

E - 3717 / 10

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

EXTRAIT DES BULLETINS

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

Séance du 12 octobre 1929, pp. 822-828

5^e SÉRIE. — TOME XV

Quelques problèmes relatifs à une formule
de récurrence
ou à une équation aux différences finies

PAR

D.-V. JONESCO (Cluj, Roumanie)

BRUXELLES

MAURICE LAMERTIN, LIBRAIRE-EDITEUR

58-62, Rue Coudenberg, 58-62

—
1929

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5^e série, t. XV, n^o 10.
Séance du 12 octobre 1929, pp. 822-828.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Quelques problèmes relatifs à une formule de récurrence ou à une équation aux différences finies,

par D.-V. JONESCO (Cluj, Roumanie) (*)

Relativement à l'équation aux différences finies ou à la formule de récurrence

$$u_{m,n} = au_{m-1,n} + bu_{m,n-1} + cu_{m-1,n-1} \quad (1)$$

où a, b, c sont des constantes, j'ai résolu deux problèmes.

1. PREMIER PROBLÈME. — Trouver l'intégrale de l'équation (1), connaissant les valeurs

$$u_{00}, u_{10}, u_{20}, \dots, u_{m0}, \dots$$

ainsi que les valeurs

$$u_{01}, u_{02}, u_{03}, \dots, u_{0n}, \dots$$

de $u_{m,n}$, pour les valeurs

$$\left. \begin{array}{l} 0, 0; 1, 0; 2, 0; \dots; m, 0; \dots \\ 0, 1; 0, 2; 0, 3; \dots; 0, n; \dots \end{array} \right\} \quad (2)$$

des indices m et n .

Il est d'abord évident qu'une telle intégrale est unique. En effet, on démontre facilement que l'intégrale de l'équation (1), s'annulant pour les valeurs (2) de m et de n , est identiquement nulle.

(*) Présenté par M. Th. De Donder.

D'autre part, soient $u_{m,n}$ et $v_{m,n}$ deux intégrales de l'équation (1). Ces intégrales prennent les valeurs

$$\begin{array}{ccc} u_{m,0} & \text{et} & u_{0,n} \\ v_{m,0} & & v_{0,n} \end{array} \quad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}$$

pour les valeurs (2) des indices m et n . On voit facilement que

$$w_{m,n} = Cu_{m,n} + C'v_{m,n}$$

où C et C' sont deux constantes, est une intégrale de l'équation (1) et qu'elle prend les valeurs

$$\begin{aligned} w_{m0} &= Cu_{m0} + C'v_{m0} & (m = 0, 1, 2, \dots) \\ w_{0n} &= Cu_{0n} + C'v_{0n} & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

pour les valeurs (2) des indices m et n .

2. Soit $\lambda_{m,n}^p$ l'intégrale de l'équation (1), qui est telle que

$$\lambda_{m,0}^p = \varepsilon_m^p \quad \text{et} \quad \lambda_{0,n}^p = 0 \quad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \\ p \neq 0 \end{pmatrix}$$

où

$$\varepsilon_m^p = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq p. \\ 1 & \text{si } m = p. \end{cases}$$

J'ai démontré que

$$\lambda_{m,n}^p = \frac{h}{(m-p)!} \frac{\partial^{m-p}}{\partial b^{m-p}} [b^n (c + ab)^{m-p-1}] \quad (3)$$

où

$$h = ab + c.$$

Pour donner un sens à la formule précédente, pour toutes

les valeurs de m et de p , nous faisons les conventions suivantes :

$$\frac{h}{0!} \frac{d^0}{dx^0} [b^n (c + ab)^{-1}] = hb^n h^{-1} = b^n$$

et

$$\frac{d^{-s}}{db^{-s}} [b^n (c + ab)^{-s-1}] = 0,$$

pour toute valeur positive de s .

3. De même soit $\mu_{m,n}^q$ l'intégrale de l'équation (1) qui est telle que

$$\mu_{m,0} = 0 \quad \text{et} \quad \mu_{0,n}^q = \varepsilon_n^q. \quad \left(\begin{array}{l} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right)$$

J'ai démontré que

$$\mu_{m,n}^p = \frac{h}{(n-q)!} \frac{d^{n-q}}{da^{n-q}} a^m (c + ab)^{n-q-1}. \quad (4)$$

4. Enfin soit $\nu_{m,n}$ l'intégrale de l'équation (1) qui est telle que

$$\nu_{0,0} = 1, \quad \nu_{m,0} = \nu_{0,n} = 0,$$

pour toutes les valeurs de m et de n .

J'ai démontré qu'on peut mettre cette intégrale sous la forme

$$\left. \begin{aligned} \nu_{m,n} &= \frac{h}{m!} \frac{\partial^m}{\partial b} [b^n (c + ab)^{m-1}] \\ &+ \frac{h}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} [a^m (c + ab)^{n-1}] \\ &- \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} [a^m (c + ab)^n]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Il est facile de voir que le dernier terme est symétrique en m et n , a et b .

5. Cela posé, il résulte des considérations précédentes que la solution du premier problème est donnée par la formule générale

$$\begin{aligned}
 u_{m,n} = & b^n u_{m,0} + h \frac{u_{m-1,0}}{1!} \frac{\partial}{\partial b} b^n \\
 & + h \frac{u_{m-2,0}}{2!} \frac{\partial^2}{\partial b^2} b^n (c + ab) \\
 & + \dots \\
 & + h \frac{u_{00}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial b^m} [b^n (c + ab)^{m-1}] \\
 & + a^m u_{0,n} + h \frac{u_{0,n-1}}{1!} \frac{\partial}{\partial a} a^m \\
 & + h \frac{u_{0,n-2}}{2!} \frac{\partial^2}{\partial a^2} [a^m (c + ab)] \\
 & + \dots \\
 & + h \frac{u_{00}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} [a^m (c + ab)^{n-1}] \\
 & - \frac{u_{00}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} [a^m (c + ab)^n].
 \end{aligned} \tag{6}$$

6. *Cas particulier.* — Prenons comme cas particulier de l'équation (1) l'équation

$$u_{m,n} = u_{m-1,n} + u_{m-1,n-1} \tag{7}$$

qui est celle qui relie trois nombres du triangle arithmétique de Pascal.

Il résulte de la formule générale (6) que l'intégrale de cette équation qui satisfait aux conditions du premier problème est

$$\left. \begin{aligned}
 u_{m,n} = & u_{0,n} + C_m^1 u_{0,n-1} + C_m^2 u_{0,n-2} + \dots + C_m^{n-1} u_{01} \\
 & + u_{m-n,0} + C_n^1 u_{m-n-1,0} + C_n^2 u_{m-n-2,0} + \dots + C_n^{m-n} u_{00}.
 \end{aligned} \right\}$$

où

$$C_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!}.$$

La formule précédente convient à toutes les valeurs de m et de n , à condition de supposer que

$$u_{-k,0} = 0$$

pour des valeurs positives de k .

On obtient le cas particulier des nombres du triangle arithmétique de Pascal en prenant

$$\begin{aligned} u_{m,0} &= 1, & (m = 0, 1, 2, \dots) \\ u_{0,n} &= 0. & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

7. SECOND PROBLÈME. — Trouver l'intégrale de l'équation (1), connaissant les valeurs

$$\begin{aligned} u_{00}, u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn}, \dots \\ u_{10}, u_{20}, u_{30}, \dots, u_{m,0}, \dots \end{aligned}$$

de $u_{m,n}$ pour les valeurs

$$\begin{aligned} 0, 0; 1, 1; 2, 2; \dots; n, n; \dots \\ 1, 0; 2, 0; 3, 0; \dots; m, 0; \dots \end{aligned}$$

des indices m et n .

8. Soit $\mu'_{m,n}$ l'intégrale de l'équation (1) qui est telle que

$$\mu'_{n,n} = \varepsilon_n^p \quad \text{et} \quad \mu'_{m,0} = 0 \quad \begin{pmatrix} m = 1, 2, 3, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots \\ p \neq 0 \end{pmatrix}$$

En posant

$$\alpha_{rs} = \frac{1}{r!} \frac{\partial^r}{\partial a^r} [a^s (c + ab)^{r-1}],$$

j'ai démontré que

$$\mu'_{m,n} = \frac{(-1)^{n-p}}{a^{\frac{(n+p)(n-p+1)}{2}}} \begin{vmatrix} \alpha_{0m} & h\alpha_{1m} & h\alpha_{2m} & \dots & h\alpha_{n-p-1,m} & h\alpha_{n-p,m} \\ \alpha_{0n} & h\alpha_{1n} & h\alpha_{2n} & \dots & h\alpha_{n-p-1,n} & h\alpha_{n-p,n} \\ 0 & \alpha_{0,n-1} & h\alpha_{1,n-1} & \dots & h\alpha_{n-p-2,n-1} & h\alpha_{n-p-1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h\alpha_{1,p+2} & h\alpha_{2,p+2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{0,p+1} & h\alpha_{1,p+1} \end{vmatrix} \quad (8)$$

9. Soit $\lambda'_{m,n}$ l'intégrale de l'équation (1) qui est telle que

$$\lambda'_{m,n} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda'_{m,0} = \varepsilon_m^p \quad \left(\begin{matrix} m = 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, \dots \end{matrix} \right).$$

En posant

$$\beta_{rs} = \frac{1}{r!} \frac{\partial^r}{\partial b^r} [b^s (c + ab)^{r-1}],$$

j'ai démontré que

$$\lambda'_{m,n} = \frac{h}{a^{\frac{(n+p)(n-p+1)}{2}}} \begin{vmatrix} \beta_{m-p,n} & \alpha_{0,m} & h\alpha_{1,m} & \dots & h\alpha_{n-p-1,m} & h\alpha_{n-p,m} \\ \beta_{n-p,n} & \alpha_{0,n} & h\alpha_{1,n} & \dots & h\alpha_{n-p-1,n} & h\alpha_{n-p,n} \\ \beta_{n-p-1,n-1} & 0 & \alpha_{0,n-1} & \dots & h\alpha_{n-p-2,n-1} & h\alpha_{n-p-1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{1,p+1} & 0 & 0 & \dots & \alpha_{0,p+1} & h\alpha_{1,p+1} \\ \beta_{0,p} & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{0,p} \end{vmatrix} \quad (9)$$

10. L'intégrale $v'^{m,n}$ de l'équation (1), qui est telle que

$$v_{00} = 1, \quad v'_{m0} = v'_{n0} = 0,$$

pour toutes les valeurs de m et de n , est

$$v_{mn} = \varepsilon_m^0 \left(-\frac{c}{a} \right)^n.$$

11. Il résulte que l'intégrale de l'équation (1) qui répond aux conditions du second problème est donnée par la formule

$$\left. \begin{aligned} u_{mn} = & \lambda_{mn}^1 u_{10} + \lambda_{mn}^2 u_{20} + \dots + \lambda_{mn}^m u_{m0} \\ & + \mu_{mn}^1 u_{11} + \mu_{mn}^2 u_{22} + \dots + \mu_{mn}^n u_{nn} + \varepsilon_m^0 \left(-\frac{c}{a} \right)^n \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

où $\lambda_{m,n}^p$ et $\mu_{m,n}^p$ sont donnés par les formules (8) et (9).

12. Dans le cas où $a = 0$, les résultats précédents n'ont pas de sens. Mais pour l'équation

$$u_{m,n} = b u_{m,n-1} + c u_{m-1,n-1}$$

les seules données

$$u_{00}, \quad u_{10}, \quad u_{20}, \quad \dots, \quad u_{m0}, \quad \dots$$

suffisent pour avoir l'intégrale générale pour $m \geq n$.

En effet, on trouve dans ce cas

$$u_{m,n} = b^n u_{m,0} + C_n^1 b^{n-1} c u_{m-1,0} + C_n^2 b^{n-2} c^2 u_{m-2,0} \left. \begin{array}{l} \\ + \dots + C_n^n c^n u_{m-n,0} \end{array} \right\}$$

13. Cas particulier. — Supposons que l'équation (1) est

$$u_{m,n} = u_{m-1,n} + u_{m-1,n-1}.$$

Pour avoir l'intégrale de cette équation qui correspond au second problème, il suffit dans les formules générales précédentes de faire

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1, \quad h = 1.$$

On démontre sans peine que

$$\begin{vmatrix} 1 & C_m^1 & C_m^2 & \dots & C_m^{n-p-1} & C_m^{n-p} \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-p-1} & C_n^{n-p} \\ 0 & 1 & C_{n-1}^1 & \dots & C_{n-1}^{n-p-2} & C_{n-1}^{n-p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{p+2}^1 & C_{p+2}^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & C_{p+1}^1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-p} C_{m-p-1}^{n-p}$$

et ensuite que

$$\mu_{m,n}^{p,n} = C_{m-p-1}^{n-p-1} \quad \text{et} \quad \lambda_{m,n}^{p,n} = C_{m-p-1}^{n-1}.$$

La solution du second problème est donc

$$u_{m,n} = C_{m-2}^{n-1} u_{10} + C_{m-3}^{n-1} u_{20} + \dots + C_{n-1}^{n-1} u_{m-n,0} \left. \begin{array}{l} \\ + C_{m-2}^{n-1} u_{11} + C_{m-3}^{n-2} u_{22} + \dots + C_{m-n-1}^0 u_{nn} + \varepsilon_m^0 (-1)^n \end{array} \right\}$$

La formule précédente a été donnée aussi par M. ANTONIO COLUCCI (*), mais il l'a démontrée pour $m \geq n$ (dans ce cas le terme $(-1) \varepsilon_m^0$ est nul). Mais la formule que j'ai donnée ci-dessus est valable pour toutes les valeurs de m et de n , positives ou nulles.

(*) ANTONIO COLUCCI, Su di un'equazione funzionale e sua relazione con una proprietà caratteristica dei coefficienti binomiali (*Giornale di Matematiche di Battaglini*, 1925, p. 132).

PUBLICATIONS ACADEMIQUES DEPUIS LA REORGANISATION, EN 1816

- Mémoires, t. I-LIV (1820-1904); in 4°.
 Mémoires couronnés et Mém. des savants étrangers, t. I-LXII (1817-1904); in-4°.
 Mémoires couronnés, t. I-LXVI (1840-1904); in-8°.
 Tables des Mémoires, nouvelle édition, 1772-1897; in-8°. — **Supplément**, 1898-1914.
 Mémoires (n. sér.) in-4° de la Classe des sciences, t. I à IX (6° fasc.).
 Mémoires (n. sér.) in-8° de la Classe des sciences, t. I à X (8° fasc.).
 Mémoires (n. sér.) in-4° de la Classe des lettres, t. I à IX.
 Mémoires (n. sér.) in-8° de la Classe des lettres, t. I à XXVII (2° fasc.).
 Mémoires in-4° de la Classe des beaux-arts, t. I.
 Mémoires in-8° de la Classe des beaux-arts, t. II.
 Tables de Logarithmes, par A. Namur et P. Mansion; in-8°.
 Annuaire, 1^{re} à 92^e année, 1835-1926; in-18. — **Table des Notices biographiques**, 1919.
 Règlements et Documents concernant les trois Classes (éd. de 1896 et de 1905); in-18.
 Statuts et Règlements, in-18, 1921.
 Fondations académiques, 1914, gr. in-8°.
 Bulletins, 1^{re} sér., t. I-XXIII, avec annexes — 2^e sér., t. I-L; — 3^e sér., t. I-XXXVI, in-8°. — Classe des sciences, 4^e sér., 1899-1910; 5^e sér., gr. in-8°, 1911-1928, t. I-XIV, avec annexes. — Classe des lettres et des sciences morales et politiques et des beaux-arts, 4^e sér., 1899-1910; 5^e sér., gr. in-8°, 1911-1928, t. I-XIV, avec annexes. — Classe des beaux-arts, t. I-X, 1919-1928. — **Tables générales**, 1832-1914, 9 vol. in-8°.
 Bibliographie académique, 1^{re} édit. (1834); — 2^e édit. (1874); — 3^e édit. (1886) — 4^e édit. (1896); — 5^e édit. (1907-1909); in-18.
 Catalogue de la Bibliothèque de l'Académie, 1^{re} partie : Sociétés savantes et périodiques; 2^e partie : sciences, lettres, arts (1881-1890); 4 vol. in-8°.
 Catalogues onomastiques des accroissements, 1883-1914, 3 vol. gr. in-8°.
 Catalogue de la bibliothèque du baron de Stassart (1863); in-8°.
 Centième anniversaire de fondation (1772-1872), 1872; 2 vol. gr. in-8°.
 L'Académie royale de Belgique depuis sa fondation (1772-1922); 1 vol. in-8°.

Monuments de la littérature flamande (in-8°).

- Œuvres de Van Maerlant : DER NATUREN BLOEME, t. 1^{er}, publié par J. Bormans, 1857, 1 vol. — RYMBYBEL, avec Glossaire, publié par J. David, 1858-1860; 3 vol. — ALEXANDERS GEESTEN, publié par Snellaert, 1860-1862; 2 vol. — *Nederlandsche gedichten*, etc., publiées par Snellaert, 1869; 4 vol. — Parthenopeus van Bloys, publié par J. Bormans, 1874; 1 vol. — *Speghel der Wysheit*, van Jan Praet, publié par J. Bormans, 1872; 1 vol.

Œuvres des grands écrivains du pays (in-8°).

- Œuvres de Chastelain, publiées par le baron Kervyn de Lettenhove, 1863-1865, 8 vol. in-8°. — Le premier livre des Chroniques de Froissart, par le même, 1863, 2 vol. — Chroniques de Jehan le Bel, par L. Polain, 1863, 2 vol. — Li Roumans de Clémades, par André Van Hasselt, 1866, 2 vol. — Dits et Contes de Jean et Baudouin de Condé, par Auguste Scheler, 1866, 3 vol. — Li ars d'amour, etc., par J. Petit, 1866-1872, 2 vol. — Œuvres de Froissart : Chroniques, par le baron Kervyn de Lettenhove, 1867-1877, 26 vol. — Poésies, par Aug. Scheler, 1870-1872, 3 vol. — Glossaire, par le même, 1874, 4 vol. — Lettres de Commynes, par Kervyn de Lettenhove, 1867, 3 vol. — Dits de Watrquet de Couvin, par A. Scheler, 1868, 4 vol. — Les Enfances Ogier, par le même, 1874, 4 vol. — Bueves de Commarchis, par Adenès li Rois, par le même, 1874, 4 vol. — Li Roumans de Bertès aux grans piés, par le même, 1874, 1 vol. — Trouvères belges du XII^e au XIV^e siècle, par le même, 1876, 4 vol. — Nouvelle série, 1879, 4 vol. — Li Bastars de Bullion, par le même, 1877, 4 vol. — Récits d'un Bourgeois de Valenciennes (XIV^e siècle), par le baron Kervyn de Lettenhove, 1877, 1 vol. — Œuvres de Ghillebert de Lannoy, par Ch. Potvin, 1878, 4 vol. — Poésies de Gilles li Muisis, par Kervyn de Lettenhove, 1882, 2 vol. — Œuvres de Jean Lemaire de Belges, par J. Stecher, 1882-1894, 4 vol. avec notice. — Li Regret Guillaume, par A. Scheler, 1882, 1 volume.

Biographie nationale.

- Biographie nationale, t. I à XXIII, Bruxelles, 1866-1922.

Commission royale d'histoire.

- Collection de Chroniques belges inédites, publiées par ordre du Gouvernement, 130 vol. in-4° Voir la liste sur la couverture des Chroniques.)
 Bulletins, 1^{re} sér., avec table (1837-1849), 17 vol. in-8°; — 2^{me} sér., avec table (1850-1859), 13 vol. in-8°; — 3^{me} sér., avec table (1860-1872), 15 vol. in-8° — 4^{me} sér., avec table (1873-1894), 8 vol. in-8°; — 5^{me} sér., t. I-XI, à partir de 1902, t. LXXI-LXXXIX;
 Annexes aux Bulletins. Voir la liste sur la couverture des Chroniques et des Bulletins.

ABONNEMENTS AUX BULLETINS

- « Classe des Sciences » : Un an : 60 fr.; un numéro simple : 5 fr.; un double : 10 fr.
 « Classe des Lettres et des Sciences morales et politiques » : Un an : 45 fr.; un numéro simple : 4 fr.; un double : 8 fr.
 « Classe des Beaux-Arts » : Un an : 15 fr.; un numéro simple : 1 50 fr.; un double : 3 fr.
 Tirage à part d'une communication : 5 fr.
 Ces prix s'entendent toutes majorations comprises et sont applicables aux années antérieures.

Marcel HAYEZ, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.