STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 1

1962

SEPARATUM

CLUJ

O TEOREMĂ ASUPRA TRAVERSĂRILOR UNUI NOD

de

G. CĂLUGĂREANU

În cele ce urmează, înțelegem prin nod un contur poligonal închis K, simplu, orientat, cu un număr finit de laturi. Se definește echivalența (sau izotopia) a două noduri cu ajutorul operațiilor Δ și Δ'([*1*], p. 4): AB fiind o latură a lui K, iar ABC un triunghi care nu are în comun cu K decît punctele laturii AB, operația Δ constă în înlocuirea laturii AB prin conturul ACB; Δ' este operația inversă. Cele două operații pot fi confundate într-una singură, în modul următor: ABC fiind un triunghi orientat care are în comun cu K una sau două laturi, și este așezat așa încît orientările laturilor comune să fie opuse pe K și ABC, vom numi ,,adunare'' a triunghiului orientat ABC la conturul K operația care constă în suprimarea laturii sau laturilor comune, lăsînd să subziste restul lui K și al frontierei triunghiului, cu orientările lor. Vom continua să notăm cu Δ această operație. Două noduri K și K' sînt izotope dacă aplicînd operația Δ un număr finit de ori unuia din noduri putem obține pe celălalt. Toate nodurile izotope cu K formează tipul (sau clasa de izotopie) a lui K. Condiția pusă triunghiului ABC, de a avea în comun cu K numai una sau două laturi, este desigur esențială, și corespunde unei deformări izotope a nodului, adică unei deformări în timpul căreia nodul nu se traversează el însuși. Dar, renunțînd la această restricție, se definește, printr-o construcție analogă aceleia care definește operația Δ, o deformare neizotopă a lui K, deformare care își are interesul său.

Să numim *traversare* deformarea lui K ce rezultă din K prin adunarea la K a unui triunghi ABC care, în afară de latura comună, sau de laturile comune, are încă un singur punct comun cu K, acest punct fiind interior triunghiului ABC și unei laturi a lui K. Fie K' nodul astfel obținut. O astfel de traversare, nefiind o deformare izotopă, poate fi însoțită de o schimbare a clasei de izotopie a nodului inițial, și în acest caz vom spune că traversarea este *esențială*. Dar e posibil ca o traversare să fie *inesențială*, clasa de izotopie rămînînd neschimbată; putem imagina cu ușurință deformări de această natură, pentru un nod oarecare. Teorema pe care o dăm aci ne permite să caracterizăm, din acest punct de vedere, traversările unui nod K. Enunțul teoremei face apel la descompunerea unui nod în produs de factori, dată de H. S c h u b e r t [2], pe care credem util să o reamintim: S_2 fiind o sferă bidimensională (suprafață poliedrală închisă, fără puncte multiple, de gen zero), se numește „coardă" a sferei S_2 un contur poligonal simplu care are în comun cu S_2 numai cele două extremități ale sale. O astfel de coardă poate fi plasată în interiorul sau în exteriorul sferei S_2. K fiind un nod, și S_2 o sferă care taie K numai în două puncte, K este astfel descompus în două corzi ale sferei S_2, fie ele u_1 și u_2, situate de cele două părți ale sferei și avînd extremitățile lor A și B în comun. Să unim A cu B printr-un contur poligonal simplu v, situat pe S_2. Atunci $u + v$ și $u - v$, cu o orientare convenabilă a lui v, formează două noduri pe care sfera S_2 le separă întrucîtva, și, după terminologia lui H. S c h u b e r t, K se numește „produsul" acestor două noduri. (Termenul de „sumă" a celor două noduri poate de asemenea să fie acceptat, cu atît mai mult cu cît operația în chestiune este comutativă; adunarea unui triunghi la un nod e un caz particular al acestei operații). Enunțul teoremei noastre este următorul:

Fie T *o traversare a nodului* K, *rezultînd din adunarea la* K *a unui triunghi* ABC $= \Sigma_1$, *pe care latura* EF *a lui* K *il traversează în punctul* ω · K' *fiind nodul astfel deformat, vom presupune* K $\cap \Sigma_1 =$ AB, K' $\cap \Sigma_1 =$ = AC + CB. *Condiția necesară și suficientă pentru ca* T *să fie o traversare inesențială a nodului* K *este ca acest nod să se descompună în produsul a două noduri avînd în comun segmentul* C'ω, C' *fiind intersecția lui* Cω *cu* AB.

Vom stabili mai întîi suficiența condiției. Să admitem deci că există o sferă σ care conține segmentul $C'\omega$ și separă contururile $C'B..F\omega$ și $C'A..E\omega$. Această sferă separă A de B, deci taie conturul ACB, dar nu întîlnește AB decît în punctul C'. O mică deplasare a vîrfurilor sferei σ ne permite să facem astfel ca punctele de intersecție ale conturului ACB cu σ să fie interioare unor fețe ale acestei sfere, și atunci numărul acestor puncte va fi finit și impar. Dacă acest număr este > 1, putem modifica suprafața σ în vecinătatea triunghiului (plin) ABC astfel ca aceasta să întîlnească conturul ACB într-un singur punct α. Astfel, dacă urma sferei σ pe planul ABC conține arcul $\omega\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ care taie BC în punctele α, β, γ, δ, ε e suficient să scoatem din interiorul (resp. exteriorul) sferei σ niște vecinătăți convenabile ale ariilor delimitate în ABC de arcele $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, .. După această modificare, σ va întîlni conturul ACB într-un singur punct α. De altfel, se vede că nodul $\omega\alpha B..F\omega$ rezultă din $\omega C'B..F\omega$ prin operații Δ aplicate în interiorul triunghiului ABC, și, tot astfel, $\omega\alpha CA..E\omega$ rezultă din $\omega C'A..F\omega$ prin astfel de operații. Astfel, $\omega\alpha B..F\omega$ este izotop cu $\omega C'B..F\omega$, și $\omega\alpha CA..E\omega$ cu $\omega C'..E\omega$. Atunci, K și K' fiind produse de noduri respectiv izotope, sînt izotope unul celuilalt, și traversarea e inesențială.

Pentru a arăta că condiția din enunț e și necesară, să presupunem că, traversarea fiind inesențială, K și K' sînt izotope. Dar, K și K' avînd în comun conturul K — AB, o teoremă a lui H. S c h u b e r t ([2], p. 15, Hilfssatz 6) ne permite să afirmăm că există o deformare izotopă a lui K în K' în timpul căreia conturul K — AB rămîne fix. Enunțul acestei teoreme e următorul: Σ fiind o sferă, iar u_1, u_2 fiind două corzi ale acesteia situate ambele în interior (sau exterior), avînd extremitățile în comun și definind

noduri izotope (dacă unim aceste extremități cu un arc simplu situat pe Σ) există o homeomorfie semiliniară a spațiului pe el însuși care aplică u_1 pe u_2 și care se reduce la identitate pe Σ și în exteriorul (sau interiorul) său. Să construim o sferă Σ alungită și foarte subțire, în vecinătatea conturului K — AB = A..EF..B, astfel încît acest contur să fie trasat pe Σ iar Σ să nu întîlnească laturile triunghiului ABC decît în punctele A și B. Atunci AB și ACB sînt două corzi ale lui Σ, situate în exteriorul său, avînd extremități comune, iar nodurile pe care ele le definesc împreună cu arcul K — AB, trasat pe Σ, sînt izotope prin ipoteză. Există deci o homeomorfie semiliniară h a exteriorului lui Σ, fie acesta Σ_e, asupra lui însuși, care transformă AB în ACB lăsînd fix arcul K — AB. Atunci există și o deformare continuă a lui Σ_e în el însuși care aduce AB pe ACB. În adevăr, să aplicăm Σ_e pe interiorul unui simplex tridimensional τ printr-o homeomorfie semiliniară H. Imaginile A*C*B* și A*C'*B* ale lui ACB și AC'B prin H vor fi corzi interioare ale lui τ, și $H^{-1}hH$ este o homeomorfie a interiorului simplexului pe el însuși, care aplică A*C*B* pe A*C'*B*. Convexitatea simplexului ne permite să definim o deformare care are același efect, punînd

$$M^*M_t^* = t.\, M^*M'^*,\ t \in [0,1] = \mathrm{I},\ M'^* = \mathrm{H}^{-1}hH(M^*)$$

unde M^* e un punct oarecare al simplexului iar M_t^* transformatul său. Notînd această deformare cu f_t, $H^{-1}f_tH$ este o deformare a lui Σ_e în el însuși, care aduce $AC'B$ pe ACB. Este o aplicație φ: $\Sigma_e \times I \rightarrow \Sigma_e$ care e simplicială pe o anumită subdiviziune a lui $\Sigma_e \times I$. Imaginea φ (AB) este o suprafață poliedrală avînd ca bord triunghiul ABC. Această suprafață, generată de un contur poligonal care se deformează continuu, extremitățile sale rămînînd fixe, este un element de suprafață cu singularități, adică imaginea unui triunghi printr-o aplicație continuă. Această suprafață Φ poate prezenta puncte multiple a căror așezare pe Φ a făcut obiectul unor cercetări care pornesc dela o lucrare a lui D e h n [3]; cercetări ulterioare au condus la demonstrarea lemei lui D e h n de către C. D. P a p a k y r i a k o p o u l o s [4]. Suprafața Φ putînd să întîlnească aria triunghiului ABC, dar fără a atinge sfera Σ, se poate trasa în planul ABC un cerc γ cu centrul ω și de rază destul de mică, astfel ca Φ să nu aibă nici un punct situat pe acest cerc sau în interiorul său. Adăugînd la Φ domeniul interior triunghiului ABC și exterior acestui cerc γ, se obține un element de suprafață al cărui bord este γ, și care nu are singularități pe bord. Lema lui D e h n arată atunci că acest element de suprafață poate fi modificat așa încît să obținem un element de suprafață Φ' fără nici o singularitate, avînd bordul γ, și situat în Σ_e. Adăugînd la Φ' și discul (γ), obținem o sferă σ care nu întîlnește K — AB decît în punctul ω, și care taie AB, deoarece K e un contur închis. Prin modificări deja utilizate mai sus putem face astfel ca σ să taie AB într-un singur punct, apoi să modificăm σ astfel ca ea să conțină segmentul $C'\omega$. Așadar nodul K este produsul, în sensul lui Schubert, a două noduri care au în comun segmentul $C'\omega$.

Să numim *traversare periferică* o traversare inesențială astfel încît descompunerea corespunzătoare a lui K în produs să fie banală, adică unul din factorii produsului să fie un cerc. Atunci:

Dacă K este un nod prim, singurele traversări inesențiale pe care le admite sînt traversări periferice.

Astfel, deoarece în tabela de noduri Alexander-Briggs [*1*], pp. 70—72) figurează numai noduri prime, iar numărul punctelor duble în proiecție este redus la minimum, orice inversiune a ramurilor într-un punct dublu (înlocuirea unei treceri deasupra .. printr-o trecere dedesubtul lui ..) corespunde unei traversări esențiale a nodului. Nodul care rezultă prin o astfel de traversare va avea același număr de puncte duble în proiecție dar este susceptibil de a fi simplificat prin deformări izotope astfel ca acest număr să scadă. Se pare că, în general, orice traversare de această natură aduce nodul într-o clasă cu un număr mai mic de puncte duble în proiecție, dar aceasta nu este încă demonstrat. Teorema enunțată în această lucrare poate fi utilă în vederea formării invarianților de izotopie ([5], p. 607) exprimabili prin funcții de linie atașate nodului K. În adevăr, un astfel de invariant trebuie să rămînă constant atunci cînd K suferă o traversare inesențială, și trebuie să facă un salt pentru orice traversare esențială.

BIBLIOGRAFIE

1. K. Reidemeister, *Knotentheorie.* Springer, Berlin, 1932.
2. H. Schubert. *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten.* „Sitzungsber. Heidelberger Akad. d. Wiss.," 1949.
3. M. Dehn. *Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes.* „Mathematische Annalen", **69**, 1910, pp. 137—168.
4. C. D. Papakyriakopoulos. *Some problems on 3-dimensional manyfolds.* „Bull. of the American Math. Society," **64**, 1958, pp. 317—335.
5. G. Călugăreanu, *Sur les classes d'isotopie des noeuds tridimensionnels et leurs invariants.* „Czechoslovak Mathematical Journal", 11, 1961, pp. 588—625.

ТЕОРЕМА О ПЕРЕСЕЧЕНИИ УЗЛА

(Резюме)

В этой работе под узлом подразумевается простой замкнутый многоугольный направленный контур K с конечным числом сторон, в эвклидовом трёхразмерном пространстве. Равнозначность или изотопия двух узлов была определена К. Рейдемейстером с помощью действий $\triangle$ и $\triangle'$. Здесь *пересечение* узла определяется следующим образом: AB является стороной узла K, а ABC — треугольником, имеющим единственную общую с узлом K точку ω—, кроме стороны AB, а ω являясь внутренней точкой треугольника и внутренней точкой некоторой стороны узла K, замена стороны AB контуром ABC называется пересечением узла K. Вследствие одного из таких пересечений класс изотопии узла K может измениться и, в этом случае, пересечение является *эссенциялыным*, а когда класс изотопии остаётся без изменений, пересечение называется *инэссенциялыным*. В работе даётся необходимое и достаточное условие для того, чтобы пересечение было бы инэссенциальным. Для этого необходимо и достаточно, чтобы узел K был бы разложен на произведение двух узлов, в значении Г. Шуберта, имеющих совместно отрезок $C'\omega$, где C' есть точка пересечения прямой $C\omega$ со стороной AB. При доказательстве используется лемма Дена, а также некоторые теоремы, выведенные Греубом и Шубертом. Дётся определение *перифериийных* пересечений и доказывается, что простой узел допускает инэссенциальными пересечениями только периферийные пересечения.

UN THÉORÈME SUR LES TRAVERSÉES D'UN NOEUD

(Résumé)

Dans ce travail, on entend par noeud un contour polygonal fermé K, simple, orienté, à un nombre fini de côtés, situé dans l'espace euclidien tridimensionnel. L'équivalence ou isotopie de deux noeuds a été définie par K. Reidemeister à l'aide des opérations Δ et Δ'. On définit ici le terme „traversée" d'un noeud, de la manière suivante: AB étant un côté du noeud K, et ABC un triangle qui a un seul point ω en commun avec K, en dehors du côté AB, où ω est un point intérieur du triangle et un point intérieur d'un côté de K, on appelle traversée du noeud K l' opération qui consiste à remplacer le côté AB par le contour ACB. Par suite d'une telle traversée, la classe d'isotopie du noeud K peut changer, et dans ce cas la traversée est appelée *essentielle*, tandis que si la classe d'isotopie reste inchangée la traversée est appelée *inessentielle*. Le théorème donné dans le travail constitue une condition nécessaire et suffisante pour qu'une traversée soit inessentielle: il est nécessaire et suffisant, pour cela, que le noeud K se décompose en produit de deux noeuds, au sens de H. Schubert. La démonstration utilise le lemme de Dehn, ainsi que certains théorèmes de Greub et Schubert. On définit les traversées *périphériques*, et l'on établit que les noeuds premiers n'admettent, comme traversées inessentielles, que des traversées périphériques.