

P. 557

# BULLETIN SCIENTIFIQUE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DE

TIMIȘOARA

COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE LA  
„SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE TIMIȘOARA“



TOME 4.

FASC. 1—2.



BCU Cluj-Napoca



PMATE 2014 00832



Yma. P. 704

TIMIȘOARA

„IMPRIMERIE TIPOGRAFIA ROMANEASCĂ“

1 9 3 1

# Sur la parabole de sûreté

par

M. D. V. JONESCO

Professeur à la Faculté des Sciences de Cluj.

1. Considérons un point matériel pesant qui est lancé dans le vide d'un point  $O$ , avec la vitesse  $v_0$  faisant l'angle  $\alpha$  avec l'horizon; il décrira une parabole qui dépend de  $\alpha$ , et que nous désignons par  $P_\alpha$ . Lorsque  $\alpha$  varie, les paraboles correspondantes ont une même directrice et ont comme enveloppe une parabole, la *parabole de sûreté*, qui a son foyer au point  $O$ .

Dans cette note nous allons montrer que cette propriété n'est pas caractéristique pour les paraboles  $P_\alpha$ . Nous considérons la famille de coniques  $C_\alpha$  définie de la façon suivante.

Toutes les coniques de la famille passent par un point fixe  $O$ , ont même excentricité  $e$  et ont pour directrice une même droite  $\Delta$ . Nous allons démontrer que *l'enveloppe de ces coniques est une conique  $\Gamma$  qui a le point  $O$  pour foyer et qui a la même excentricité  $e$  que les coniques  $C_\alpha$ .*

2. Soit  $F$  le foyer de la conique  $C_\alpha$ . Démontrons que *le lieu de  $F$  lorsque  $\alpha$  varie est un cercle de centre  $O$ .*

En effet, soit  $I$  la projection de  $O$  sur  $\Delta$ . En écrivant que le point  $O$  appartient à la conique  $C_\alpha$ , nous avons

$$\frac{OF}{OI} = e,$$

ce qui prouve que la longueur  $OF$  est constante; le lieu du point  $F$  est donc le cercle de centre  $O$  et de rayon  $e \cdot OI$ .

Considérons maintenant deux coniques de la famille dont les foyers sont  $F$  et  $F'$ . Ces coniques ont un point commun, le point  $O$ . Démontrons *qu'elles se coupent encore en un point  $M$  situé sur la perpendiculaire à  $FF'$  menée par  $O$ .*

En effet en exprimant que le point  $M$  est sur la conique  $C_\alpha$  et sur la conique  $C_{\alpha'}$ , nous avons

$$\frac{MF}{MB} = e, \quad \frac{MF'}{MB} = e,$$

$B$  étant la projection de  $M$  sur  $\Delta$ . Il résulte que  $MF = MF'$  et par suite la droite  $OM$  est perpendiculaire sur  $FF'$ .

Cherchons maintenant l'intersection de la conique  $C_\alpha$  avec la conique infiniment voisine. D'après la propriété précédente, ce point sera l'intersection  $\mu$  de la droite  $OF$  avec la conique  $C_\alpha$ . Le lieu du point  $\mu$  est l'enveloppe des coniques  $C_\alpha$ .

Soient  $A$  la projection de  $\mu$  sur  $\Delta$ , et  $D$  l'intersection de  $\mu A$  avec la parallèle à  $FA$  menée par  $O$ . Nous avons

$$\frac{\mu F}{\mu A} = \frac{OF}{AD} = e.$$

On déduit que la longueur  $AD$  est constante, égale à  $\frac{OF}{e}$ , et par suite le lieu de  $D$  est une droite  $\Delta'$  parallèle à  $\Delta$ .

Mais dans le triangle  $\mu O D$ , nous avons aussi

$$\frac{\mu D}{\mu O} = \frac{\mu A}{\mu F} = e,$$

et par suite le lieu du point  $\mu$  est une conique d'excentricité  $e$  qui a un foyer au point  $O$ , et dont la directrice correspondante est la droite  $\Delta'$ .

3. Proposons nous maintenant de déterminer les coniques  $C_\alpha$  qui passent par un point donné  $M$ . Nous examinerons seulement le cas où  $C_\alpha$  sont des ellipses ou des hyperboles, le cas des paraboles étant classique.

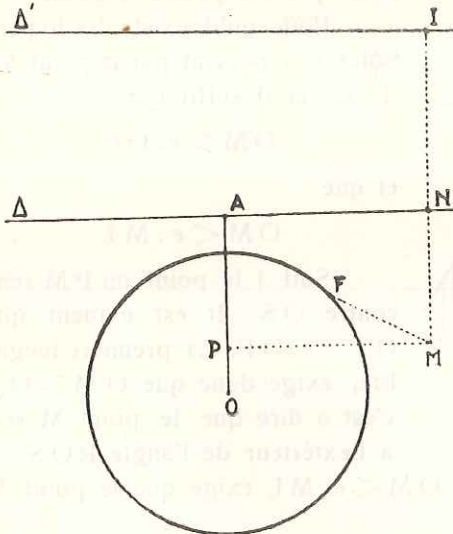


Fig. 1.

Supposons donc que les coniques  $C_\alpha$  sont des ellipses.

Soit  $N$  la projection du point  $M$  sur la directrice  $\Delta$ , et  $F$  le foyer de la conique  $C_\alpha$  qui passe par  $M$ . Nous avons

$$\frac{MF}{MN} = e,$$

et par suite le foyer  $F$  est à l'intersection du cercle de centre  $M$  et de rayon  $e$ .  $MN$  avec le cercle de centre  $O$  et de rayon  $e \cdot OA$ .

Pour que la conique  $C_\alpha$  existe, il faut que ces deux cercles se coupent. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que

$$OM > |OF - FM|, \quad OM < OF + FM.$$

On peut encore écrire ces inégalités de la façon suivante

$$OM > e \cdot |OA - MN|, \quad OM < e(OA + MN)$$

La première de ces inégalités est satisfaite quel que soit le point  $M$ . En effet soit  $P$  la projection de  $M$  sur  $OA$ . Nous avons

$$|OA - MN| = OP < OM,$$

et à fortiori

$$e \cdot OP < OM,$$

$e$  étant plus petit que l'unité.

Sur le prolongement de  $MN$  prenons  $NI = OA$ . Nous avons vu que le point  $I$  se trouve sur la droite  $\Delta'$ . La seconde inégalité devient

$$OM < e \cdot MI;$$

elle montre que le point  $M$  doit se trouver à l'intérieur de l'ellipse  $I'$ , enveloppe des ellipses  $C_\alpha$ .

Lorsque le point  $M$  est à l'extérieur de l'ellipse  $I'$ , il n'y a pas d'ellipse  $C_\alpha$  passant par  $M$ . Lorsque le point  $M$  se trouve sur  $I'$ , il y a une ellipse  $C_\alpha$  passant par  $M$  dont le foyer est sur  $OM$ . Enfin lorsque le point  $M$  est à l'intérieur de  $I'$ , il y a deux ellipses  $C_\alpha$  qui passent par  $M$ , comme nous avons vu plus haut.

4. Examinons maintenant le cas des hyperboles. Le cercle de centre  $O$  et de rayon  $e \cdot OA$  rencontre la directrice  $\Delta$  aux points  $R$  et  $S$ . Les autres notations sont les mêmes que dans le numéro précédent. L'hyperbole  $I''$ , enveloppe des hyperboles  $C_\alpha$ , passe par les points  $R$  et  $S$ .

Pour qu'il existe des hyperboles  $C_\alpha$ , passant par le point  $M$ , il faut et il suffit que

$$OM > e \cdot OP$$

et que

$$OM < e \cdot MI.$$

Soit  $J$  le point où  $PM$  rencontre  $OS$ . Il est évident que  $OJ = e \cdot OP$ . La première inégalité, exige donc que  $OM > OJ$ , c'est à dire que le point  $M$  soit à l'extérieur de l'angle  $ROS$ .

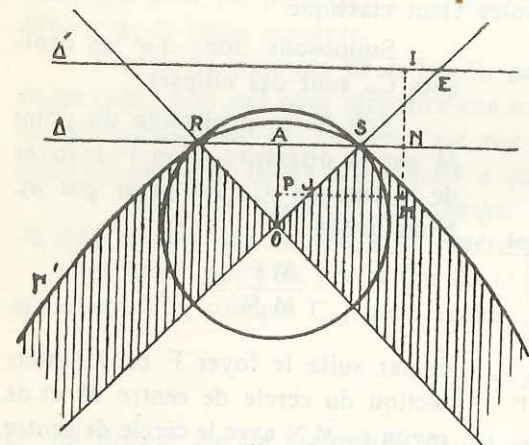


Fig. 2.

D'autre part, la seconde inégalité  $OM < e \cdot MI$ , exige que le point  $M$  soit à l'intérieur de l'hyperbole  $I''$ .

Donc, si le point  $M$  se trouve dans la région hachurée, à l'intérieur de l'hyperbole  $I''$ , mais à l'extérieur de l'angle  $ROS$ , il passera par le point  $M$  deux hyperboles  $C_\alpha$ . Lorsque le point  $M$  se trouve sur  $I''$ , à l'extérieur de l'angle  $ROS$ , il passera une seule hyperbole  $C_\alpha$  par  $M$ . Enfin lorsque le point  $M$  est à l'intérieur de  $I''$  et de l'angle  $ROS$ , il n'y a pas d'hyperbole passant par  $M$ .

5. Pour finir, remarquons que les droites  $OR$  et  $OS$  sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole  $I''$

En effet soient E et F les intersections de OS avec  $\Delta'$  et avec l'hyperbole  $I'$ . Les points E, S, O, F forment une division harmonique, et comme le point S est le milieu de OE, le point F est à l'infini. Les droites OS et OR rencontrent donc l'hyperbole  $I'$  à l'infini, elles sont donc parallèles aux asymptotes.

---