

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES ET DES QUADRIQUES,

par M. D. V. JONESCO, Professeur à la Faculté des Sciences
de Cluj (Roumanie).

I. 1. Considérons la conique (C) représentée par l'équation

$$(1) \quad x^2 + y^2 = e^2(x - a)^2$$

dans des axes coordonnés rectangulaires Ox, Oy ; elle admet donc l'axe Ox pour axe focal, le point O pour foyer, la droite d ($x = a$) pour directrice correspondante et son excentricité est égale à e .

La tangente m en un point quelconque $M(x, y)$ coupe l'axe Ox en un point T d'abscisse

$$(2) \quad OT = \frac{e^2 x(x - a)}{e^2(x - a) - x}$$

et la perpendiculaire à cette tangente au point T rencontre la droite OM en un point Q pour lequel on a, en vertu de l'équation (1),

$$(3) \quad |OQ| = \left| \frac{ea(x - a)}{e^2(x - a)^2 + y^2} \right|.$$

Il en résulte que

$$(4) \quad \left| \frac{OT}{OQ} \right| = e,$$

et ainsi, lorsque le point M décrit la conique (C), le rapport des distances OT, OQ conserve la même valeur, égale à l'excentricité de la conique.

Dans le cas particulier où la conique (C) est une parabole, $e = 1$ et on retrouve que, dans ce cas, les distances OT, OQ sont égales.

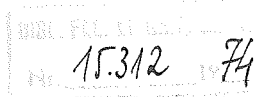
2. La propriété des coniques exprimées par la relation (4) est caractéristique pour les coniques.

En effet, si on calcule le rapport des segments OT, OQ pour la courbe $y = f(x)$, on trouve que

$$\left| \frac{OT}{OQ} \right| = \left| \frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + y^2} \right|.$$

L'équation différentielle des courbes qui jouissent de la propriété (4) est donc

$$\left| \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + y^2} \right| = e$$



et leur équation en termes finis est

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \pm e(x - a),$$

en désignant par $\mp ea$ la constante d'intégration ; ces courbes sont donc bien des coniques d'axe focal Ox , de foyer O et d'excentricité e .

3. Revenons à la conique (C) représentée par l'équation (1). Soient T' le point où la polaire m' d'un point quelconque $M'(x', y')$ pour cette conique coupe l'axe Ox et Q' le point de rencontre de la droite OM' avec la perpendiculaire au point T' à la droite m' . On trouve, par des calculs analogues à ceux qui en a fait au § 1, que

$$OT' = \frac{e^2 a(x' - a)}{e^2(x' - a) - x'}, \quad OQ'^2 = \frac{a^2(x'^2 + y'^2)}{[e^2(x' - a) - x']^2};$$

d'où,

$$(5) \quad \left(\frac{OT'}{OQ'} \right)^2 = e^2 \frac{e^2(x' - a)^2}{x'^2 + y'^2}.$$

Dès lors, si le point M' décrit la conique (C') d'équation

$$x^2 + y^2 = e'^2(x - a)^2,$$

de même foyer O et de même directrice d que la conique (C) , on a, en vertu de (5),

$$(6) \quad \left| \frac{OT'}{OQ'} \right| = \frac{e^2}{e'}.$$

Il en résulte, par application de la propriété démontrée au § 2, que l'enveloppe de la droite m' est une conique (C'') de foyer O , d'axe focal Ox et d'excentricité

$$(7) \quad e'' = \frac{e^2}{e'}.$$

Mais il est, en outre, facile de démontrer que cette troisième conique admet aussi la droite d pour directrice du foyer O . En effet, les coniques (C) , (C') rencontrant l'axe Ox aux points A , A' d'abscisses

$$\xi = \frac{ae}{1 + e}, \quad \xi' = \frac{ae'}{1 + e'},$$

il suffit de démontrer que le point A'' d'abscisse

$$\xi'' = \frac{ae''}{1 + e''},$$

sur l'axe Ox , appartient à la conique (C'') , ou encore, que ce point A'' est sur la polaire a' du point A' pour la conique (C) .

Or l'équation de la droite a' est

$$[\xi' - e^2(\xi' - a)]x + e^2a(\xi' - a) = 0$$

et on constate bien qu'elle se réduit à une identité, à cause de (7), quand on y remplace x par ξ'' .

Observons, enfin, que la relation (7), écrite

$$e^2 = e'e'',$$

n'étant pas altérée quand on y permute e' avec e'' , la conique (C') est l'enveloppe des polaires des points de la conique (C'') par rapport à la conique (C) .

Note. 1° La tangente m (§ 1) à la conique (C) au point M rencontre la directrice d au même point que la perpendiculaire au point O à la droite OM et la circonférence de diamètre MR passe par le point O et par le pied S de la perpendiculaire abaissée du point M sur la directrice d . Donc, si on prend $MU = MO$ sur MS et $MV = MS$ sur MO , la droite UV est perpendiculaire à la tangente m et les triangles MUV , OTQ étant semblables, on a

$$\left| \frac{OT}{OQ} \right| = \left| \frac{MU}{MV} \right| = \left| \frac{MO}{MS} \right| = e.$$

2° Il résulte des propriétés des figures polaires réciproques que la droite m' (§ 3) enveloppe une certaine conique (C'') qu'elle touche au pôle, pour la conique (C) , de la tangente à la conique (C') . La droite d étant la directrice du foyer O pour la conique (C) et pour la conique (C') , ces deux coniques sont bitangentes aux points d'intersection X, Y avec la droite d et les tangentes communes en ces points sont les droites isotropes OX, OY . Il suffit d'appliquer la propriété des figures polaires réciproques que l'on vient de rappeler, pour en déduire que la conique (C'') est également tangente aux points X, Y aux droites OX, OY et qu'ainsi elle admet aussi la droite d pour directrice du foyer O .

Pour établir la propriété relative aux excentricités des trois coniques (C) , (C') , (C'') , soient P le pied de la directrice d sur l'axe Ox ; A, A', A'' les sommets des trois coniques sur OP . Les points O et P , A' et A'' étant conjugués pour la conique (C) , sont conjugués dans une involution dont le point A est un point double. On a donc

$$\frac{OA' \cdot OA''}{P'A \cdot A''P} = \frac{OA^2}{AP^2} \quad \text{ou} \quad e'e'' = e^2.$$

Quant à la propriété (6), elle ne diffère plus de la propriété (4) appliquée à la conique (C'') . En effet, la droite OM' étant perpendiculaire à la droite joignant le point O au point où la droite m' coupe la droite d , le point de contact M'' de la droite m' avec la conique (C'') est sur la droite OM' ; dès lors, la propriété (4) appliquée à la conique (C'') donne

$$\left| \frac{OT'}{OQ'} \right| = e'' = \frac{e^2}{e'}.$$

(A continuer)

(AD. M.)

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES ET DES QUADRIQUES, ⁽¹⁾

par M. D. V. JONESCO,

Professeur à la Faculté des Sciences de Cluj (Roumanie).

II. 4. Les coniques (C), (C'), (C'') considérées dans ce qui précède sont bitangentes aux droites isotropes OI, OJ aux points de rencontre avec la directrice d . On va démontrer, par le calcul, que la propriété établie dans le § 3 est encore vraie, quand on remplace les droites OI, OJ par des droites quelconques.

Si A, B sont les points où la droite d d'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

coupe les axes coordonnés, il s'agit de démontrer qu'étant données deux des coniques

$$(8) \quad \Gamma \equiv \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right)^2 + 2\lambda xy = 0,$$

$$(9) \quad \Gamma' \equiv \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right)^2 + 2\lambda' xy = 0$$

qui sont tangentes aux droites Ox, Oy aux points A, B, l'enveloppe des polaires des points de la conique (Γ') par rapport à la conique (Γ) est une troisième conique

$$(10) \quad \Gamma'' \equiv \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right)^2 + 2\lambda'' xy = 0$$

tangente aux droites Ox, Oy aux points A, B et telle que

$$(11) \quad \lambda'' = \frac{\lambda^2}{\lambda'}.$$

L'équation, en coordonnées courantes (X, Y), de la polaire m' par rapport à (Γ) du point M'(x, y) de la conique (Γ') est

$$(12) \quad \left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} - 1 \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right) + \lambda(xy + yX) = 0,$$

et on a l'équation de condition

$$(13) \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right)^2 + 2\lambda' xy = 0$$

⁽¹⁾ Suite, voir M, 1932-398.

Pour en déduire l'équation de l'enveloppe de la droite m' , il faut éliminer x, y , et $y' = \frac{dy}{dx}$ entre ces deux équations (12) et (13) et leurs dérivées par rapport à x ,

$$(14) \quad \left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{y'}{b}\right) + \lambda(Y + y'X) = 0$$

et

$$(15) \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{y'}{b}\right) + \lambda'(y + y'x) = 0.$$

L'élimination de y' entre celles-ci donne

$$(13) \quad \begin{vmatrix} \left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} - 1\right)\frac{1}{a} + \lambda Y & \left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} - 1\right)\frac{1}{b} + \lambda X \\ \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)\frac{1}{a} + \lambda' y & \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)\frac{1}{b} + \lambda' x \end{vmatrix} = 0.$$

Mais si on additionne les éléments de la première colonne du déterminant, multipliés par x , à ceux de la seconde, multipliés par y , il résulte des équations (12) et (13) que les sommes obtenues valent respectivement

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} - 1 \quad \text{et} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1.$$

On a donc

$$(14) \quad \begin{vmatrix} \lambda X & \lambda Y & \frac{X}{a} + \frac{Y}{b} - 1 \\ \lambda' x & \lambda' y & \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \end{vmatrix} = 0;$$

d'où,

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} - 1\right)^2 & 2\frac{\lambda^2}{\lambda'} XY \\ \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 & 2\lambda' xy \end{vmatrix} = 0$$

et, la somme des éléments de la seconde ligne de ce déterminant étant nulle, en vertu de la condition (13) par laquelle on a exprimé que le point M' est sur la conique (Γ') , l'enveloppe de la droite m' est la conique d'équation

$$(15) \quad \left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} - 1\right)^2 + 2\frac{\lambda^2}{\lambda'} XY = 0.$$

Le théorème est donc démontré et la relation (11) étant symétrique par rapport aux paramètres λ', λ'' , la conique (Γ'') est, à son tour, l'enveloppe des polaires, par rapport à la conique (Γ') , des points de la conique (Γ'') .

5. Soit M'' le point où la droite m' touche la conique (Γ'') . Les coordonnées X, Y de ce point vérifiant les équations (14),

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ x & y \end{vmatrix} = 0$$

et le point M'' est donc sur la droite OM .

Démontrons que si P est le point où la droite $OM'M''$ coupe la droite d , le rapport anharmonique $(OPM'M'')$ conserve la même valeur lorsque les points M', M'' décrivent les coniques $(\Gamma'), (\Gamma'')$.

Calculons, d'abord, les coordonnées X, Y du point M'' en fonction de celles x, y du point M' . A cet effet, posons

$$U = \frac{X}{a} + \frac{Y}{b}, \quad u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}.$$

Les équations (14) donnent alors

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{\lambda'}{\lambda} \cdot \frac{U-1}{u-1} = \frac{U}{u}.$$

d'où il résulte que

$$U = \frac{\lambda' u}{(\lambda' - \lambda) u + \lambda},$$

et ainsi

$$(16) \quad X = \frac{\lambda' x}{(\lambda' - \lambda) u + \lambda}, \quad Y = \frac{\lambda' y}{(\lambda' - \lambda) u + \lambda}.$$

D'autre part, l'abscisse du point P étant

$$\xi = \frac{x}{u},$$

la valeur du rapport anharmonique considéré est

$$(OPM'M'') = (0, \xi, x, X) = \frac{x}{X} \cdot \frac{X - \xi}{x - \xi}.$$

Or,

$$X - \xi = \frac{\lambda(u-1)x}{u[(\lambda' - \lambda)u + \lambda]}, \quad x - \xi = \frac{u}{(u-1)x};$$

donc,

$$(OPM'M'') = \frac{\lambda}{\lambda'}.$$

6. Considérons maintenant une conique quelconque ; soient M un point arbitraire de cette conique, O un point extérieur, P le point où la droite OM coupe la polaire du point O pour la conique, et M' le point de la droite OM pour lequel le rapport anharmonique (OPMM') a une valeur constante donnée.

Il résulte de la propriété démontrée au § 5 que *le lieu du point M', lorsque le point M décrit la conique donnée, est une autre conique bitangente à la première aux points de rencontre avec la polaire du point O.*

Note. Ainsi qu'on l'a déjà dit dans la note précédente (M, 1932-400), les propriétés des coniques (Γ), (Γ'), (Γ'') sont des conséquences immédiates de la théorie des figures polaires réciproques. Quant à la propriété énoncée à la fin du § 6, on peut l'établir directement comme application de la théorie des figures homologues, le lieu du point M' étant le transformé du lieu du point M par l'homologie dont le centre, l'axe et la constante sont le point L, la polaire du point O pour la conique considérée et la valeur adoptée pour le rapport anharmonique (OPMM').

(A continuer.)

(AD. M.)

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES ET DES QUADRIQUES ⁽¹⁾,

par M. D. V. JONESCO, Professeur à la Faculté des Sciences de Cluj (Roumanie).

III. 7. Les propriétés démontrées, dans les §§ 4, 5, 6 pour les coniques, se généralisent, dans l'espace, pour les quadriques. Soient

$$(16) \quad 2\varphi(x, y, z) + \lambda P^2 = 0, \quad 2\varphi(x, y, z) + \lambda' P^2 = 0 \quad (17)$$

deux quadriques circonscrites au cône du second ordre

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

dont le sommet est l'origine, le long de l'intersection par le plan

$$P \equiv ux + vy + wz + p = 0.$$

On va démontrer que l'enveloppe des plans polaires des points de (S') par rapport à (S) est la quadrique (S'') d'équation

$$2\varphi(x, y, z) + \frac{\lambda^2}{\lambda'} P^2 = 0.$$

Soient x, y, z les coordonnées d'un point arbitraire M' de la quadrique (S'). L'équation du plan polaire μ' du point M' pour la quadrique (S) est, en coordonnées courantes X, Y, Z ,

$$(18) \quad x\varphi'_x + y\varphi'_y + z\varphi'_z + \lambda P_0 P = 0$$

où on a posé

$$P = uX + vY + wZ + p \quad \text{et} \quad P_0 = ux + vy + wz + p.$$

Considérant z comme une fonction de x et de y définie par l'équation (17), on aura l'équation de l'enveloppe du plan μ' , en éliminant x, y, z entre les équations (17), (18) et leurs dérivées partielles par rapport à x et à y , ou

$$(19) \quad \varphi'_x + \lambda u P + (\varphi'_z + \lambda w P) \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \varphi'_y + \lambda v P + (\varphi'_z + \lambda w P) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad (20)$$

$$(21) \quad \varphi'_x + \lambda' u P_0 + (\varphi'_z + \lambda' w P_0) \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \varphi'_y + \lambda' v P_0 + (\varphi'_z + \lambda' w P_0) \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (22)$$

(1) Suite, M, 1932-398 et 1933-51.

L'élimination de $\frac{\partial z}{\partial x}$ entre (19) et (21), et de $\frac{\partial z}{\partial y}$ entre (20) et (22) donne

$$\begin{vmatrix} \varphi'_x + \lambda u P & \varphi'_y + \lambda v P & \varphi'_z + \lambda w P \\ \varphi'_x + \lambda' u P_0 & \varphi'_y + \lambda' v P_0 & \varphi'_z + \lambda' w P_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais, en vertu des équations (18) et (17), les sommes

$$\begin{aligned} x(\varphi'_x + \lambda u P) + y(\varphi'_y + \lambda v P) + z(\varphi'_z + \lambda w P), \\ x(\varphi'_x + \lambda' u P_0) + y(\varphi'_y + \lambda' v P_0) + z(\varphi'_z + \lambda' w P_0) \end{aligned}$$

valent respectivement

$$-\lambda p P \quad \text{et} \quad -\lambda' p P_0.$$

On a donc

$$\begin{vmatrix} \varphi'_x + \lambda u P & \varphi'_y + \lambda v P & \varphi'_z + \lambda w P & \lambda P \\ \varphi'_x + \lambda' u P_0 & \varphi'_y + \lambda' v P_0 & \varphi'_z + \lambda' w P_0 & \lambda' P_0 \end{vmatrix} = 0$$

et, par suite,

$$(23) \quad \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi & \lambda P \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z & \lambda' P_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Or, il résulte des propriétés des formes quadratiques et de (18) que

$$\begin{vmatrix} X\varphi'_x + Y\varphi'_y + Z\varphi'_z & 2\varphi(X, Y, Z) & 2\varphi(X, Y, Z) \\ X\varphi'_x + Y\varphi'_y + Z\varphi'_z & x\varphi'_x + y\varphi'_y + z\varphi'_z & -\lambda P_0 P \end{vmatrix} = 0.$$

Donc, à cause de (23),

$$\begin{vmatrix} \lambda P & 2\varphi(X, Y, Z) \\ \lambda' P_0 & -\lambda P P_0 \end{vmatrix} = 0$$

et l'enveloppe du plan μ' est la quadrique

$$2\varphi(X, Y, Z) + \frac{\lambda^2}{\lambda'} P^2 = 0.$$

ou (S").

La relation

$$\lambda' \lambda'' = \lambda^2$$

liant les paramètres λ , λ' , λ'' des quadriques (S), (S'), (S") n'étant pas altérée quand on y permute λ' avec λ'' , la quadrique (S') est l'enveloppe des plans polaires des points de (S") par rapport à (S).

8. Soient M" le point de contact du plan μ' avec la quadrique (S") et I le point où la droite OM' coupe le plan P = 0. On va démontrer que les points O, M', M" sont en ligne droite et le rapport anharmonique (OIM'M") conserve la même valeur quand le point M' décrit la quadrique (S'), dans le cas où le cône φ est un cône non dégénéré.

Soit

$$\varphi(x, y, z) \equiv ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0$$

l'équation du cône φ .

En désignant par k la valeur commune des rapports (23) des dérivées partielles de φ , on a

$$\begin{aligned} a(X - kx) + b''(Y - ky) + b'(Z - kz) &= 0, \\ b''(X - kx) + a'(Y - ky) + b(Z - kz) &= 0, \\ b'(X - kx) + b(Y - ky) + a''(Z - kz) &= 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de la forme quadratique $\varphi(x, y, z)$ n'étant pas nul, il résulte des trois équations précédentes que

$$X - kx = 0, \quad Y - ky = 0, \quad Z - kz = 0.$$

On a donc

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = k,$$

ce qui prouve déjà que les points O, M', M" sont en ligne droite.

D'autre part, si on pose

$$uX + vY + wZ = L \quad \text{et} \quad ux + vy + wz = l$$

les équations (23) peuvent s'écrire

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{\lambda(L + p)}{\lambda'(l + p)} = \frac{L}{l},$$

d'où on tire

$$L = \frac{\lambda p l}{(\lambda' - \lambda)l + p\lambda'}, \quad X = \frac{p\lambda x}{(\lambda' - \lambda)l + p\lambda'}.$$

Or, la valeur R du rapport anharmonique (OIMM") est, si ξ est l'abscisse de point I,

$$R = (OIM'M'') = (0, \xi, x, X) = \frac{X}{x} \cdot \frac{x - \xi}{X - \xi},$$

où on doit faire

$$\xi = -\frac{px}{l}, \quad X - \xi = \frac{\lambda'(l + p)px}{l[(\lambda' - \lambda)l + p\lambda']}, \quad x - \xi = \frac{x(l + p)}{l};$$

on a donc

$$R = \frac{\lambda'}{\lambda},$$

ce qui prouve que le rapport anharmonique (OIM'M'') a une valeur constante.

9. Considérons maintenant une quadrique arbitraire (S) et menons, par un point arbitraire O, une sécante quelconque qui coupe la quadrique en M et le plan polaire du point O pour cette quadrique en un point I ; enfin, sur la droite OM, marquons le point M' de manière que le rapport anharmonique (OIMM') ait une valeur constante. Il résulte du théorème démontré au § 8 que le lieu du point M' est une seconde quadrique (S') circonscrite à la quadrique (S) suivant l'intersection avec le plan polaire du point O.

NOTE De même que dans le cas des coniques, les propriétés des quadriques (S), (S'), (S'') sont des conséquences des propriétés des figures polaires réciproques par rapport à la quadrique (S) et de la théorie des figures homologues. (AD. M.)

