

P.576

110

REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

TOME XIII, N° 1

1968

BCU Cluj-Napoca



PMATE 2014 00412

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE

P.2486/968

6.11.68.

Rédacteur en chef :

MIRON NICOLESCU, membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

Rédacteur en chef adjoint :

GR. C. MOISIL, membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

Membres :

G. VRANCEANU, membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

CAIUS IACOB, membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

TIBERIU POPOVICIU, membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

M. HAIMOVICI, membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

GH. MIHOC, membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

G. MARINESCU, membre correspondant de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

Secrétaire de rédaction :

CIPRIAN FOIAȘ

Les manuscrits, les livres et les revues proposés en échange, ainsi que toute correspondance, seront envoyés à la rédaction : 47, Str. M. Eminescu, Bucarest, 3, Roumanie.

SOMMAIRE

	<u>Page</u>
NAND LAL AGGARWAL, Deux théorèmes de convergence sur les chaînes à liaisons complètes	3
O. BERECHET, La représentation de Poisson et le problème de Cauchy pour l'équation bicolorique	9
G. CĂLUGĂREANU, Sur un choix intrinsèque des générateurs du groupe d'un nœud	19
MIRCEA CÎRNU, Sur la transformation de Fourier des fonctions distributionnelles composables	25
CORNELIU CONSTANTINESCU, Kernels and nuclei on harmonic spaces	35
CONSTANTIN V. CRĂCIUN, Domination et sous-langages dans la théorie analytique de la grammaire	59
ALEXANDRU DINCĂ, Sur quelques problèmes d'analyse contextuelle métrique	65
T. МОРОЗАН, Об устойчивости при малых стохастических возмущениях	71
TIBERIU POPOVICIU, Sur la délimitation de l'erreur dans l'approximation des racines d'une équation par interpolation linéaire ou quadratique	75
TIBERIU POPOVICIU, Sur les fractions continues de J. Mikusinski	79
T. PRECUPANU, Sur les produits scalaires dans des espaces vectoriels topologiques	85
C. TELEMAN, On the principal series of unitary representations of the group $SGL(n, C)$	91
SILVIU TELEMAN, La représentation des automorphismes des réseaux vectoriels	95
RODICA TRANDAFIR, Familles de courbes mesurables du plan euclidien. II	107
DINU WEXLER, Solutions presque-périodiques des systèmes linéaires à perturbation-distribution	111
BOHDAN ZELINKA, Sur les langages absolument non adéquats	131
COMPTES RENDUS	135

Ajoutant (22) et (23) nous obtenons la formule de représentation de Poisson (13). Ainsi, le théorème est démontré.

De ce théorème, il résulte immédiatement le théorème suivant d'unicité :

THÉORÈME 2. *L'unicité des solutions du problème de Cauchy pour l'équation bicolorique en bande $0 < y < Y$ a lieu dans la classe des fonctions en vérifiant les inégalités :*

$$|u(x, y)| < Me^{Kx^2}$$

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| < Me^{Kx^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} > -Me^{Kx^2}$$

La démonstration est analogue à celle de [2] p. 476.

Reçu le 7 novembre 1966

Institut de Mathématiques de l'Académie
de la République Socialiste de Roumanie,
Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. M. NICOLESCU, *Ecuatia iterată a căldurii*, St. cercet. matem., 1954, **5**, 3-4, 243-332.
2. M. NICOLESCU, C. FOIAȘ, *Représentation de Poisson et le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur*. Rend. Accad. Naz. dei Lincei, 1965, **38**, 4, 466-476.
3. M. NICOLESCU, *Sur l'équation de la chaleur*. Commentarii Math. Helv., 1937, **10**, 3-17.
4. P. MUSTAȚĂ, *Sur la représentation de Poisson des solutions du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 1966, **11**, 6, 673-691.
5. A. ТИХОНОВ, *Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur*. Math. Sbornik, 1935, **42**, 199-216.
6. С. Д. ЭЙБЕЛЬМАН, *Оценки решений параболических систем и некоторые их применения*, Мат. сборник, 1953, **33**, 359-382.

SUR UN CHOIX INTRINSÈQUE DES GÉNÉRATEURS DU GROUPE D'UN NŒUD

PAR

G. CĂLUGĂREANU

(Cluj)

N étant un nœud dans R^3 et $\pi_1(R^3 - N)$ le groupe de N , on se propose de choisir pour ce groupe un système de générateurs non liés à une projection plane de N , d'où le nom de générateurs intrinsèques. On montre d'abord que chaque N peut être tracé sur une surface S fermée orientable de manière que N ne divise pas cette surface. Par application du théorème de van Kampen, on obtient une présentation du groupe de N à l'aide d'un système de générateurs lié aux deux domaines $\mathcal{I}(S)$ et $\mathcal{U}(S)$ qui composent $R^3 - S$. Les relations du groupe de N s'obtiennent à l'aide d'un graphe tracé sur S , et ont une interprétation géométrique remarquable : elles expriment l'existence de certaines courbes fermées simples, situées dans $\mathcal{U}(S)$, qui peuvent être amenées dans $\mathcal{I}(S)$ par déformation isotope dans R^3 , sans rencontrer N .

N étant un nœud situé dans R^3 et $[N]$ étant la classe d'isotopie dont N est un représentant, un grand nombre de propriétés topologiques de $[N]$ se traduisent par des propriétés algébriques du groupe fondamental $\pi_1(R^3 - N)$, appelé groupe du nœud N . On représente ce groupe le plus fréquemment, en employant une projection orthogonale de N sur un plan Π , et l'on choisit Π de manière que cette projection ne possède que des points doubles. Cette représentation a l'avantage de nous offrir une image claire de la structure du nœud ; mais elle a l'inconvénient d'être liée à un élément étranger, le plan Π , dont le choix est assez arbitraire, et qui est l'analogue d'un système de référence (axes cartésiens en géométrie). De plus, on constate que cette représentation du groupe de N impose l'emploi d'un grand nombre de générateurs liés par un grand nombre de relations, le nombre des générateurs, ainsi que celui des relations, pouvant généralement être réduit par la suite, en « résolvant » certaines de ces relations. En dernière analyse, le nombre des générateurs

étant réduit au minimum, c'est la structure algébrique des relations restantes qui caractérise (partiellement) une classe d'isotopie $[N]$.

On a parfois essayé, par divers procédés, de réduire au possible le nombre des générateurs et relations en question ([1], [2]). Un exemple qui est à l'origine des considérations suivantes ([3], p. 180) est celui du nœud (3_1) . Ce nœud peut être tracé sur un tore en position normale (tore sans nœud, p. ex. tore de rotation autour d'un axe) et ce nœud ne sépare pas la surface du tore en domaines disjoints. On trouve que le groupe correspondant est représenté par deux générateurs A, B liés par la relation $A^2 = B^3$. En prenant pour point de base O un point sur la surface du tore, non situé sur N , A est représenté par un chemin fermé passant par O et faisant une fois le tour du canal central du tore, tandis que B est un contour analogue circulant à l'extérieur du tore et passant une fois par son canal central. De cette façon, la représentation du groupe de (3_1) n'est plus liée à une projection plane du nœud, et en même temps le nombre des générateurs employés se trouve réduit au minimum. De plus, la relation $A^2 = B^3$ a une belle interprétation géométrique : une courbe fermée située à l'intérieur du tore et qui tourne 2 fois autour du canal central peut être déformée continûment, sans qu'elle touche le nœud N , de manière à être amenée toute entière à l'extérieur du tore, et alors elle passera 3 fois par le canal central du tore (fait géométrique vérifiable expérimentalement).

Dans ce qui suit, nous voulons indiquer de quelle manière une représentation analogue, que nous appelons « intrinsèque », peut être donnée pour le groupe d'un nœud N quelconque.

1. Remarques préliminaires. On sait que chaque nœud peut être tracé sur une surface fermée orientable S en position normale. Cette surface est une sphère à un nombre fini p d'anses qui ne sont ni nouées ni enlacées entre elles¹⁾. Si p est assez grand, N peut être tracé sur S de manière qu'il divise S en deux domaines disjoints ([4], p. 584), mais aussi (en changeant, si nécessaire, la valeur de p), de manière que N ne divise pas S . Dans ce dernier cas, $\Delta = S - N$ est un domaine unique sur S , et deux quelconques de ses points peuvent être joints par un arc sur S qui n'a aucun point commun avec N .

Une construction simple d'une telle surface S a été indiquée par H. Terasaka ([5], p. 136) à partir d'une projection plane du nœud. On sait qu'une telle projection divise le plan Π en domaines simplement connexes que l'on peut teindre en blanc et noir de manière que chaque domaine blanc vienne en contact, le long des segments qui forment sa frontière, avec des domaines noirs, et réciproquement ([6], p. 9). L'ensemble des domaines blancs peut être considéré comme projection dans le plan Π d'une surface β ayant pour bord le nœud N . L'ensemble des domaines noirs permet, d'une manière analogue, la formation d'une seconde surface β' , ayant aussi N pour bord. Si l'une de ces surfaces est orientable, le procédé de « doublage » de H. Seifert permet de construire une surface fermée orientable S , sur laquelle le nœud N se trouve tracé : on construit une seconde surface, voisine de la première, ayant aussi N

¹⁾ Plus correctement : une surface fermée, orientable, est « en position normale dans S^3 » si elle partage S^3 en deux domaines homéomorphes entre eux.

pour bord, résultant de la première par un petit déplacement le long des normales positives (ou négatives) à la première surface. On voit que les deux surfaces forment alors une surface fermée orientable, et que N divise celle-ci en deux domaines. Une dilatation convenable de l'intérieur de cette surface, suivie d'une projection dans le plan Π , permet de retrouver le procédé de construction de H. Terasaka. Si la surface β (ou β') n'est pas orientable, le procédé de doublage, appliqué des deux côtés de β (ou β'), conduit encore à une surface orientable S , contenant β (ou β') à son intérieur, et alors N ne divise pas S en domaines disjoints. Sa projection dans Π conduit encore au procédé de construction de H. Terasaka.

Ainsi, N peut toujours être tracé sur une surface orientable S en position normale, de deux manières (au moins), et N divise S en deux domaines lorsque la surface de départ β (ou β') est orientable ; N ne divise pas S si celle-ci n'est pas orientable.

Or, on voit facilement que, N étant quelconque, l'une au moins des surfaces β, β' est non orientable. En effet, si β est orientable, en choisissant un sens positif de parcours sur N , β se trouve orientée. Les domaines (blancs) qui lui correspondent dans Π se trouvent eux-mêmes orientés, de manière que deux domaines qui ont un sommet en commun (1 et 2 sur la fig. 1), ont des orientations contraires. Si β' était aussi orientable, on pourrait répéter ceci pour la surface β' et les domaines (noirs) correspondants dans Π . Mais, la figure 1 montre que les domaines 3, 4 ne peuvent se trouver orientés en même temps que 1 et 2, donc β' n'est pas orientable. Il en résulte que chaque nœud N peut être tracé sur une surface fermée orientable S , de manière que N ne divise pas cette surface. Dans le cas où N est donné par sa projection plane, cette surface pourra être obtenue par le procédé de H. Terasaka.

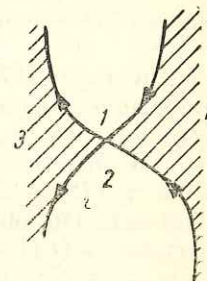


Fig. 1

2. Générateurs intrinsèques. Désignons par \mathcal{I} le domaine de R^3 intérieur à S , et par \mathcal{E} le domaine extérieur à S ; posons $\mathcal{I}' = \mathcal{I} - N$, $\mathcal{E}' = \mathcal{E} - N$.

On a $\mathcal{I}' \cap \mathcal{E}' = S - N = \Delta$, où Δ est le domaine sur S formé par les points non situés sur N . Pour former le groupe fondamental $\pi_1(R^3 - N)$, prenons un point de base $O \in \Delta$, qui appartient donc aussi à \mathcal{I}' et \mathcal{E}' . Soit Γ un chemin fermé partant de O et situé dans $R^3 - N$. Ce chemin peut être déformé (sans rencontrer N) de manière qu'il coupe S en un nombre fini de points p_1, p_2, \dots, p_{k-1} que l'on rencontre dans cet ordre quand on parcourt Γ dans le sens positif. Désignons par γ_1 l'arc Op_1 de Γ , par γ_2 l'arc p_1p_2 de Γ , ..., par γ_k l'arc $p_{k-1}O$ de Γ . Joignons chaque point p_i à O par un arc $\alpha_i \subset \Delta$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$), ce qui est possible puisque Δ est un domaine unique. Le chemin Γ se présente alors comme produit des chemins $\gamma_1\alpha_1^{-1}, \alpha_1\gamma_2\alpha_2^{-1}, \dots, \alpha_{k-1}\gamma_k$. Considérons l'un de ces chemins $\alpha_{i-1}\gamma_i\alpha_i^{-1}$. Si $\gamma_i \subset \mathcal{I}'$, le chemin peut être ramené dans \mathcal{I}' , à l'exception du seul point O . Il pourra donc être exprimé par un produit des générateurs de $\pi_1(\mathcal{I}')$. De même, si $\gamma_i \subset \mathcal{E}'$, par déformation homotope,

ce chemin pourra être ramené dans \mathcal{E} , à l'exception de O , et sera exprimable avec les générateurs de $\pi_1(\bar{\mathcal{E}})$. Le chemin sera donc représenté par un produit des générateurs de $\pi_1(\bar{\mathcal{T}})$ et $\pi_1(\bar{\mathcal{E}})$. Or, ces groupes ont une structure simple, la surface S étant en position normale. Le genre de S étant p , $\pi_1(\bar{\mathcal{T}})$ et $\pi_1(\bar{\mathcal{E}})$ sont des groupes libres à p générateurs chacun. Désignons ces générateurs par A_1, A_2, \dots, A_p et B_1, B_2, \dots, B_p . On reconnaît plus haut le raisonnement qui conduit au théorème de van Kampen [7] sur le groupe fondamental d'une réunion d'espaces linéairement connexes (arcwise connected) dont l'intersection est connexe.

3. *Relations et leur signification géométrique.* Les A_i et B_i engendrent donc $\pi_1(R^3 - N)$ aussi, mais dans ce groupe ils seront liés par certaines relations. On obtient ces relations en considérant les chemins fermés partant de O et situés entièrement sur Δ , car un tel chemin, appartenant à $\bar{\mathcal{T}}$, ainsi qu'à $\bar{\mathcal{E}}$, admet une double expression, l'une avec les A_i , l'autre avec les B_i . Il suffira d'écrire les égalités correspondantes pour tous les générateurs de $\pi_1(\Delta)$. Or, $\pi_1(\Delta)$ est aussi un groupe libre. On le voit en construisant un complexe 1-dimensionnel $K \subset \Delta$, K étant un rétracte de déformation de Δ ; on aura donc $\pi_1(\Delta) \approx \pi_1(K)$, et $\pi_1(K)$ est un groupe libre, le nombre q de ses générateurs étant donné par le nombre des cycles de base de K .

On obtient K par «rétraction» de Δ , ce qui nous conduit à la construction suivante. Nous croyons qu'il sera plus efficace de décrire cette construction sur un exemple (celui du nœud 7_6) la généralisation étant immédiate. Imaginons la surface S placée symétriquement par rapport au plan Π de la figure. Son intersection avec ce plan se compose alors de $p + 1$ courbes simples (ici $p = 3$), dont l'une C_0 contient les autres à

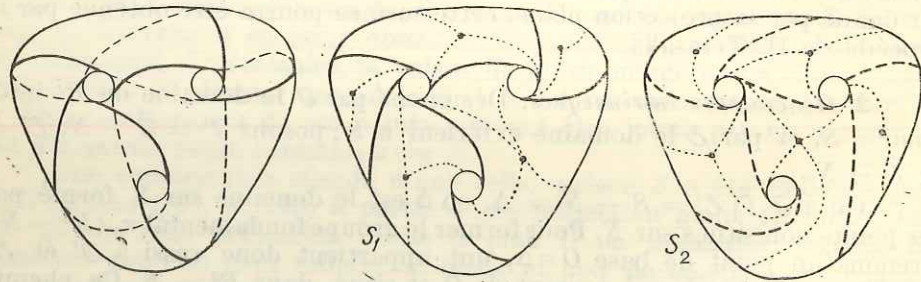


Fig. 2

son intérieur, ces dernières C_1, C_2, \dots, C_p étant extérieures les unes aux autres. Ces courbes divisent S en deux surfaces symétriques S_1, S_2 , et N divise chacune de ces surfaces en domaines simplement connexes (fig. 2). En effet, un tel domaine ne pourrait être multiplement connexe que si l'un des canaux de S , coupant Π le long d'une courbe C_i , $1 \leq i \leq p$, n'était traversé par aucun arc de N ; mais alors ce canal pourrait être supprimé, avec diminution du genre p . La frontière de l'un de ces domaines, situé sur S_1 ou S_2 , se compose d'arcs de N et d'arcs de certaines courbes C_i ($0 \leq i \leq p$). Dans chacun de ces domaines choisissons un point

intérieur, puis choisissons un point sur chacun des arcs des courbes C_i qui appartiennent à sa frontière; joignons le point intérieur à chacun des points choisis sur les C_i , par des arcs simples qui n'ont en commun que leur extrémité intérieure au domaine (arcs figurés en pointillé sur les figures 2, S_1 et S_2). Précisons que les points choisis sur les courbes C_i seront les mêmes pour les deux moitiés S_1 et S_2 . Les arcs ainsi tracés sur Δ forment alors un complexe 1-dimensionnel K tracé sur S (fig. 3), qui est visiblement un rétracte de déformation de la surface Δ . Un cycle quelconque de K peut être plongé à l'intérieur de S , par déformation continue vers l'intérieur, ou sorti à l'extérieur de S , sans que, pendant la déformation, ce cycle rencontre le nœud N . En l'exprimant une fois avec les générateurs A_i , l'autre fois avec les B_i , on obtiendra des relations de la forme

$$m_1(A_1, A_2, \dots, A_p) = m_2(B_1, B_2, \dots, B_p)$$

m_1 et m_2 représentant des mots (monomes) formés avec les lettres indiquées. Pour obtenir les relations distinctes, caractérisant le groupe de N , il suffira d'écrire cette double expression pour les cycles de base du complexe K .

Le fait que toutes les relations ont cette forme particulière (premier membre formé avec les A , second membre avec les B) correspond à la propriété géométrique suivante des cycles de K : un tel cycle peut être ramené à l'intérieur de S , ou à son extérieur, par une déformation *isotope* dans $R^3 - N$ (il suffit que la déformation soit assez petite). Nous pouvons considérer la surface S (ou les surfaces S , s'il en existe plusieurs, non équivalentes par déformation) comme étant liée d'une manière intrinsèque au nœud N , raison pour laquelle nous qualifions d'intrinsèque cette représentation du groupe de N .

Remarquons que le complexe K partage lui-aussi S_1 et S_2 en cellules simplement connexes. On peut donc reprendre l'opération de rétraction sur $S - K$, et l'on voit facilement qu'elle reconduit à N . Pour cette raison, nous appelons K : le graphe complémentaire de N , sur S .

Reçu le 13 décembre 1966

Institut de Calcul, Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. C. BANKWITZ, *Über die Torsionszahlen der alternierenden Knoten*. Math. Annalen, 1930, **103**, 145-161.
2. R. J. AUMANN, *Asphericity of alternating knots*. Ann. of math., 1956, **64**, 374-392.
3. H. SEIFERT-THRELFALL, *Lehrbuch d. Topologie*. Teubner-Berlin, 1934.
4. H. SEIFERT, *Über das Geschlecht von Knoten*. Math. Annalen, 1935, **110**, 571-592.
5. H. TERASAKA, *On the non-triviality of some kinds of knots*. Osaka Math. Journ., 1960, **12**, 113-149.
6. K. REIDEMEISTER, *Knotentheorie*, Springer-Berlin.
7. E. R. VAN KAMPEN, *On the connection between the fundamental groups of some related spaces*. Amer. j. of math., 1933, **55**, 261-267.

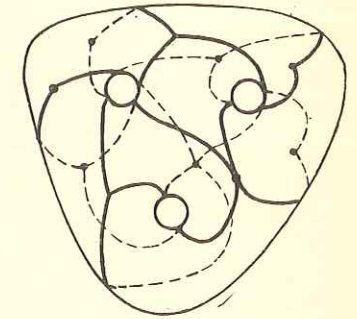


Fig. 3