domeniu Δ_j^{n+1} astfel ca $\Delta_i^n \subset \Delta_j^{n+1}$ și Δ_j^{n+1} reprezintă aceeași clasă de izotopie ca și Δ_i^n .

Catedra de teoria funcțiilor

BIBLIOGRAFIE

1. H. Seifert, *Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten*, „Mathem. Zeitschrift” t. 41, 1936, pp. 1-17.
2. K. Reidemeister, *Knotentheorie*. J. Springer, Berlin, 1932.
3. B. van der Waerden, *Moderne Algebra*, t. II.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ИНВАРИАНТОВ ИЗОТОПИИ

(Краткое содержание)

Автор называет *узлом* любую замкнутую кривую, простую, направленную, имеющую в каждой точке касательную, изменяющуюся непрерывно с изменением дуги. Далее приводится определение изотопной деформации дуги, а также изотопных классов. Проводится основанное на применении рядов Фурье доказательство следующей теоремы алгебраического приближения: любой узел может быть приближен с любой точностью алгебраическими узлами, принадлежащими к одному и тому же классу изотопии. Следовательно, в каждом классе изотопии существуют алгебраические узлы, что позволяет дать классификацию узлов при помощи алгебраических представителей классов изотопии. Это сводится к задаче алгебраического исключения.

SUR UN SYSTÈME D'INVARIANTS D'ISOTOPIE

(Résumé)

L'auteur appelle *noeud* toute courbe fermée, simple, orientée, ayant en chaque point une tangente qui varie continûment en fonction de l'arc, et donne ensuite une définition de la déformation isotope d'un noeud et des classes d'isotopie. Suit une démonstration, basée sur l'emploi des séries de Fourier, du théorème d'approximation algébrique suivant: Chaque noeud peut être approché d'aussi près que l'on veut par un noeud algébrique unicursal qui appartient à la même classe d'isotopie. Dans chaque classe d'isotopie il existe donc des noeuds algébriques, et il en résulte la possibilité d'une classification des noeuds à l'aide des représentants algébriques des classes d'isotopie. On est ainsi ramené à un problème d'élimination algébrique.

GENERALIZAREA ȚESUTURILOR SPAȚIALE PENTRU STRUCTURI ALGEBRICE

de

FRANCISC RADÓ

1. **Introducere.** Un țesut plan este format din trei familii de curbe, care au proprietățile următoare: 1. prin orice punct al unui domeniu D trece câte o singură curbă din fiecare familie, 2. două curbe aparținând la două familii diferite au exact un punct comun în D . Un țesut plan se numește regulat, dacă este imaginea topologică a trei fascicule de drepte paralele. Două din cele trei familii de curbe pot fi totdeauna transformate topologic în paralele la două axe de coordonate rectangulare, transformatele curbelor din familia a treia sînt liniile de nivel al unei funcții $z = F(x, y)$, pe care o însemnăm mai scurt cu $Z = xy$. Țesutul plan este regulat, dacă

$$(1) \quad f(xy) = g(x) + h(y),$$

unde f, g și h sînt funcții continue și strict monotone [3].

Fiecare din următoarele condiții de închidere este necesară și suficientă pentru ca țesutul plan să fie regulat [3], [6]: *Condiția exagonului*

$$(B) \quad (x_1y_2 = x_2y_1 \ \& \ x_1y_3 = x_2y_2 = x_3y_1) \rightarrow x_2y_3 = x_3y_2,$$

Condiția lui Reidemeister

$$(R) \quad (x_1y_3 = x_2y_1 \ \& \ x_1y_4 = x_2y_2 \ \& \ x_3y_3 = x_4y_1) \rightarrow x_3y_4 = x_4y_2$$

Condiția lui Thomsen

$$(T) \quad (x_1y_2 = x_2y_1 \ \& \ x_1y_3 = x_3y_1) \rightarrow x_2y_3 = x_3y_2.$$

Condițiile (B), (R) și (T) sînt de natură algebrică, ceea ce permite o extindere la structuri algebrice abstracte. Se numește cvasigrup un sistem format dintr-o mulțime Q și o operație $z = xy$, care atașează fiecărei perechi de elemente $x, y \in Q$ un element determinat z din Q , astfel ca ecuațiile $xb = c$ și $ay = d$ să aibă câte o soluție unică x respectiv y . Dacă există $e \in Q$ astfel ca $xe = ex = x$ pentru orice $x \in Q$, cvasigrupul este un loop