

SUR UNE PROPRIÉTÉ MÉTRIQUE DES ENSEMBLES CONNEXES DU PLAN

PAR

GEORGES CĂLUGĂREANU (Cluj)

Hommage à M. O. Mayer à l'occasion de son 70-e anniversaire

Appelons „corde“ d'un ensemble E tout segment rectiligne dont les extrémités appartiennent à E . Soit C un ensemble connexe du plan, ab une corde de C ; il existe des cordes de C de longueur $r < ab$; en effet, le cercle de centre a et de rayon r doit rencontrer C , puisque C est connexe. Mais que peut-on dire sur l'existence des cordes *parallèles* à ab et de longueur $r < ab$? Ce problème nous a été posé par une application dont il sera question à la fin de cette Note. Nous démontrerons le théorème suivant:

I. *Si ab est une corde de l'ensemble borné et connexe C du plan, il existe des cordes $a'b'$ de C , parallèles à ab , dont la longueur est la n -ème partie de ab , n étant un nombre naturel quelconque; mais, pour chaque n naturel, on peut construire un continu borné qui ne possède aucune corde parallèle à ab et de longueur $k \cdot ab$, avec $\frac{1}{n+1} < k < \frac{1}{n}$.*

Dans le plan complexe, désignons par T_h la translation $T_h(z) = z + h$, et par E^h l'ensemble $T_h(E)$, le „translaté“ de E par h .

Remarquons que l'existence, sur E , d'une corde parallèle et égale au vecteur h , se ramène à cette autre propriété équivalente: les ensembles E et E^h possèdent au moins un point commun. L'énoncé de notre théorème peut alors être remplacé par le suivant:

II. *C étant un ensemble borné et connexe du plan, si $C^h = T_h(C)$ a un point commun avec C , il en est de même des ensembles C^{hn} , donc*

$$C \cap C^{hn} \neq \emptyset$$

quel que soit le nombre naturel n .

Ce second énoncé peut, à son tour, être remplacé par :

III. Si $C \cap C^h = \emptyset$, on a aussi $C \cap C^{nh} = \emptyset$, pour chaque n naturel.

Il suffira de démontrer cette dernière proposition, C étant un ensemble borné et connexe. Si C n'est pas borné, la propriété s'étend immédiatement à toute corde de C telle que ses extrémités puissent être jointes par un sous-ensemble borné et connexe de C .

Passons à la démonstration de l'énoncé III.

L'ensemble connexe C étant borné, il existe une bande de largeur minimum, dont les bords sont deux droites parallèles au vecteur h , cette bande (fermée) contenant le continu \bar{C} . Elle contient également tous les continus \bar{C}^{nh} , $n = 1, 2, \dots$. Menons une droite δ_0 (ou ad) orthogonale à h , telle que l'un des demi-plans qu'elle détermine contienne en entier C , C^h, C^{2h}, \dots , et que sa distance à C soit positive, mais inférieure à $|h|$.

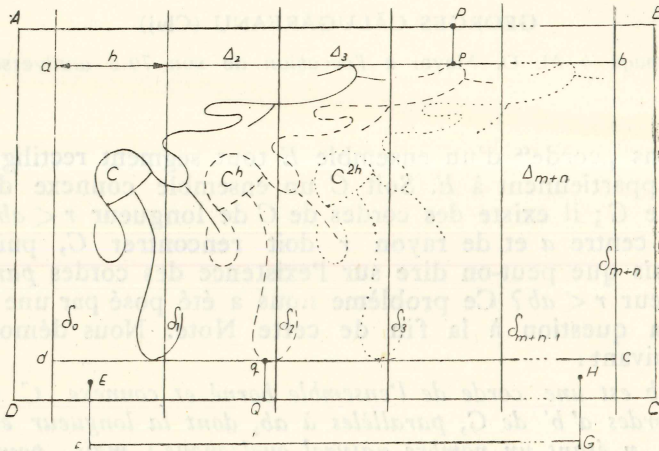


Fig. 1

Menons les parallèles δ_i à δ_0 , que l'on obtient en appliquant à δ_0 les translations $h, 2h, \dots$. C étant borné, il existe un entier m tel que $C \cap \delta_i \neq \emptyset$ pour $i < m$, $C \cap \delta_i = \emptyset$ pour $i \geq m$. Désignons par Δ_i la bande comprise entre δ_{i-1} et δ_i , et par Δ_{pq} la bande comprise entre δ_p et δ_q ; C sera contenu dans $\Delta_{0,m}$, C^h dans $\Delta_{1,m+1}, \dots$, $C^{nh} \subset \Delta_{n,m+n}$. Désignons par $abcd$ le rectangle découpé dans la bande initiale, parallèle à h , par δ_0 et δ_{m+n} , et par R un rectangle $ABCD$ contenant à son intérieur $abcd$. Par construction, \bar{C} a des points sur les côtés ab et cd , donc aussi $\bar{C}^h, \bar{C}^{2h}, \dots$. Soit p un point de \bar{C}^h situé sur ab , et q un point de \bar{C}^h situé sur cd . Menons les segments pP et qQ orthogonaux à h , avec $P \in AB, Q \in CD$. Alors $pP \cup C^h \cup qQ$ est un ensemble connexe que nous désignerons par PC^hQ . Ce connexe divise le rectangle R en domaines simplement con-

nexes (théorème de Janiszewski-Strassewics). Soit E un point situé dans la bande Δ_1 , puis H un point situé dans la bande Δ_{m+n} , ces deux points étant extérieurs à $abcd$, mais intérieurs à R . Menons les segments EF et GH , parallèles à δ_0 , F et G étant extérieurs à R , puis le segment FG . On voit alors que chaque contour polygonal qui joint E à H par l'intérieur de R doit couper le connexe PC^hQ , car un tel contour forme avec $EFGH$ un polygone qui contient le point Q à son intérieur et laisse le point P à son extérieur. Cela signifie que les points E et H se trouvent dans deux composantes distinctes de $R - (PC^hQ)$; donc $\Delta_1 \cap R$ et $\Delta_{m+n} \cap R$ appartiennent respectivement à ces deux composantes distinctes, puisque PC^hQ n'a aucun point dans Δ_1 , ni dans Δ_{m+n} .

Prenons $n = 2$. Il s'agit de montrer $C \cap C^{2h} = \emptyset$. On a $C \cap C^h = \emptyset$, d'où, par translation, $C^h \cap C^{2h} = \emptyset$, donc aussi $C \cap (PC^hQ) = \emptyset$, $C^{2h} \cap (PC^hQ) = \emptyset$. Cela signifie que C est inclus dans une composante de $R - (PC^hQ)$, et comme $C \cap \Delta_1 \neq \emptyset$, c'est la composante qui contient $R \cap \Delta_1$; de même, C^{2h} est inclus dans la composante de $R - (PC^hQ)$ qui contient $R \cap \Delta_{m+2}$, puisque $C^{2h} \cap \Delta_{m+2} \neq \emptyset$; ces deux composantes étant distinctes, on a donc $C \cap C^{2h} = \emptyset$.

Par translation, on en déduit $C^h \cap C^{3h} = \emptyset$, donc $C^{3h} \cap (PC^hQ) = \emptyset$. On peut donc reprendre le raisonnement pour $n = 3$, et ainsi de suite. *Q. E. D.*

On voit que les nombres de la forme $\frac{1}{n}$ jouent ici un rôle particulier. On ne peut pas remplacer, dans l'énoncé initial du théorème, $\frac{1}{n}$ par $k < 1$. En effet, il est facile de former un contre-exemple¹⁾, pour $\frac{1}{n+1} < k < \frac{1}{n}$, quel que soit le nombre naturel n . Il

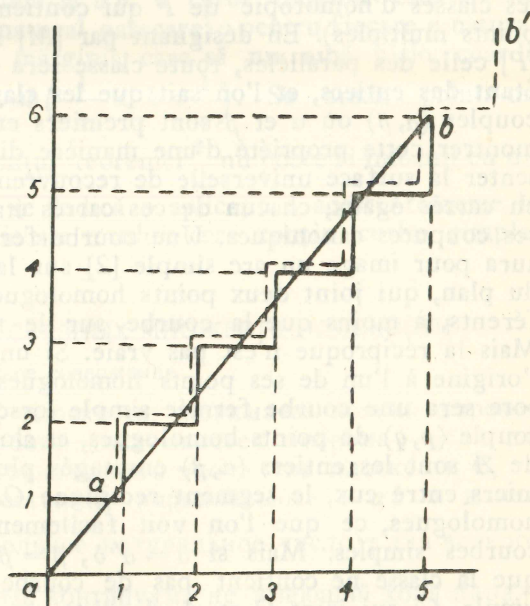


Fig. 2

suffit de tracer le contour polygonal représenté sur la fig. 2 pour $n = 5$.

¹⁾ Une suggestion de M. prof. A. Rényi nous a été utile pour la construction de cet exemple. M. Rényi nous a également signalé l'ouvrage [3] où notre problème est traité dans certains cas particuliers.

On a $\frac{1}{6} ab < aa' < \frac{1}{5} ab$, et l'on voit que la translation aa' amène ce continu sur un autre (représenté en pointillé) qui ne coupe pas le continu initial. Une construction analogue est possible pour chaque n , la courbe en escalier ayant alors n segments horizontaux et $n + 1$ verticaux.

En somme, ab étant une corde de longueur 1 de C , il existe toujours au moins une corde de C , parallèle à celle-ci, et de longueur $\frac{1}{n}$; mais il n'existe pas nécessairement une corde de longueur intermédiaire, parallèle à ab . Cette propriété appartient aux ensembles connexes, bornés, du plan, sans les caractériser, car il existe des ensembles disconnexes qui ont cette propriété, par exemple, l'ensemble des points rationnels d'un segment rectiligne. Dans le cas de l'espace tridimensionnel, on trouve facilement des continus (arc d'hélice) qui ne possèdent même pas des cordes parallèles à une corde donnée.

Voici une application de ce théorème, qui est à l'origine de son élaboration. On sait que le groupe fondamental F du tore est abélien, à deux générateurs (classes d'homotopie des méridiens et des parallèles). La recherche des noeuds que l'on peut tracer sur le tore revient à trouver les classes d'homotopie de F qui contiennent des courbes simples (sans points multiples). En désignant par $[M]$ la classe des méridiens et par $[P]$ celle des parallèles, toute classe sera représentée par $[M]^{\alpha} [P]^{\beta}$, α et β étant des entiers, et l'on sait que les classes simples correspondent aux couples (α, β) où α et β sont premiers entre eux [1]. Si l'on veut démontrer cette propriété d'une manière directe, on est conduit à représenter la surface universelle de recouvrement Σ du tore sur le plan divisé en carrés égaux, chacun de ces carrés étant l'image du tore pourvu de ses coupures canoniques. Une courbe fermée simple tracée sur le tore aura pour image un arc simple [2] sur la surface Σ , donc un arc simple du plan, qui joint deux points homologues, situés dans deux carrés différents, à moins que la courbe sur le tore ne soit homotope à zéro. Mais la réciproque n'est pas vraie. Si un arc simple OA du plan joint l'origine à l'un de ses points homologues A , l'image de cet arc sur le tore sera une courbe fermée simple lorsque l'arc OA ne contient aucun couple (p, q) de points homologues, et alors seulement. Or, les coordonnées de A sont les entiers (α, β) envisagés plus haut. Lorsque α, β sont premiers entre eux, le segment rectiligne OA ne peut contenir deux points homologues, ce que l'on voit facilement, donc la classe contient des courbes simples. Mais si $\alpha = \alpha' \delta$, $\beta = \beta' \delta$, $\delta > 1$, il s'agit de montrer que la classe ne contient pas de courbe simple, donc, sur chaque arc simple C qui joint O et A , il existe un couple de points homologues. Or, ceci résulte de notre théorème. En effet, le segment OA est une corde de C . Le point $A'(\alpha', \beta')$ est homologue à O , et $OA' = \frac{1}{\delta} OA$. Mais C possède une corde parallèle à OA , de longueur $\frac{1}{\delta} OA$, donc les extrémités de cette corde sont des points homologues, et l'image de C sur le tore n'est pas une courbe simple.

BIBLIOGRAPHIE

1. Reidemeister K. — *Knotentheorie*, p. 16.
2. Poincaré H. — 5^e complément à l'*Analysis situs*, pp. 45-110.
3. Яглом А. Н, и Яглом И. М. — *Неэлементарные задачи в элементарном изложении*. Гостехиздат, Москва 1954.
4. *Mathematikai Lapok*, 6, 1955, pp. 340-342.

ASUPRA UNEI PROPRIETĂȚI METRICE A MULȚIMILOR CONEXE DIN PLAN

Rezumat

Se numește coardă a unei mulțimi E din plan, orice segment de dreaptă ale cărei extremități aparțin lui E . În lucrare se demonstrează teorema: dacă ab este o coardă a mulțimii plane mărginite și conexă C , există corzi $a'b'$ ale lui C , paralele la ab , a căror lungime este a n -a parte din ab (n este un număr natural oarecare); pentru fiecare n natural se poate construi un continuum mărginit, care să nu aibă nicio coardă paralelă cu ab și de lungime $k \cdot ab$ ($\frac{1}{n+1} < k < \frac{1}{n}$). Se arată, printr-un contraexemplu (fig. 2) că în enunțul teoremei $\frac{1}{n}$ nu poate fi înlocuit cu un număr oarecare $k < 1$. În sfârșit se indică o aplicație a acestei teoreme la determinarea claselor de omotopie ale torului, care conțin curbe simple.

МЕТРИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО СВЯЗНЫХ МНОЖЕСТВ ПЛОСКОСТИ

Краткое содержание

Под хордой множества E плоскости, понимаем всякий отрезок прямой с концами в E . В работе доказывается теорема: если ab является хордой связного и ограниченного множества плоскости C , то существуют хорды $a'b'$ множества C , параллельные к ab и длина которых есть $\frac{1}{n} \cdot ab$ (n — произвольное натуральное число); для всякого n можно построить ограниченный континуум, не имеющий хорд параллельных к ab и длина которых была $k \cdot ab$ ($\frac{1}{n+1} < k < \frac{1}{n}$). Показывается что в этом теореме нельзя поставить вместо $\frac{1}{n}$ произвольное $k < 1$. Наконец, указывается применение этой теоремы при рассмотрении гомотопических классов тора имеющих простые кривые.