PUBLICAŢIILE INSTITUTULUI DE CERCETĂRI ŞTIINŢIFICE
AL REPUBLICEI POPULARE ROMÂNE

DISQUISITIONES MATHEMATICAE ET PHYSICAE

TOMUS VI

FASC. 1—4

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ, BUCUREŞTI 1948

SUR UNE ÉQUATION DE RÉCURRENCE À DEUX INDICES

PAR

D. V. IONESCO

Maurice d'Ocagne a étudié dans un Mémoire de l'*American Journal*[1]) les nombres K_m^p définis par la relation de récurrence à deux indices

$$(1) \qquad K_m^p = p\, K_{m-1}^p + K_{m-1}^{p-1}$$

où les indices m et p sont des nombres entiers positifs, et par les conditions

$$(2) \qquad K_m^1 = 1 \ , \ K_m^m = 1$$

pour $m = 1, 2, \ldots$

On a démontré que l'expression de K_m^p est

$$(3) \qquad K_m^p = \frac{p^m - C_p^1 (p-1)^m + C_p^2 (p-2)^m - \ldots + (-1)^{p-1} C_p^{p-1} 1^m}{p\,!}$$

et on a fait plusieurs applications de ces nombres à l'analyse.

Maurice d'Ocagne a considéré aussi l'équation

$$(4) \qquad K_m^p(\alpha) = (p + \alpha - 1)\ K_{m-1}^p(\alpha) + K_{m-1}^{p-1}(\alpha)$$

où α est un paramètre quelconque, avec les conditions

$$(4') \qquad K_m^1(\alpha) = \alpha^{m-1} \ , \ K_m^m(\alpha) = 1$$

Il a remarqué aussi une liaison entre ces nombres $K_m^p(\alpha)$ et les nombres K_m^p.

L'équation (4) et les conditions (4') se présentent comme une généralisation de l'équation (1) et des conditions (2), qu'on obtient pour $\alpha = 1$.

---

[1]) *Sur une classe de nombres remarquables*, Tome IX, 1887, p. 353.

Dans ce travail, nous allons dans la première partie généraliser l'équation (1), et dans la seconde partie nous allons traiter quelques proplèmes généraux sur cette équation.

I. GÉNÉRALISATION DE L'ÉQUATION (1)

1. Considérons une fonction quelconque $Y(x)$ et posons

$$Y_1 = \frac{d}{dx}(x^{1+\lambda+\mu}\, Y) \tag{5}$$

où λ et μ sont deux constantes quelconques.

Posons ensuite

$$Y_i = \frac{d}{dx}(x^{1+\lambda}\, Y_{i-1}) \tag{6}$$

pour $i \geqslant 2$.

En faisant les premiers calculs, nous aurons

$$Y_1 = x^{\lambda+\mu}\,[(\lambda+\mu+1)\; Y + x\, Y']$$

$$Y_2 = x^{2\lambda+\mu}\,[(\lambda+\mu+1)\;(2\lambda+\mu+1)\; Y + (3\lambda+2\mu+3)\; x\, Y' + x^2 Y'']$$

En général, nous aurons

$$Y_{n-1} = x^{(n-1)\,\lambda+\mu}\,[A_n^1\; Y + A_n^2\, xY' + A_n^3\, x^2\, Y'' + \ldots + A_n^n\, x^{n-1}\; Y^{(n-1)}] \tag{7}$$

où les A_n^p sont des coefficients à déterminer.

En écrivant que

$$Y_n = \frac{d}{dx}(x^{1+\lambda}\, Y_{n-1}),$$

c'est-à- dire

$$Y_n = \frac{d}{dx}\,[A_n^1\, x^{n\lambda+\mu+1}\; Y + A_n^2\, x^{n\lambda+\mu+2}\; Y' + \ldots + A_n^n\, x^{n\lambda+\mu+n}\; Y^{(n-1)}]$$

nous aurons

$$Y_n = x^{n\lambda+\mu}\left\{\begin{array}{l}(n\lambda+\mu+1)\, A_n^1\; Y + [(n\lambda+\mu+2)\, A_n^2 + A_1^n]\; xY^1 + \ldots \\ + [(n\lambda+\mu+n)\, A_n^n + A_n^{n-1}]\; x^{n-1}\; Y^{(n-1)} + A_n^n\, x^n Y^{(n)}\end{array}\right\}$$

En identifiant cette expression avec

$$Y_n = x^{n\lambda+\mu}\,[A_{n+1}^1\; Y + A_{n+1}^2\;\, x\, Y' + \ldots + A_{n+1}^{n+1}\, x^n\; Y^{(n)}]$$

on trouve la relation de récurrence

$$\boxed{A_{n+1}^p = (n\lambda+\mu+p)\; A_n^p + A_n^{p-1}} \tag{8}$$

à laquelle satisfont les coefficients A_n^p, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, et les relations

$$A_{n+1}^1 = (n\lambda+\mu+1)\; A_n^1\,, \quad A_{n+1}^{n+1} = A_n^n$$

Tenant compte que

$$A_2^1 = \lambda + \mu + 1, \quad A_2^2 = 1,$$

il résulte que

$$(9) \qquad \boxed{\begin{array}{c} A_{n+1}^1 = (\lambda + \mu + 1)(2\lambda + \mu + 1)\dots(n\lambda + \mu + 1) \\ A_{n+1}^{n+1} = 1. \end{array}}$$

C'est l'équation (8), qui fera l'objet de notre travail: elle généralise l'équation (1).

Nous allons d'abord déterminer les coefficients A_n^p en fonction de λ et de μ, satisfaisant à l'équation (8) et aux conditions (9).

2. Les coefficients A_n^p étant indépendants de la fonction Y, nous allons choisir la fonction auxiliaire

$$Y = (1 - x)^{p-1}$$

Nous aurons d'après la formule (7)

$$Y_{n-1} = x^{(n-1)\lambda+\mu} [A_n^1 (1 - x)^{p-1} - (p-1) A_n^2 x (1 - x)^{p-2} + \dots$$
$$+ (-1)^{p-1} (p-1)(p-2) \dots (p-n+1) A_n^n x^{n-1} (1 - x)^{p-n}]$$

lorsque $n < p$, et

$$Y_{n-1} = x^{(n-1)\lambda+\mu} [A_n^1 (1 - x)^{p-1} - (p-1) A_n^2 x (1 - x)^{p-2} + \dots$$
$$+ (-1)^{p-1} (p-1)(p-2) \dots 1. A_n^p x^{p-1}]$$

lorsque $n \geqslant p$.

Il résulte de ces formules que

$$(10) \qquad Y_{n-1}(1) = 0,$$

si $n < p$, et

$$(10) \qquad Y_{n-1}(1) = (-1)^{p-1} (p-1)! \ A_n^p$$

si $n \geqslant p$.

D'autre part, nous pouvons déterminer directement les fonctions $Y_{n-1}^{(x)}$. Nous avons

$$Y = 1 - C_{p-1}^1 x + C_{p-1}^2 x^2 \dots + (-1)^{p-1} C_{p-1}^{p-1} x^{p-1},$$

et en appliquant les formules (5) et (6), nous aurons

$$Y_1 = x^{\lambda+\mu} [(\lambda + \mu + 1) - (\lambda + \mu + 2) C_{p-1}^1 x + (\lambda + \mu + 3) C_{p-1}^2 x^2 - \dots$$
$$+ (-1)^{p-1} (\lambda + \mu + p) C_{p-1}^{p-1} x^{p-1}]$$

$$Y_2 = x^{2\lambda+\mu} [(\lambda + \mu + 1)(2\lambda + \mu + 1) - (\lambda + \mu + 2)(2\lambda + \mu + 2) C_{p-1}^1 x + \dots$$
$$+ (-1)^{p-1} (\lambda + \mu + p)(2\lambda + \mu + p) C_{p-1}^{p-1} x^{p-1}]$$

En posant

$$(11)\qquad \boxed{\varphi_{n-1}(k) = (\lambda+\mu+k)(2\lambda+\mu+k)\ldots[(n-1)\lambda+\mu+k]}$$

nous aurons en général

$$Y_{n-1}(x) = x^{(n-1)\lambda+\mu}\,[\varphi_{n-1}(1) - C^1_{p-1}\,\varphi_{n-1}(2)\,x + C^2_{p-1}\,\varphi_{n-1}(3)\,x^2 - \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1}\,C^{p-1}_{p-1}\,\varphi_{n-1}(p)\,x^{p-1}]$$

et par suite

$$(12)\qquad Y_{n-1}(1) = \varphi_{n-1}(1) - C^1_{p-1}\,\varphi_{n-1}(2) + C^2_{p-1}\,\varphi_{n-1}(3) - \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1}\,C^{p-1}_{p-1}\,\varphi_{n-1}(p)$$

En identifiant les formules (10) et (12), nous déduisons que

$$(13)\qquad \boxed{\varphi_{n-1}(1) - C^1_{p-1}\varphi_{n-1}(2) + C^2_{p-1}\varphi_{n-1}(3) - \ldots + (-1)^{p-1}C^{p-1}_{p-1}\varphi_{n-1}(p) = 0}$$

lorsque $n < p$, et

$$(14)\qquad \boxed{A^p_n = \frac{\varphi_{n-1}(p) - C^1_{p-1}\varphi_{n-1}(p-1) + C^2_{p-1}\varphi_{n-1}(p-2) - \ldots + (-1)^{p-1}C^{p-1}_{p-1}\varphi_{n-1}(1)}{(p-1)!}}$$

lorsque $n \geqslant p$.

Nous avons ainsi déterminé les coefficients A^p_n. Remarquons que la formule (14) généralise la formule (3), donnée par Maurice d'Ocagne. On obtient en effet l'équation de récurrence (1), les conditions (2) ainsi que la formule (3), en ferisant $\lambda = \mu = 0$, dans l'équation de récurrence (8), dans les conditions (9) et dans la formule (14).

Nous allons maintenant déduire des formules (13) et (14) certaines identités, dont nous aurons besoin dans la seconde partie de ce travail.

3. En faisant dans la formule (14) $p = n$, et en échangeant ensuite n en $n+1$, nom aurons l'identité

$$(15)\qquad \boxed{n\,! = \varphi_n(n+1) - C^1_n\,\varphi_n(n) + C^2_n\,\varphi_n(n-1) - \ldots + (-1)^n C^n_n\,\varphi_n(1)}$$

qui se ramène au fond à l'identité bien connue

$$n\,! = (n+1)^n - C^1_n\,n^n + C^2_n\,(n-1)^n - \ldots + (-1)^n C^n_n\,1^n.$$

Dans la formule (15), remplaçons λ et μ par $\frac{\lambda}{\sigma}$ et $\frac{\mu}{\sigma}$ et réduisons ensuite au même dénominateur; nous aurons

$$
\begin{aligned}
(16)\qquad n\,!\,\sigma^n = {} & [\lambda + (n+1)\sigma + \mu][2\lambda + (n+1)\sigma + \mu] \\
& \ldots [n\lambda + (n+1)\sigma + \mu] - C_n^1 [\lambda + n\sigma + \mu][2\lambda + n\sigma + \mu] \\
& \ldots [n\lambda + n\sigma + \mu] + \ldots + (-1)^n C_n^n (\lambda + \sigma + \mu)(2\lambda + \sigma + \mu) \\
& \ldots (n\lambda + \sigma + \mu).
\end{aligned}
$$

En introduisant la notation abrégée

$$
(17)\qquad \boxed{P\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \gamma\Big) = (p\lambda + r\sigma + \mu)\,[(p+1)\lambda + r\sigma + \mu] \ldots [q\lambda + r\sigma + \gamma]}
$$

et en remplaçant dans la formule (16) μ par $\mu + (k-1)\sigma + k\lambda$, k étant un entier, nous aurons l'identité

$$
(18)\qquad \boxed{\begin{aligned}
n\,!\,\sigma^n = {} & P\left(\begin{matrix} k+n \\ k+ \end{matrix},\ k+n\right) - C_n^1 P\left(\begin{matrix} k+n \\ k+ \end{matrix},\ k+n-1\right) + \ldots \\
& + (-1)^n C_n^n P\left(\begin{matrix} k+n \\ k+ \end{matrix},\ k\right)
\end{aligned}}
$$

De même en remplaçant dans la formule (16) μ par $\mu - \lambda + (k-1)\sigma$, k étant un entier, nous aurons l'identité

$$
(19)\qquad \boxed{\begin{aligned}
n\,!\,\sigma^n = {} & P\left(\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix},\ n+k\right) - C_n^1 P\left(\begin{matrix} n- \\ 0 \end{matrix},\ n+k-1\right) + \ldots \\
& + (-1)^n C_n^n P\left(\begin{matrix} n- \\ 0 \end{matrix},\ k\right)
\end{aligned}}
$$

Dans l'identité (13) augmentons d'une unité les entiers n et p et remplaçons ensuite ces entiers par s et r; nous aurons

$$
\begin{aligned}
& (\lambda + r + 1 + \mu)(2\lambda + r + 1 + \mu) \ldots (s\lambda + r + 1 + \mu) \\
& \quad - C_r^1 (\lambda + r + \mu)(2\lambda + r + \mu) \ldots (s\lambda + r + \mu) + \ldots \\
& \quad + (-1)^r C_r^r (\lambda + 1 + \mu)(2\lambda + 1 + \mu) \ldots (s\lambda + 1 + \mu) = 0.
\end{aligned}
$$

Remplaçons maintenant λ et μ par $\frac{\lambda}{\sigma}$ et $\frac{\mu}{\sigma}$; nous aurons

$$
\begin{aligned}
& [\lambda + (r+1)\sigma + \mu][2\lambda + (r+1)\sigma + \mu] \ldots [s\lambda + (r+1)\sigma + \mu)] \\
& \quad - C_r^1 (\lambda + r\sigma + \mu)(2\lambda + r\sigma + \mu) \ldots (s\lambda + r\sigma + \mu) + \ldots \\
& \quad + (-1)^r C_r^r (\lambda + \sigma + \mu)(2\lambda + \sigma + \mu) \ldots (s\lambda + \sigma + \mu) = 0.
\end{aligned}
$$

Si nous remplaçons enfin dans cette formule μ par $\mu + k\lambda + (k-1)\sigma$, k étant un entier, et si nous utilisons la notation (17), nous pouvons écrire l'identité

$$
\boxed{\begin{aligned} & P\binom{k+s}{k+1},\; k+r\Big) - C_r^1\, P\binom{k+s}{k+1},k+r-1\Big) + \dots \\ & \quad + (-1)^r\, C_r^r\, P\binom{k+s}{k+1},\; k\Big) = 0 \end{aligned}} \tag{20}
$$

valable pour $s < r$.

Dans la suite nous utiliserons les identités (18), (19) et (20).

II. QUELQUES PROBLÈMES SUR L'ÉQUATION DE RÉCURRENCE À DEUX INDICES

$$A_{n+1}^p = (n\lambda + p\sigma + \mu)\, A_n^p + A_n^{p-1}$$

4. En introduisant un nouveau paramètre σ, nous généraliserons encore l'équation (8), en considérant l'équation de récurrence à deux indices

$$\boxed{A_{n+1}^p = (n\lambda + p\sigma + \mu)\, A_n^p + A_n^{p-1}} \tag{1}$$

Pour $\sigma = 1$, cette équation se réduit à l'équation (8) de la première partie. Dans l'équation (1), λ, σ et μ sont des constantes données.

Nous traiterons deux problèmes généraux sur cette équation.

a) *Déterminer la solution de l'équation* (1), *connaissant les valeurs de* A_n^p *pour les indices* (n, o), (p, p) *où* $p = 1, 2, \dots$ et $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

b) *Déterminer la solution de l'équation* (1), *connaissant les valeurs de* A_n^p *pour les indices* (n, o), (o, p) *où* $p = 1, 2, \dots$ et $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Pour cela, étant donné le caractère linéaire de l'équation (1), il suffira de résoudre les problèmes élémentaires suivants.

Premier problème. Déterminer la solution de l'équation (1), sachant que

$$A_k^k = 1$$

$$A_p^p = 0 \qquad \text{pour} \qquad p \neq k$$

et

$$A_n^0 = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Second problème. Déterminer la solution de l'équation (1), sachant que

$$A_0^k = 1$$

$$A_0^p = 0 \qquad \text{pour} \qquad p \neq k.$$

et

$$A_n^0 = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Troisième problème. Déterminer la solution de l'équation (1), sachant que

$$A_0^0 = 1.$$
$$A_0^p = 0 \qquad \text{pour} \qquad p = 1,\ 2,\ \dots$$

et

$$A_n^0 = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$$

Quatrième problème. Déterminer la solution de l'équation (1), sachant que

$$A_0^0 = 1$$
$$A_p^p = 0 \qquad \text{pour} \qquad p = 1,\ 2,\ \dots$$

et

$$A_n^0 = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$$

Cinquème problème. Déterminer la solution de l'équation (1), sachant que

$$A_k^0 = 1 \qquad \text{pour} \qquad k \neq 0$$
$$A_n^0 = 0 \qquad \text{pour} \qquad n \neq k,$$

k étant un nombre entier positif ou négatif, et

$$A_0^p = 0 \qquad \text{pour} \qquad p = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

Sixième problème. Déterminer la solution de l'équation (1), sachant que

$$A_k^0 = 1 \qquad \text{pour} \qquad k \neq 0$$
$$A_n^0 = 0 \qquad \text{pour} \qquad n \neq k,$$

k étant un nombre entier positif ou négatif, et

$$A_p^p = 0 \qquad \text{pour} \qquad p = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

Premier problème

5. Nous allons déterminer la solution de l'équation

$$(1) \qquad A_{n+1}^p = (n\lambda + p\sigma + \mu)\, A_n^p + A_n^{p-1}$$

satisfaisant aux conditions suivantes

$$A_k^k = 1$$
$$A_p^p = 0 \qquad \text{pour} \qquad p \neq k$$

et

$$A_n^0 = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$$

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons cette solution par $u_{n,\,p}$. Il est évident que si $p < k$, nous avons

$$(2) \qquad u_{n,\,p} = 0,$$

quelque soit n.

Dans l'équation

$$(1') \qquad u_{n+1,\,p} = (n\sigma + p\sigma + \mu)\, u_{n,\,p} + u_{n,\,p-1}$$

faisons $p = k$ nous aurons

$$u_{n+1,\,k} = (n\lambda + k\sigma + \mu)\ u_{n,\,k}$$

et tenant compte que $u_{k\,.\,k} = 1$, il résulte que

$$(3) \quad u_{n+1,\,k} = (k\lambda + k\sigma + \mu)\,[(k+1)\,\lambda + k\sigma + \mu)\ldots[n\lambda + k\sigma + \mu]$$

ou bien, en utilisant la notation abrégée (17) de la première partie

$$(3') \qquad \boxed{u_{n+1,\,k} = P\binom{n}{k},\ k)}\,.$$

En faisant dans l'équation (1') $p = k + 1$, nous aurons

$$u_{n+1,\,k+1} = [n\lambda + (k+1)\,\sigma + \mu\, u_{n,\,k+1} + u_{n,\,k}\,.$$

En remplaçant n par $k + 1$, nous déduisons que

$$u_{k+2,\,k+1} = u_{k+1,\,k}$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad u_{k+2,\,k+1} = k\lambda + k\sigma + \mu$$

En utilisant l'identité

$$1\,!\ \sigma = P\left(\binom{k+1}{k+1},\ k+1\right) - P\left(\binom{k+1}{k+1},\ k\right)$$

nous pouvons écrire la formule (4) sous la forme

$$(4') \quad u_{k+2,\,k+1} = (k\lambda + k\sigma + \mu)\,\frac{P\left(\binom{k+1}{k+1},\,k+1\right) - P\left(\binom{k+1}{k+1},\ k\right)}{1\,!\,\sigma}$$

et nous allons prouver que

$$(5) \quad \boxed{u_{n+1,\,k+1} = (k\lambda + k\sigma + \mu)\,\frac{P\left(\binom{n}{k+1},\,k+1\right) - P\left(\binom{n}{k+1},\ k\right)}{1\,!\,\sigma}}\,.$$

En effet, cette formule est vraie pour $n = k + 1$, parcequ'elle coincide avec la formule (4'); nous allons supposer qu'elle est vraie pour l'indice $n + 1$, et nous la demontrerons pour l'indice $n + 2$.

Nous aurons d'après l'équation (1')

$$u_{n+2,\,k+1} = [(n+1)\,\lambda + (k+1)\,\sigma + \mu]\ u_{n+1,\,k+1} + u_{n+1,\,k}$$

et utilisant les formules (3) et (5), nous pouvons écrire

$$u_{n+2,\,k+1} = (k\lambda + k\sigma + \mu)$$

$$\left\{[(n+1)\,\lambda + (k+1)\,\sigma + \mu]\,\frac{P\left(\binom{n}{k+1},\,k+1\right) - P\left(\binom{n}{k+1},\ k\right)}{1\,!\,\sigma} + P\left(\binom{n}{k+1},\ k\right)\right\}$$

c'est-à-dire

$$u_{n+2,\,k+1} = (k\lambda + k\sigma + \mu)\,\frac{[(n+1)\lambda + (k+1)\sigma + \mu]\, P\binom{n}{k+1}, k+1\Big) - [(n+1)\lambda + k\sigma + \mu]\, P\binom{n}{k+1}, k\Big)}{1 \,!\, \sigma}$$

Mais

$$[(n+1)\lambda + k\sigma + \mu]\, P\left(\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix}, k\right) = P\left(\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix}, k\right)$$

et

$$[(n+1)\lambda + (k+1)\sigma + \mu]\, P\left(\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix}, k+1\right) = P\left(\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix}, k+1\right)$$

de sorte que

$$u_{n+2,\,k+1} = (k\lambda + k\sigma + \mu)\,\frac{P\left(\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix}, k+1\right) - P\left(\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix}, k\right)}{1\,!\,\sigma}$$

Cette formule étant identique à la formule (5), où l'on remplace n par $n+1$, prouve que la formule (5), est générale.

La formule (5) nous servira maintenant pour démonter qu'en général, nous avons pour $n \geqslant k + r$

$$(6) \quad \boxed{u_{n+1,\,k+r} = (k\lambda + k\sigma + \mu)\,\frac{P\left(\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix}, k+r\right) - C_r^1\, P\left(\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix}, k+r-1\right) + \ldots + (-1)^r C_r^r\, P\left(\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix}, k\right)}{r\,!\,\sigma^r}}$$

6. En faisant $n = p$ dans l'équation (1'), nous avons

$$u_{p+1,p} = (p\lambda + p\sigma + \mu)\, u_{p,\,p} + u_{p,\,p-1}$$

et comme $u_{p,\,p} = 0$, $(p > k)$, nous aurons

$$u_{p+1,p} = u_{p,p-1} = \ldots = u_{k+2,k+1}\,;$$

c'est à dire, d'après la formule (4)

$$u_{p+1,p} = k\lambda + k\sigma + \mu,$$

et remplaçant p par $k + r$, nous pouvons écrire

$$(7) \qquad u_{k+r+1,\,k+r} = k\lambda + k\sigma + \mu$$

Utilisons maintenant l'identité (18) de la première partie, à savoir

$$r\,!\,\sigma^r = P\left(\begin{matrix} k+r \\ k+1 \end{matrix}, k+r\right) - C_r^1\, P\left(\begin{matrix} k+r \\ k+1 \end{matrix}, k+r-1\right) + \ldots$$
$$+ (-1)^r C_r^r\, P\left(\begin{matrix} k+r \\ k+1 \end{matrix}, k\right).$$

Nous pouvons alors écrire la formule (7), sous la forme

(7′) $$u_{k+r+1,\,k+r} =$$
$$\frac{(k\lambda+k\sigma+\mu)\, P\begin{pmatrix}k+r \\ k+\end{pmatrix}, k+r\Big) - C_r^1\, P\begin{pmatrix}k+r \\ k+\end{pmatrix}, k+r-1\Big) + \ldots + (-1)^r C_r^r\, P\begin{pmatrix}k+r \\ k+\end{pmatrix}, k\Big)}{r\,!\,\sigma^r}$$

et nous démontrerons qu'en général, nous avons

(6) $$u_{n+1,\,k+r} =$$
$$\frac{(k\lambda+k\sigma+\mu)\, P\begin{pmatrix}n \\ k+1\end{pmatrix}, k+r\Big) + C_r^1\, P\begin{pmatrix}n \\ k+1\end{pmatrix}, k+r-1\Big) + \ldots + (-1)^r C_r^r\, P\begin{pmatrix}n \\ k+1\end{pmatrix}, k\Big)}{r\,!\,\sigma^r}$$

La formule (7′) est vraie quelque soit r, et la formule (6) a été démontrée pour $r = 1$ et quelque soit n. Pour montrer que que la formule (6) est générale, nous supposerons qu'elle est vraie pour l'indice $r - s$ et quel que soit n, et nous démontrerons qu'elle est aussi vraie pour l'indice r et quel que soit n.

Puisque la formule (6) coincide avec la formule (7′) pour $n = k + r$, nous supposerons la formule (6) vraie pour l'indice $n + 1$, et nous démontrerons que la formule donnant $u_{n+2,\,k+r}$ est de la même forme que la formule (6).

En effet nous avons

$$u_{n+2,k+r} = [(n+1)\,\lambda + (k+r)\,\sigma + \mu]\, u_{n+1,\,k+r} + u_{n+1,\,k+r-1}\quad .$$

et par suite

$$u_{n+2,k+r} = (k\lambda + k\sigma + \mu)\Bigg\{[(n+1)\,\lambda + (k+r)\sigma + \mu]$$
$$\frac{P\begin{pmatrix}n \\ k+1\end{pmatrix}, k+r\Big) - C_r^1\, P\begin{pmatrix}n \\ k+1\end{pmatrix}, k+r-1\Big) + \ldots + (-1)^r C_r^r\, P\begin{pmatrix}n \\ k+1\end{pmatrix}, k\Big)}{r\,!\,\sigma^r}$$
$$+\frac{P\begin{pmatrix}n \\ k+1\end{pmatrix}, k+r-1\Big) - C_{r-1}^1\, P\begin{pmatrix}n \\ k+1\end{pmatrix}, k+r-2\Big) + \ldots + (-1)^{r-1} C_{r-1}^{r-1}\, P\begin{pmatrix}n \\ k+1\end{pmatrix}, k\Big)}{(r-1)\,!\,\sigma^{r-1}}\Bigg\}$$

c'est à dire

$$u_{n+2,\,k+r} = \frac{k\sigma + k\sigma + \mu}{r\,!\,\sigma^r}\Bigg\{[(n+1)\,\lambda + (k+r)\,\sigma + \mu]\, P\begin{pmatrix}n \\ k+1\end{pmatrix}, k+r\Big)$$
$$- C_r^1\,[(n+1)\,\lambda + (k+r-1)\,\sigma + \mu)\, P\begin{pmatrix}n \\ k+\end{pmatrix}, k+r-1\Big)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (-1)^r\, C_r^r\,[(n+1)\,\lambda + k\sigma + \mu]\, P\begin{pmatrix}n \\ k+1\end{pmatrix}, k\Big)\Bigg\}$$

Mais

$$[(n+1)\lambda + (k+r)\sigma + \mu]\, P\binom{n}{k+1}, k+r\Big) = P\Big(\binom{n+1}{k+1}, k+r\Big)$$

$$[(n+1)\lambda + (k+r-1)\sigma + \mu]\, P\Big(\binom{n}{k+1}, k+r-1\Big) = P\Big(\binom{n+1}{k+1}, k+r-1\Big)$$

. . . .

de sorte que

$$u_{n+2,\,k+r} = (k\lambda + k\sigma + \mu)$$

$$\frac{P\Big(\binom{n+1}{k+1}, k+r\Big) - C_r^1 P\Big(\binom{n+}{k-1}, k+r-1\Big) + \ldots + (-1)^r C_r^r P\Big(\binom{n+1}{k+1}, k\Big)}{r!\,\sigma^r}$$

ce qui prouve que la formule (6) est générale.

7. La formule (6) donne la solution $u_{n+1,\,k+r}$ de notre problème pour $n \geqslant k + r$. Nous allons examiner maintenant le cas ou $n < k + r$.

Il est d'abord evident à cause des conditions

$$u_{k+r,\,k-r} = 0 \qquad \text{pour } r = 1, 2, \ldots$$

que

$$\boxed{u_{k+s+1,\,k+r} = 0} \tag{8}$$

pour $s = 0, 1, 2, \ldots, r-1$.

On peut considérer que la formule (6) est valable à partir de $n = k$, parceque pour $n = k + s$ où $s < r$, le second membre de la formule (6) est nul, d'après les identités (20) de la première partie, ce qui est en accord avec les formules (8).

Nous donnerons maintenant une formule pour $u_{n,\,k+r}$ pour $n \leqslant k$.

Faisons $n = k$ dans l'équation (1'), ce qui nous donnera

$$u_{k+1,\,p} = (k\lambda + p\lambda + \mu)\, u_{k,\,p} + u_{k,\,p-1}$$

et donnons ensuite à p les valeurs $k+1, k+2, \ldots, k+r$. Le premier membre étant nul, nous aurons les équations

$$[k\lambda + (k+1)\sigma + \mu]\, u_{k,\,k+1} + 1 = 0$$
$$[k\lambda + (k+2)\sigma + \mu]\, u_{k,\,k+2} + u_{k,\,k+1} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[k\lambda + (k+r)\sigma + \mu]\, u_{k,\,k+r} + u_{k,\,k-r-1} = 0,$$

qui nous donnerons

$$u_{k,\,k+r} = \frac{(-1)^r}{[k\lambda + (k+1)\sigma + \mu][k\lambda + (k+2)\sigma + \mu)\ldots[k\lambda + (k+r)\sigma + \mu]}$$

on bien

$$u_{k,\,k+r} = (k\lambda + k\sigma + \mu)\,\frac{(-1)^r}{(k\lambda + k\sigma + \mu)\,[k\lambda + (k+1)\sigma + \mu)\ldots[k\lambda + (k+r)\sigma + \mu]}$$

Utilisant une identité connue, nous pouvons écrire

$$(9)\quad u_{k,\,k+r}=\frac{k\lambda+k\sigma+\mu}{r!\,\sigma^r}\left[\frac{1}{k\lambda+(k+r)\sigma+\mu}-\frac{C_r^1}{k\lambda+(k+r-1)\sigma+\mu}+\ldots+(-1)^r\frac{C_r^r}{k\lambda+k\sigma+\mu}\right]$$

et nous allons démontrer qu'en général, nous avons

$$(10)\quad \boxed{u_{k-s,\,k+r}=\frac{k\lambda+k\sigma+\mu}{r\,.\,\sigma^r}\left[\frac{1}{P\left(\begin{matrix}k\\k-s\end{matrix},k+r\right)}-\frac{C_r^1}{P\left(\begin{matrix}k\\k-s\end{matrix},k+r-1\right)}+\ldots+(-1)^r\frac{C_r^r}{P\left(\begin{matrix}k\\k-s\end{matrix},k\right)}\right]}$$

8. Déterminons d'abord $u_{k-s,\,k}$. Pour cela, faisons $p=k$ dans l'équation (1'), ce qui nous donnera

$$u_{n+1,\,k}=(n\lambda+k\sigma+\mu)\;u_{n,\,k}.$$

En remplaçant n par $k-1,\ k-2,\ \ldots,\ k-s$, nous aurons les équations

$$u_{k,\,k}=[(k-1)\,\lambda+k\sigma+\mu]\;u_{k-1,\,k}.$$
$$u_{k-1,\,k}=[(k-2)\,\lambda+k\sigma+\mu]\;u_{k-2,\,k}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{k-s+1,\,k}=[(k-s)\,\lambda+k\sigma+\mu]\;u_{k-s,\,k}$$

et en les multipliant, on obtient

$$u_{k-s,\,k}=\frac{1}{P\left(\begin{matrix}k-1\\k-s\end{matrix},k\right)}$$

ou bien

$$(11)\quad \boxed{u_{k-s,\,k}=(k\lambda+k\sigma+\mu)\,\frac{1}{P\left(\begin{matrix}k\\k-s\end{matrix},k\right)}}$$

Démontrons maintenant la formule (10) pour $r=1$.
Dans l'équation (1') faisons $p=k+1$; nous aurons

$$(12)\qquad u_{n+1,\,k+1}=[n\lambda+(k+1)\;\sigma+\mu]\;u_{n,\,k+1}+u_{n,\,k}$$

Pour $n=k$ et $r=1$, la formule (9) donne

$$(13)\quad u_{k,\,k+1}=\frac{k\lambda+k\sigma+\mu}{1\,!\,\sigma}\left[\frac{1}{k\lambda+(k+1)\,\sigma+\mu}-\frac{1}{k\lambda+k\sigma+\mu}\right]$$

Il reste à démontrer que

$$(14)\quad u_{k-s,\,k+1}=\frac{k\lambda+k\sigma+\mu}{1\,!\,\sigma}\left[\frac{1}{P\left(\begin{matrix}k\\k-s\end{matrix},k+1\right)}-\frac{1}{P\left(\begin{matrix}k\\k-s\end{matrix},k\right)}\right]$$

Cette formule est vraie pour $s = 0$, car elle coincide avec la formule (13). Il suffit de supposer la formule (14) vraie pour l'indice $k - s$ et de la démontrer pour l'indice $k - s - 1$. En faisant dans l'équation (12) $n = k - s - 1$, nous aurons

$$u_{k-s,\,k+1} = [(k - s - 1)\lambda + (k+1)\sigma + \mu]\, u_{k-s-1,\,k+1} + u_{k-s-1,\,k}.$$

et par suite

$$u_{k-s-1,\,k+1} = \frac{k\lambda + k\sigma + \mu}{1\,!\,\sigma}\left[\frac{1}{[(k-s-1)\lambda + (k+1)\sigma + \mu]\, P\left(\begin{matrix}k\\k-s\end{matrix}, k+1\right)}\right.$$
$$- \frac{1}{[(k-s-1)\lambda + (k+1)\sigma + \mu]\, P\left(\begin{matrix}k\\k-s\end{matrix}, k\right)}$$
$$\left.- \frac{\sigma}{[(k-s-1)\lambda + (k+1)\sigma + \mu]\, P\left(\begin{matrix}k\\k-s-1\end{matrix}, k\right)}\right]$$

$$= \frac{k\lambda + k\sigma + \mu}{1\,!\,\sigma}\left\{\frac{1}{[(k-s-1)\lambda + (k+1)\sigma + \mu]\, P\left(\begin{matrix}k\\k-s\end{matrix}, k+1\right)}\right.$$
$$\left.- \frac{1}{[(k-s-1)\lambda + (k+1)\sigma + \mu]}\left[1 + \frac{\sigma}{(k-s-1)\lambda + k\sigma + \mu}\right]\frac{1}{P\left(\begin{matrix}k\\k-s\end{matrix}, k\right)}\right\}$$

$$= \frac{k\lambda + k\sigma + \mu}{1\,!\,\sigma}\left\{\frac{1}{[(k-s-1)\lambda + (k+1)\sigma + \mu)\, P\left(\begin{matrix}k\\k-s\end{matrix}, k+1\right)}\right.$$
$$\left.- \frac{1}{[(k-s-1)\lambda + k\sigma + \mu]\, P\left(\begin{matrix}k\\k-s\end{matrix}, k\right)}\right\}$$

ou bien

$$u_{k-s-1,\,k+1} = \frac{k\lambda + k\sigma + \mu}{1\,!\,\sigma}\left[\frac{1}{P\left(\begin{matrix}1\\k-s-1\end{matrix}, k+1\right)} - \frac{1}{P\left(\begin{matrix}k\\k-s-1\end{matrix}, k\right)}\right]$$

ce qui montre que la formule (14) est générale.

9. Nous pouvons démontrer maintenant la formule (10) en général. Nous savons que cette formule est vraie pour $s = 1$, car elle coincide avec la formule (14). Elle est aussi vraie lorsque $s = 0$, pour un indice r quelconque, car elle coincide dans ce cas avec la formule (9).

Pour démontrer la formule (10) en général, nous supposerons cette formule vraie pour l'indice $r - 1$ et quelque soit s, nous supposerons encore la formule (10) vraie pour le couple $(k - s,\ k + r)$ et nous la démontrerons pour le couple $(k - s - 1,\ k + r)$.

Nous partons de l'équation

$$u_{k-1,\,k-r} = [(k-s-1)\,\lambda + (k+r)\,\sigma + \mu]\,u_{k-s-1,\,k+r} + u_{k-s-1,\,k+r-1}$$

qui nous donnera

$$u_{k-s-1,\,k+r} = \frac{k\lambda + k\sigma + \mu}{r\,!\,\sigma^{r}}\left\{\frac{1}{[(k-s-1)\,\lambda + (k+r)\,\sigma + \mu)\,P\binom{k}{k-s},\,k+r)}\right.$$

$$-\frac{C_r^1}{[(k-s-1)\,\lambda + (k+r)\,\sigma + \mu]\,P\binom{k}{k-s},\,k+r-1)}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left. + (-1)^r \frac{C_r^r}{[(k-s-1)\,\lambda + (k+r)\,\sigma + \mu)]\,P\binom{k}{k-s},\,k)}\right\}$$

$$-\frac{k\lambda + k\sigma + \mu}{(r-1)\,!\,\sigma^{r-1}}\left\{\frac{1}{[(k-s-1)\,\lambda + (k+r)\,\sigma + \mu]\,P\binom{k}{k-s-1},\,k+r-1)}\right.$$

$$-\frac{C_{r-1}^1}{[(k-s-1)\,\lambda + (k+r)\,\sigma + \mu]\,P\binom{k}{k-s-1},\,k+r-2)}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left. + (-1)^{r-1} \frac{C_{r-1}^{r-1}}{[(k-s-1)\,\lambda + (k+r)\,\sigma + \mu]\,P\binom{k}{k-s-1},\,k)}\right\}$$

on bien

$$u_{k-s-1,\,k+r} = \frac{k\lambda + k\sigma + \mu}{r\,!\,\sigma^{r}}\left\{\frac{1}{[(k-s-1)\,\lambda + (k+r)\,\sigma + \mu]\,P\binom{k}{k-s},\,k+r)}\right.$$

$$-\frac{C_r^1}{(k-s-1)\lambda+(k+r)\sigma+\mu}\left[1+\frac{\sigma}{(k-s-1)\lambda+(k+r-1)\sigma+\mu}\right]\frac{1}{P\binom{k}{k-s},\,k+r-1)}$$

$$+\frac{C_r^2}{(k-s-1)\lambda+(k+r)\sigma+\mu}\left[1+\frac{2\sigma}{(k-s-1)\lambda+(k+r-2)\sigma+\mu}\right]\frac{1}{P\binom{k}{k-s},\,k+r-2)}$$

$$-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.+(-1)^r\frac{C_r^r}{(k-s-1)\lambda+(k+r)\sigma+\mu}\left[1+\frac{r\sigma}{(k-s-1)\,\lambda+k\sigma+\mu}\right]\frac{1}{P\binom{k}{k-s},\,k)}\right\}$$

c'est à dire

$$u_{k-s-1,\,k+r} = \frac{k\lambda + k\sigma + \mu}{r\,!\,\sigma^r}\left[\frac{1}{P\left(\begin{matrix}k\\k-s-1\end{matrix},\ k+r\right)}\right.$$

$$\left. - \frac{C_r^1}{P\left(\begin{matrix}k\\k-s-1\end{matrix},\ k+r-1\right)} + \ldots + (-1)^r \frac{C_r^r}{P\left(\begin{matrix}k\\k-s-1\end{matrix},\ k\right)}\right]$$

ce qui prouve que la formule (10) est générale.

10. En résumé, la solution de l'équation de récurrence à deux indices

$$(1) \qquad u_{n+1,\,p} = (n\lambda + p\sigma + \mu)\ u_{n,p} + u_{n,\,p-1}.$$

qui satisfait aux conditions

$$u_{k,\,k} = 1$$

$$u_{p,\,p} = 0 \quad \text{pour} \quad p \neq k.$$

et

$$u_{n,0} = 0 \quad \text{pour} \quad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm \ldots$$

est donnée par l'une des formules suivantes

$$(2) \qquad \boxed{u_{n,\,k-r}\,k = 0}$$

pour $r = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1$ et quel que soit n

$$(6)\ \boxed{u_{n+1,\,k+r} = \frac{k\lambda+k\sigma+\mu}{r\,!\,\sigma^r}\left[P\left(\begin{matrix}n\\k+1\end{matrix},\ k+r\right) - C_r^1\,P\left(\begin{matrix}n\\k+1\end{matrix},\ k+1-r\right) + \ldots + (-1)^r C_r^r\,P\left(\begin{matrix}n\\k+1\end{matrix},\ k\right)\right]}$$

pour $r \geqslant 0$ et $n \geqslant k$,

$$(10)\ \boxed{u_{k-s,\,k+r} = \frac{k\lambda+k\sigma+\mu}{r\,!\,\sigma^r}\left[\frac{1}{P\left(\begin{matrix}k\\k-s\end{matrix},\ k+r\right)} - \frac{C_r^1}{P\left(\begin{matrix}k\\k-s\end{matrix},\ k+r-1\right)} \ldots + (-1)^r \frac{C_r^r}{P\left(\begin{matrix}k\\k-s\end{matrix},\ k\right)}\right]}$$

pour $r \geqslant 0$ et $s > 0$.

Rappelons que dans ces formules le Symbole $P(^b_a,\ r)$ représente le produit

$$P(^a_b,\ r) = (a\lambda + r\sigma + \mu)\ [(a+1)\ \lambda + r\sigma + \mu)\ \ldots\ [b\lambda + r\sigma + \mu].$$

Second problème

11. Nous allons maintenant déterminer la solution de l'équation de récurrence à deux indices

$$A^p_{n+1} = (n\lambda + p\sigma + \mu)\ A^p_n + A^{p-1}_n$$

satisfaisaisant aux conditions

$$A_0^k = 1$$

$$A_0^p = 0 \qquad \text{pour} \qquad p \neq k.$$

et

$$A_n^0 = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Cette solution sera désignée par $V_{n,p}$.

Il est évident que

$$\boxed{V_{n,\,k-r} = 0}$$

pour $r = 1, 2, \ldots, k-1$ et quel que soit n.

Déterminons maintenant $V_{n+1,k}$ et $V_{n+1,k+1}$.

Dans l'équation

$$(1) \qquad V_{n+1,p} = (n\lambda + p\sigma + \mu)\, V_{n,p} + V_{n,p-1}$$

faisons $p = k$: nous aurons l'équation

$$V_{n+1,k} = (n\lambda + k\sigma + \mu)\, V_{n,k},$$

qui nous donnera

$$(2) \qquad V_{n+1,k} = (k\sigma + \mu)(\lambda + k\sigma + \mu)\ldots(n\lambda + k\sigma + \mu),$$

c'est à dire

$$(2') \qquad V_{n+1,k} = P\binom{n}{0}, k\Big).$$

Dans l'équation (1), faisons $p = k + 1$; nous aurons

$$V_{n+1,k+1} = [n\lambda + (k+1)\,\sigma + \mu)\, V_{n,k+1} + V_{n,k}$$

et en faisant $n = 0$, on trouve

$$V_{1,k+1} = V_{0,k} = 1.$$

Utilisant l'identité

$$1\,!\,\sigma = P\binom{0}{0}, k+1\Big) - P\binom{0}{0}, k\Big),$$

nous pouvons écrire

$$(3) \qquad V_{1,k+1} = \frac{P\binom{0}{0}, k+1\Big) - P\binom{0}{0}, k\Big)}{1\,!\,\sigma}$$

et nous allons démontrer que $V_{n+1,k+1}$ sera donné par la formule

$$(4) \qquad \boxed{V_{n+1,k+1} = \frac{P\binom{n}{0}, k+1\Big) - P\binom{n}{0}, k\Big)}{1\,!\,\sigma}}$$

Cette formule est vraie pour l'indice $n = 0$, car elle coincide avec la formule (3). En supposant la formule (4) vraie pour l'indice $n + 1$, nous allons démontrer qu'elle est valable aussi pour l'indice $n + 2$. D'après l'équation (1), nous avons

$$V_{n+2,\,k+1} = [(n + 1)\,\lambda + (k + 1)\,\sigma + \mu]\,V_{n+1,\,k+1} + V_{n+1,\,k}$$

et par suite

$$V_{n+2,\,k+1} = [(n+1)\lambda+(k+1)\sigma+\mu]\,\frac{P\binom{n}{0},k+1\Big)-P\binom{n}{0},k\Big)}{1\,!\,\sigma}+P\Big(\binom{n}{0},k\Big)$$

$$= \frac{[(n+1)\lambda+(k+1)\sigma+\mu]\,P\Big(\binom{n}{0},k+1\Big)-[(n+1)\lambda+k\sigma+\mu]\,P\Big(\binom{n}{0},k\Big)}{1\,!\,\sigma}.$$

Mais

$$[(n + 1)\;\lambda + (k + 1)\,\sigma + \mu]\;P\Big(\binom{n}{0},\;k + 1\Big) = P\Big(\binom{n+1}{0},\;k + 1\Big)$$

$$[(n + 1)\;\lambda + k\sigma + \mu)\;P\Big(\binom{n}{0},\;k\Big) = P\Big(\binom{n+1}{0},\;k\Big)$$

de sorte que

$$V_{n+2,\,k+1} = \frac{P\Big(\binom{n+1}{0},\;k + 1\Big) - P\Big(\binom{n+1}{0},\;k\Big)}{1\,!\;\sigma}$$

ce qui prouve que la formule (4) est générale en supposant bien entendu que $n \geqslant 0$.

12. Nous pouvons maintenant donner la solution générale de l'équation (1), pour les valeurs positives de l'indice n. Remarquons d'abord que

$$V_{0,\,k+2} = V_{1,\,k+2} = 0$$

et

$$V_{2,\,k+2} = 1$$

De même

$$V_{0,\,k+3} = V_{1,\,k+3} = V_{2,\,k+3} = 0$$

et

$$V_{3,\,k+3} = 1$$

En général, nous avons

$$V_{0,\,k+r} = V_{1,\,k+r} = \ldots = V_{r-1,\,k+r} = 0$$

et

(5) $$\boxed{V_{r,\,k+r} = 1}$$

En utilisant l'identité (19) de la première partie

$$r!\,\sigma^r = P\binom{r-1}{0}, k+r\Big) - C_r^1\, P\binom{r-1}{0}, k+r-1\Big) + \ldots + (-1)^r C_r^r\, P\binom{r-1}{0}, k\Big)$$

nous pouvons écrire la formule (5) sons la forme.

$$(5') \qquad \boxed{V_{r,\,k+r} = \frac{P\binom{r-1}{0}, k+r\Big) - C_r^1\, P\binom{r-1}{0}, k+r-1\Big) + \ldots + (-1)^r C_r^r\, P\binom{r-0}{1}, k\Big)}{r!\,\sigma}}$$

et nous allons démontrer que $V_{n+1,\,k+r}$ sera donné par la formule

$$(6) \qquad \boxed{V_{n+1,\,k+r} = \frac{P\binom{n}{0}, k+r\Big) - C_r^1\, P\binom{n}{0}, k+r-1\Big) + \ldots + (-1)^r C_r^r\, P\binom{n}{0}, k\Big)}{r!\,\sigma}}$$

Cette formule a été démontrée pour $r = 1$ et quel que soit n. Pour l'indice r quelconque, elle est également vraie lorsque $n = r - 1$, car elle coincide avec la formule (5').

Pour prouver que la formule (6) est générale, il suffit de supposer qu'elle est vraie pour l'indice $n + 1$, et de démontrer que $V_{n+2,\,k+r}$ sera donné par la même formule.

Nous aurons

$$V_{n+2,\,k+r} = [(n+1)\,\lambda + (k+r)\,\sigma + \mu]\; V_{n+1,\,k+r} + V_{n+1,\,k+r-1}$$

et par suite

$$V_{n+2,\,k+r} = [(n+1)\lambda + (k+r)\sigma + \mu]\,\frac{P\binom{n}{0}, k+r\Big) - C_r^1 P\binom{n}{0}, k+r-1\Big) + \ldots + (-1)^r C_r^r P\binom{n}{0}, k\Big)}{r!\,\sigma^r}$$

$$+ \frac{P\binom{n}{0}, k+r-1\Big) - C_{r-1}^1 P\binom{n}{0}, k+r-2\Big) + \ldots + (-1)^{n-1} C_{r-1}^{r-1} P\binom{n}{0}, k\Big)}{(r-1)!\,\sigma^{r-1}}$$

ou

$$\begin{aligned} r!\,\sigma^r\, V_{n+2,\,k+r} = {} & [(n+1)\,\lambda + (k+r)\,\sigma + \mu]\, P\binom{n}{0}, k+r\Big) \\ & - C_r^1\, [(n+1)\,\lambda + (k+r-1)\,\sigma + \mu)\; P\binom{n}{0}, k+r-1\Big) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^r C_r^r\, [(n+r)\,\lambda + k\sigma + \mu]\; P\binom{n}{0}, k\Big) \end{aligned}$$

Mais

$$[(n+1)\ \lambda + (k+r-s)\,\sigma + \mu]\, P\binom{n}{0}, k+r-s\Big) = P\Big(\binom{n+1}{0}, k+r-s\Big)$$

pour $S = 0, 1, \ldots, r$; de sorte que

$$V_{n+2,\, k+r} = \frac{P\Big(\binom{n+1}{0}, k+r\Big) - C_r^1\, P\Big(\binom{n+1}{0}, k+r-1\Big) + \ldots + (-1)^r C_r^r\, P\Big(\binom{n+1}{0}, k\Big)}{r!\,\sigma^r}$$

ce qui prouve que la formule (6) est générale.

13. La formule (6) est valable pour $n \geqq 0$. Nous allons donner maintenant une formule pour $V_{n,\, k+r}$ lorsque n est négatif.

Reprenons l'équation

$$V_{n,\, k+r} = [(n-1)\,\lambda + (k+r)\,\sigma + \mu)]\, V_{n-1,\, k+r} + V_{n-1,\, k+r-1}$$

et faisons $n = 0$; nous aurons

$$V_{0,\, k+r} = [-\lambda + (k+r)\,\sigma + \mu)]\, V_{-1,\, k+r} + V_{-1,\, k+r-1}$$

Pour $r = 0$, nous avons $V_{0,\, k} = 1$ et $V_{-1,\, k-1} = 0$, de sorte que

$$V_{-1,\, k} = \frac{1}{-\lambda + k\sigma + \mu}$$

Pour $r = 1, 2, \ldots, r$ nous avons

$$[-\lambda + (k+1)\,\sigma + \mu]\, V_{-1,\, k+1} + V_{-1,\, k} = 0$$

$$[-\lambda + (k+2)\,\sigma + \mu]\, V_{-1,\, k+2} + V_{-1,\, k+1} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[-\lambda + (k+r)\,\sigma + \mu]\, V_{-1,\, k+r} + V_{-1,\, k+r-1} = 0$$

d'où résulte que

$$V_{-1,\, k+r} = \frac{(-1)^r}{(-\lambda + k\sigma + \mu)\,[-\lambda + (k+1)\,\sigma + \mu]\ldots[-\lambda + (k+r)]\,\sigma + \mu}$$

Utilisant une identité connue, nous pouvons encore écrire

$$(7)\quad \boxed{V_{-1,\, k+r} = \frac{1}{r!\,\sigma^r}\left[\frac{1}{-\lambda+(k+r)\sigma+\mu} - \frac{C_r^1}{-\lambda+(k+r-\ )\sigma+\mu} + \ldots + (-1)^r \frac{C_r^r}{-\lambda+k\sigma+\mu}\right]}$$

et nous allons prouver qu'en général, nous avons

$$(\eth)\quad \boxed{V_{-1-3,\, k+r} = \frac{1}{r!\,\sigma^r}\left[\frac{1}{P\Big(\binom{-1}{-1-s}, k+r\Big)} - \frac{C_r^1}{P\Big(\binom{-1}{-1-s}, k+r-1\Big)} + \ldots + (-1)^r \frac{C_r^r}{P\Big(\binom{-1}{-1-s}, k\Big)}\right]}$$

14. Démontrons d'abord la formule (8) pour $r = 0$ et $r = 1$. Dans l'équation (1) faisons $p = k$ et $n = -1 - s$; nous aurons

$$V_{-s,\,k} = [(-1-s)\lambda + k\sigma + \mu]\; V_{-1-s,\,k}$$

En faisant $s = 0, 1, 2, \ldots, s$ nous aurons les équations

$$1 = (-\lambda + k\sigma + \mu)\; V_{-1,\,k}$$

$$V_{-1,\,k} = (-2\lambda + k\sigma + \mu)\; V_{-2,\,k}.$$

$$V_{-s,\,k} = [(-1-s)\;\lambda + k\sigma + \mu]\; V_{-1-s,\,k},$$

d'où résulte par multiplication que

$$V_{-1-s,\,k} = \frac{1}{[(-1-s)\;\lambda + k\sigma + \mu]\ldots[-\lambda + k\sigma + \mu)]}$$

c'est à dire

$$\text{(9)} \qquad \boxed{V_{-1-s,\,k} = \frac{1}{P\left(\frac{-1}{-1-s},\, k\right)}}$$

Faisons maintenant dans l'équation (1), $p = k + 1$ et $n = -2 - s$; nous aurons

$$\text{(10)}\quad V_{-1-s,\,k+1} = [(-2-s)\;\lambda + (k+1)\;\sigma + \mu]\; V_{-2-s,\,k+1} + V_{-2-s,\,k}.$$

Nous savons d'après la formule (7) que

$$V_{-1,\,k+1} = \frac{1}{1!\,\sigma}\left[\frac{1}{-\lambda + (k+1)\;\sigma + \mu} - \frac{1}{-\lambda + k\sigma + \mu}\right]$$

et nous voulons démontrer que nous aurons

$$\text{(12)}\qquad V_{-1-s,\,k+1} = \frac{1}{1!\,\sigma}\left[\frac{1}{P\left(\frac{-1}{-1-s},\, k+1\right)} - \frac{1}{P\left(\frac{+1}{-1-s},\, k\right)}\right]$$

Cette formule étant vraie pour $s = 0$, supposons la vraie pour un indice s quelque con et démontrons la aussi pour l'indice $s + 1$.

Nous aurons d'après la formule (10)

$$V_{-2-s,\,k+1} = \frac{V_{-1-s,\,k+1}}{(-2-s)\;\lambda + (k+1)\;\sigma + \mu} - \frac{V_{-2-s,\,k}}{(-2-s)\;\lambda + (k+1)\;\sigma + \mu}$$

Utilisant les formules (9) et (12) nous pouvons écrire

$$V_{-2-s,\,k+1}=\frac{1}{1\,!\,\sigma}\left[\frac{1}{[(-2-s)\lambda+(k+1)\sigma+1\,\sigma+\mu]\,P\left({-1 \atop -1-s},k+1\right)}\right.$$

$$-\frac{1}{[(-2-s)\lambda+(k+1)\sigma+\mu]\,P\left({-1 \atop -1-s},k\right)}$$

$$\left.-\frac{\sigma}{[(-2-s)\lambda+(k+1)\sigma+\mu]\,P\left({-1 \atop -2-s},k\right)}\right]$$

ou

$$V_{-2-s,\,k+1}=\frac{1}{1\,!\,\sigma}\left[\frac{1}{P\left({-1 \atop -2-s},k+1\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(-2-s)\lambda+(k+1)\sigma+\mu}\left(1+\frac{\sigma}{(-2-s)\lambda+k\sigma+\mu}\right)\frac{1}{P\left({-1 \atop -1-s},k\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{1\,!\,\sigma}\left[\frac{1}{P\left({-1 \atop -2-s},k+1\right)}-\frac{1}{[(-2-s)\lambda+k\sigma+\mu]\,P\left({-1 \atop -1-s},k\right)}\right]$$

c'est à dire

$$V_{-2-s,\,k+1}=\frac{1}{1\,!\,\sigma}\left[\frac{1}{P\left({-1 \atop -2-s},k+1\right)}-\frac{1}{P\left({-1 \atop -2-s},k\right)}\right]$$

ce qui prouve que la formule (12) est générale.

15. Nous pouvons démontrer maintenant la formule (8). Nous savons que cette formule est vraie lorsque $r=1$ et quel que soit s, et nous savons que pour un r quelconque elle est encore vraie lorsque $s=0$, puisqu'elle coincide avec la formule (7).

Nous supposerons la formule (8) vraie pour les couples $(-1-s, k+r-1)$, $(-1-s, k+r)$ et nous démontrerons que $V_{-2-s,\,k+r}$ sera donné par la même formule.

En faisant dans l'équation (1), $n=-2-s$ et $p=k+r$, nous aurons

$$V_{-1-s,\,k+r}=[(-2-s)\,\lambda+(k+r)\,\sigma+\mu]\,V_{-2-s,\,k+r}+V_{-2-s,\,k+r-1}.$$

et par suite

$$V_{-2-s,\,k+r} = \frac{1}{r\,!\,\sigma^r}\left[\frac{1}{[(-2-s)\lambda + (k+r)\sigma + \mu)]\,P\left(\frac{-1}{-1-r},\,k+r\right)} - \frac{C_r^1}{[(-2-s)\lambda + (k+r)\sigma + \mu)]\,P\left(\frac{-1}{-1-s},\,k+r-1\right)} + \dots + (-1)^r \frac{C_r^r}{[(-2-s)\lambda + (k+r)\sigma + \mu)]\,P\left(\frac{-1}{-1-s},\,k\right)}\right]$$

$$-\frac{1}{(r-1)\,!\,\sigma^{r-1}}\left[\frac{1}{[(-2-s)\lambda + (k+r)\sigma + \mu]\,P\left(\frac{-1}{-1-s},\,k+r-1\right)} - \frac{C_{r-1}^1}{[(-2-s)\lambda + (k+r)\sigma + \mu[\,P\left(\frac{-1}{-2-s},\,k+r-2\right)} + \dots + (-1)^{r-1}\frac{C_{r-1}^{r-1}}{[(-2-s)\lambda + (k+r)\sigma + \mu]\,P\left(\frac{-1}{-2-s},\,k\right)}\right]$$

c'est à dire

$$V_{-2-s,\,k+r} = \frac{1}{r\,!\,\sigma^r}\left\{\frac{1}{[(-2-s)\lambda+(k+r)\lambda+\mu]\,P\left(\frac{-1}{-1-s},\,k+r\right)} - \frac{C_r^1}{[(-2-s)\lambda+(k+r)\sigma+\mu]P\left(\frac{-1}{-1-s},\,k+r-1\right)}\left[1+\frac{\sigma}{(-2-s)\lambda+(k+r-1)\sigma+\mu}\right] + \dots + (-1)^r\frac{C_r^r}{[(-2-s)\lambda+(k+r)\sigma+\mu)P\left(\frac{(-1)}{-1-s},\,k\right)}\left[1+\frac{r\sigma}{(-2-s)\lambda+k\sigma+\mu}\right]\right\}$$

ou

$$V_{-2-s,\,k+r} = \frac{1}{r\,!\,\sigma^r}\left\{\frac{1}{[(-2-s)\lambda+(k+r)\sigma+\mu]\,P\left(\frac{-1}{-1-s},\,k+r\right)} - \frac{C_r^1}{[(-2-s)\lambda+(k+r-1)\sigma+\mu]\,P\left(\frac{-1}{-1-s},\,k+r-1\right)} + \dots + (-1)^r\frac{C_r^r}{[(-2-s)\lambda+k\sigma+\mu)]\,P\left(\frac{-1}{-\,-s},\,k\right)}\right\}.$$

Mais

$$[(-2-s)\lambda + (k+l)\sigma + \mu]\, P\left(\frac{-1}{1-s}, k+l\right) = P\left(\frac{-1}{-2-s}, k+l\right),$$

de sorte que

$$V_{-2-s,\,k+r} = \frac{1}{r!\,\sigma^r}\left[\frac{1}{P\left(\frac{-1}{-2-s}, k+r\right)} - \frac{C_r^1}{P\left(\frac{-1}{-2-s}, k+r-1\right)} + \dots + (-1)^r \frac{C_r^r}{P\left(\frac{-1}{-2-r}, k\right)}\right]$$

ce qui prouve que la formule (8) est générale.

16. En résumé, la solution de l'équation.

$$V_{n+1,\,p} = (n\lambda + p\sigma + \mu)\, V_{n,\,p} + V_{n,\,p-1}\,.$$

Satisfaisant aux conditions

$$V_{0,\,k} = 1$$

$$V_{0,\,p} = 0 \qquad \text{pour} \qquad p \neq k$$

et

$$V_{n,\,0} = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots$$

est donnée par l'une des formules suivantes

$$\boxed{V_{n,\,k-r} = 0}$$

pour $r = 1, 2, \dots, k-1$ et quel que soit n,

$$\boxed{V_{n+1,\,k+r} = \frac{P\binom{n}{0}, k+r) - C_r^1\, P\binom{n}{0}, k+r-1) + \dots + (-1)^r C_r^r P\binom{n}{0}, k)}{r!\,\sigma^r}}$$

pour $n \geqslant 0$, et

$$\boxed{V_{-1-s,\,k+r} = \frac{1}{r!\,\sigma^r}\left[\frac{1}{P\left(\frac{-1}{-1-s}, k+r\right)} - \frac{C_r^1}{P\left(\frac{-1}{-1-s}, k+r-1\right)} + \dots + (-1)^r \frac{C_r^r}{P\left(\frac{-1}{-1-s}, k\right)}\right]}$$

lorsque le premier indice est négatif.

Troisième problème

17. Il s'agit de déterminer la solution de l'équation

$$(1) \qquad A_{n+1}^p = (n\lambda + p\sigma + \mu)\, A_n^p + A_n^{p-1}$$

Satisfaisant aux conditions

$$A_0^0 = 1$$

$$(2) \qquad A_0^p = 0 \qquad \text{pour} \qquad p = 1,\ 2,\ \dots$$

$$A_n^0 = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$$

Il est facile de voir que pour des valeurs négatifs de n, nous avons

$$\boxed{A_n^p = 0.} \qquad\qquad (n < 0)$$

Pour déterminer A_n^p lorsque n est positif, nous remarquerons qu'à cause des conditions (2), nous avons

$$A_1^1 = 1$$

et

$$A_1^p = 0 \quad \text{pour} \quad p = 2,\ 3,\ \ldots$$

En posant donc

$$A_n^p = B_{n-1}^p$$

nous aurons

$$B_0^1 = 1$$

$$B_0^p = 0 \quad \text{pour} \quad p \neq 1$$

et

$$B_n^0 = 0 \quad \text{pour} \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

D'autre part, puisque A_n^p satisfait à l'équation (1), B satisfaira à l'équation

$$B_{n+1}^p = [n\lambda + p\sigma + (\mu + \lambda)]\, B_n^p + B_n^{p-1}$$

Il résulte que B_n^p sera donné par la formule (6) du problème précédent, où l'on remplacera μ par $\mu + \lambda$ et où l'on faira $k = 1$.

Nous avons donc

$$B_n^p = \frac{P'\begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix}, p\Big) - C_{p-1}^1 P'\begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix}, p-1\Big) + \ldots + (-1)^{p-1} C_{p-1}^{p-1} P'\begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\Big)}{(p-1)!\,\sigma^{p-1}}$$

où l'accent signifie qu'on a remplacé μ dans l'expression $P\left(\begin{matrix} n-1 \\ 0 \end{matrix}, r\right)$ par $\mu + \lambda$.

Nous avons donc

$$A_{n+1}^p = \frac{P'\left(\begin{matrix} n-1 \\ 0 \end{matrix}, p\right) - C_{p-1}^1 P'\left(\begin{matrix} n-1 \\ 0 \end{matrix}, p-1\right) + \ldots + (-1)^{p-1} C_{p-1}^{p-1} P'\left(\begin{matrix} n-1 \\ 0 \end{matrix}, 1\right)}{(p-1)!\,\sigma^{p-1}}$$

et en observant que

$$P'\left(\begin{matrix} n-1 \\ 0 \end{matrix}, p\right) = P\left(\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}, p\right),$$

il résultera que

$$(3) \qquad \boxed{A_{n+1}^p = \frac{P\left(\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}, p\right) - C_{p-1}^1 P\left(\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}, p-1\right) + \ldots + (-1)^{p-1} C_{p-1}^{p-1} P\left(\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}, 1\right)}{(p-1)!\,\sigma^{p-1}}.}$$

Quatrième problème

18. Il s'agit de déterminer la solution de l'équation

$$A_{n+1}^{p} = (n\lambda + p\sigma + \mu)\, A_n^p + A_n^{p-1} \tag{1}$$

Sachant que

$$\begin{aligned} &A_0^0 = 1 \\ &A_p^p = 0 \qquad \text{pour} \qquad p = 1,\ 2,\ \ldots \\ &A_n^0 = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Il est évident à cause des données (2), que pour n positif, nous avons

$$\boxed{A_n^p = 0} \qquad (n > 0)$$

quel que soit p.

Nous déterminerons maintenant, la solution de l'équation (1), pour $n \leqslant 0$.

Pour $n = 0$, l'équation (1) montre que

$$(p\sigma + \mu)\, A_0^p + A_0^{p-1} = 0,$$

d'où résulte que

$$A_0^1 = -\frac{1}{\sigma + \mu}$$

$$A_0^2 = \frac{1}{(\sigma + \mu)\,(2\sigma + \mu)}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et en général

$$A_0^p = \frac{(-1)^p}{(\sigma + \mu)\,(2\sigma + \mu)\ldots(p\sigma + \mu)}.$$

En utilisant une identité connue, nous pouvons écrire

$$A_0^p = \frac{-1}{(p-1)\,!\,\sigma^{p-1}}\left[\frac{1}{p\sigma+\mu} - \frac{C_{p-1}^1}{(p+1)\,\sigma+\mu} + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{C_{p-1}^{p-1}}{\sigma+\mu}\right] \tag{3}$$

et nous allons démontrer qu'en général

$$\boxed{A_{-n}^{p} = \frac{-1}{(p-1)\,!\,\sigma^{p-1}}\left[\frac{1}{P\begin{pmatrix}0\\-n\end{pmatrix},p} - \frac{C_{p-1}^1}{P\begin{pmatrix}0\\-n\end{pmatrix},p-1} + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{C_{p-1}^{p-1}}{P\begin{pmatrix}-n\\0\end{pmatrix},1}\right]} \tag{4}$$

19. Calculons d'abord directement A^1_{-n} et A^2_{-n}.

En faisant $p = 1$ dans l'équation (1), nous aurons

$$A^1_{n+1} = (n\lambda + \sigma + \mu)\, A^1_n$$

et en donnant à n les valeurs $-1, -2, \ldots$ nous déduirons

$$(5)\qquad \boxed{A^1_{-n} = \frac{-1}{P\left(\begin{matrix}0\\-n\end{matrix}, 1\right)}}$$

Faisons maintenant $p = 2$, dans l'équation (1), nous aurons

$$(6)\qquad A^2_{n+1} = (n\lambda + 2\sigma + \mu)\, A^2_n + A^1_n$$

et nous voulons démontrer que

$$(7)\qquad A^2_{-n} = \frac{-1}{1\,!\,\sigma}\left[\frac{1}{P\left(\begin{matrix}0\\-n\end{matrix}, 2\right)} - \frac{1}{P\left(\begin{matrix}0\\-n\end{matrix}, 1\right)}\right]$$

Cette formule est vraie pour $n = 0$, car elle coincide avec la formule (3) qui correspond à $p = 2$.

Supposons la formule (7) vraie pour l'indice $-n$ et démontrons que A^2_{-n-1} sera donné par la même formule.

En remplaçant dans la formule (6), n par $-n-1$, nous aurons

$$A^2_{-n} = [-(n+1)\,\lambda + 2\sigma + \mu]\, A^2_{-n-1} + A^1_{-n-1}$$

d'où résulte que

$$A^2_{-n-1} = \frac{-1}{1\,!\,\sigma}\left[\frac{1}{[-(n+1)\,\lambda + 2\sigma + \mu)]\; P\left(\begin{matrix}0\\-n\end{matrix}, 2\right)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{[-(n+1)\lambda + 2\sigma + \mu]\, P\left(\begin{matrix}0\\-n\end{matrix}, 1\right)} - \frac{\sigma}{[-(n+1)\lambda + 2\sigma + \mu]\, P\left(\begin{matrix}0\\-n-1\end{matrix}, 1\right)}\right]$$

ou

$$A^2_{-n-1} = \frac{-1}{1\,!\,\sigma}\left[\frac{1}{P\left(\begin{matrix}0\\-n-1\end{matrix}, 2\right)} - \frac{1}{[-(n+1)\lambda + 2\sigma + \mu]}\left(1 - \frac{\sigma}{-(n+1)\lambda + \sigma + \mu}\right)\frac{1}{P\left(\begin{matrix}0\\-n\end{matrix}, 1\right)}\right]$$

c'est à dire

$$A^2_{-n-1} = \frac{-1}{1\,!\,\sigma}\left[\frac{1}{P\left(\begin{matrix}0\\-n-1\end{matrix}, 2\right)} - \frac{1}{P\left(\begin{matrix}0\\-n-\end{matrix}, 1\right)}\right]$$

ce qui prouve que la formule (7) est générale.

20. Nous pouvons démontrer maintenant la formule (4) pour toutes les valeurs de n et de p. Cette formule est vraie pour $p = 2$ et quel que soit n; elle est aussi vraie pour $n = 0$ et quel que soit p.

Supposons donc que la formule (4) a été démontrée pour l'indice $p - 1$ et quel que soit n. Supposons qu'elle a été aussi démontrée pour le couple $(-n, p)$ et démontrons la pour le couple $(-n-1, p)$

La formule

$$A^p_{-n} = [-(n+1)\lambda + p\sigma + \mu]\, A^p_{-n-1} + A^{p-1}_{-n-1}$$

nous donnera

$$A^p_{-n-1} = \frac{-1}{(p-1)!\,\sigma^{p-1}} \left\{ \frac{1}{[-(n+1)\lambda+p\sigma+\mu]P\begin{pmatrix}0\\-n\end{pmatrix}, p)} - \frac{C^1_{p-1}}{[-(n+1)\lambda+p\sigma+\mu]P\left(\begin{matrix}0\\-n\end{matrix}, p-1\right)} \right.$$

$$\left. + \dots + (-1)^{p-1} \frac{C^{p-1}_{p-1}}{[-(n+1)\lambda+p\sigma+\mu]\, P\left(\begin{matrix}0\\-n\end{matrix}, 1\right)} \right\}$$

$$+ \frac{1}{(p-2)!\,\sigma^{p-2}} \left\{ \frac{1}{[-(n+1)\lambda+p\sigma+\mu]\, P\left(\begin{matrix}0\\-n\end{matrix}, p-1\right)} \right.$$

$$- \frac{C^1_{p-2}}{[-(n+1)\lambda+p\sigma+\mu]\, P\left(\begin{matrix}0\\-n\end{matrix}, p-2\right)}$$

$$\left. + \dots + (-1)^{p-2} \frac{C^{p-2}_{p-2}}{[-(n+1)\lambda+p\sigma+\mu]\, P\left(\begin{matrix}0\\-n\end{matrix}, 1\right)} \right\}$$

ou,

$$A^p_{-n-1} = \frac{-1}{(p-1)!\,\sigma^{p-1}} \left\{ \frac{1}{[-(n+1)\lambda+p\sigma+\mu]\, P\left(\begin{matrix}0\\-n\end{matrix}, p\right)} \right.$$

$$- \frac{C^1_{p-1}}{[-(n+1)\lambda+p\sigma+\mu]\, P\left(\begin{matrix}0\\-n\end{matrix}, p-1\right)} \left(1 + \frac{\sigma}{(-n+1)\lambda+(p-1)\sigma+\mu}\right)$$

$$+ \dots\dots\dots$$

$$+ (-1)^{p-1} \frac{C^{p-1}_{p-1}}{(-(n+1)\lambda+p\lambda+\mu]\, P\left(\begin{matrix}0\\-n\end{matrix}, 1\right)} \left(1 + \frac{(p-1)\sigma}{-(n+1)\lambda+\sigma+\mu}\right)$$

C'est à dire

$$A^{1}_{-n-1}=\frac{-1}{(p-1)!\sigma^{p-1}}\left\{\frac{1}{P\left(\begin{matrix}0\\-n-1\end{matrix},p\right)}-\frac{C^{1}_{p-1}}{P\left(\begin{matrix}0\\-n-1\end{matrix},p-1\right)}+\dots+(-1)^{p-1}\frac{C^{p-1}_{p-1}}{P\left(\begin{matrix}0\\-n-1\end{matrix},1\right)}\right\}$$

ce qui prouve que la formule (4) est générale.

Cinquième problème

21. Il s'agit de déterminer la solution de l'équation

$$(1) \qquad A^{p}_{n+1}=(n\lambda+p\sigma+\mu)\,A^{p}_{n}+A^{p-1}_{n}$$

Sachant que

$$A^{0}_{k}=1 \qquad (k\neq 0)$$

$$A^{p}_{0}=0 \quad \text{pour} \quad p=1,\,2,\,\dots$$

et

$$A^{0}_{n}=0,$$

pour toutes les valeurs entières de n, positives ou négatives différentes de K.

On va distinguer deux cas suivant que le nombre K est positif ou négatif.

Supposons d'abord $k>0$. Il est évident que

$$A^{p}_{n}=0,$$

lorsque $n<k$ et quel que soit p.

En pasant

$$A^{p}_{k+r}=B^{p}_{r}$$

on peut écrire les conditions du problème sous le forme

$$B^{0}_{0}=1$$

$$B^{0}_{r}=0 \quad \text{pour} \quad r=1,\,2,\,\dots$$

$$B^{p}_{0}=0 \quad \text{pour} \quad p=1,\,2,\,\dots$$

D'autre part, B^{p}_{r} satisfait à l'équation

$$B^{p}_{r+1}=[r\lambda+p\sigma+(\mu+k\lambda)]\,B^{p}_{r}+B^{p-1}_{r}$$

qui est analogue à l'équation (1).

La détermination de B^{p}_{r} a été faite dans le troisième problème. Nous aurons d'après la formule (3)

$$B^{p}_{r+1}=\frac{P'\left(\begin{matrix}r\\1\end{matrix},p\right)-C^{1}_{p-1}\,P'\left(\begin{matrix}r\\1\end{matrix},p-1\right)+\dots+(-1)^{p-1}C^{p-1}_{p-1}\,P'\left(\begin{matrix}r\\1\end{matrix},1\right)}{(p-1)!\sigma^{p-1}}$$

où l'accent signifie que l'on remplace dans le produit

$$P\left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}, r\right) = (a\lambda + r\sigma + \mu) \ \ldots \ (b\lambda + r\sigma + \mu).$$

le paramètre μ par $\mu + k\lambda$.

Nous avons

$$P'\left(\begin{matrix} r \\ 1 \end{matrix}, p\right) = P\left(\begin{matrix} r \\ k+1 \end{matrix}, p\right),$$

de sorte que

$$\boxed{A^p_{k+r+1} = \frac{P\left(\begin{matrix} r \\ k+1 \end{matrix}, p\right) - C^1_{p-1} P\left(\begin{matrix} r \\ k+1 \end{matrix}, p-1\right) + \ldots + (-1)^{p-1} C^{p-1}_{p-1} P\left(\begin{matrix} r \\ k+1 \end{matrix}, 1\right)}{(p-1)!\, \sigma^{p-1}}} \tag{2}$$

22. Supposons maintenant $k < 0$. En mettant en évidence le signe de k, nous pouvons écrire les conditions du problème sous la forme

$$A^0_{-k} = 1$$

$$A^p_{-k} = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

$$A^0_n = 0 \qquad (n \neq -k).$$

Il est facile de voir que

$$A^p_n = 0,$$

pour $n > -k$ et quel que soit p.

En particulier nous avons

$$A^s_{-k+s} = 0,$$

pour $s = 1, 2, \ldots$

Il résulte que si nous posons

$$A^s_{-k+r} = C^s_r,$$

nous aurons

$$C^0_0 = 1$$

$$C^s_s = 0 \quad \text{pour} \qquad s = 1, 2, \ldots$$

et

$$C^0_r = 0 \quad \text{pour} \quad r = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

D'autre part C^s_r satisfait à l'équation

$$C^s_{r+1} = [r\lambda + s\sigma + (\mu - k)]\, C^s_r + C^{s-1}_r$$

analogue à l'équation (1).

La détermination de C^s_r a fait l'objet du quatrième problème. Nous aurons d'après la formule (4),

$$C^s_{-r} = \frac{-1}{(s-1)!\,\sigma^{s-1}} \left[\frac{1}{P'\left(\begin{matrix} 0 \\ -r \end{matrix}, s\right)} - \frac{C^1_{s-1}}{P'\left(\begin{matrix} 0 \\ -r \end{matrix}, s-1\right)} + \ldots + (-1)^{s-1} \frac{C^{s-1}_{s-1}}{P'\left(\begin{matrix} 0 \\ -r \end{matrix}, 1\right)} \right]$$

où l'accent signifie que dans le produit

$$P\left(\begin{matrix} b \\ a \end{matrix}, r\right) = (a\lambda + r\sigma + \mu) \ldots (b\lambda + r\sigma + \mu)$$

on remplace μ par $\mu - k\lambda$.

En remarquant que

$$P'\left(\begin{matrix} 0 \\ -r \end{matrix}, s\right) = P\left(\begin{matrix} -k \\ -r-k \end{matrix}, s\right),$$

nous aurons

$$(3) \quad \boxed{A^s_{-k-r} = \frac{-1}{(s-1)!\,\sigma^{s-1}} \left[\frac{1}{P\left(\begin{matrix} -k \\ -r-k \end{matrix}, s\right)} - \frac{C^1_{s-1}}{P\left(\begin{matrix} -k \\ -r-k \end{matrix}, s-1\right)} + \ldots + (-1)^{s-1} \frac{C^{s-1}_{s-1}}{P\left(\begin{matrix} -k \\ -r-k \end{matrix}, 1\right)} \right]}$$

Sixième problème

24. Il s'agit de déterminer la solution de l'équation

$$(1) \qquad A^p_{n+1} = (n\lambda + p\sigma + \mu)\, A^p_n + A^{p-1}_n$$

Sachant que

$$A^0_k = 1 \qquad (k \neq 0)$$
$$A^p_p = 0 \quad \text{pour} \quad p = 1, 2, \ldots$$

et

$$A^0_n = 0 \quad \text{pour} \quad n \neq k.$$

Nous distinguons comme dans le probléme précédent deux cas suivant que nous avons $k > 0$, ou $k < 0$.

Supposons d'abord $k > 0$.

Dans ce cas nous avons

$$A^p_n = 0,$$

pour $n < k$ et quel que soit p.

D'autre part nous remarquons que les conditions du probléme montrent que

$$A^0_k = 1.$$
$$A^p_k = 0 \quad \text{pour} \quad p = 1, 2, \ldots$$

et

$$A^0_{k+r} = 0 \quad \text{pour} \quad r = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

de sorte que A^p_{k+r+1} sera donné par la formule (2) du cinquième problème.

Supposons maintenant $k < 0$.

Dans ce cas

$$A_n^p = 0,$$

pour $n > k$ et quel que soit p.

En remarquant que

$$A_{-k}^0 = 1$$

$$A_{-k+s}^0 = 0, \quad \text{pour} \quad s = 1, 2, \dots$$

et

$$A_{-k+r}^0 = 0 \quad \text{pour} \quad r = \pm 1, \pm 2, \dots$$

nous déduisons que A_{-k+r}^s sera donné par la formule (3) du cinquième problème.

III. CAS PARTICULIER: L'ÉQUATION

$$Q_{n+1}^p = (p\sigma + \mu)\, Q_n^p + Q_n^{p-1}.$$

25. Les résultats précédents se simplifient dans le cas où $\lambda = 0$, c'est à dire dans le cas de l'équation de récurrence à deux indices

$$\boxed{Q_{n+1}^p = (p\sigma + \mu)\, Q_n^p + Q_n^{p-1}} \tag{1}$$

Cela est dû au fait que le produit $P\binom{p}{q}, r)$ qui entre constamment dans toutes les résultats se réduit lorsque $\lambda = 0$ à la puissance $(r\sigma + \mu)^{q-p-1}$.

En désignant par Q_{k+n+1}^{k+r} la solution du premier problème pour l'équation (1), nous avons la formule unique

$$\boxed{Q_{k+n+1}^{k+r} = \frac{k\sigma+\mu}{r\,!\,\sigma^r}\left\{[(k+r)\sigma+\mu]^n - C_r^1\,[(k+r-1)\,\sigma+\mu]^n + \dots + (-1)^r\, C_r^r\,(k\sigma+\mu)^n\right\}} \tag{2}$$

où n peut prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives et où $r > 0$.

De même en désignant par Q'^{k+r}_n, la solution du second problème pour l'équation (1), nous avons la formule unique

$$\boxed{Q'^{k+r}_n = \frac{1}{r\,!\,\sigma^r}\left\{[(k+r)\sigma+\mu]^n - C_r^1\,[(k+r-1)\sigma+\mu]^n + \dots + (-1)^r\, C_r^r\,(k\sigma+\mu)^n\right\}} \tag{3}$$

où n prend des valeurs positives ou négatives et s où $r \geqslant 0$.

On peut donner des formules analogues pour les autres problèmes (III à VI) relatives à l'équation (1) mais nous n'insistons pas.

26. Dans le cas particulier de l'équation de Maurice d'Ocagne.

$$(4) \qquad \boxed{R^p_{n+1} = p\ R^p_n + R^{p-1}_n}$$

on peut donner les solutions des six problèmes traités plus haut, en faisant dans les formules générales $\lambda = 0$, $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.

Par exemple, en désignant par R^{k+r}_{k+n+1} et R'^{k+r}_n les solutions du premier et du second problème, nous avons

$$(5) \qquad \boxed{R^{k+r}_{k+n+1} = \frac{k}{r\,!}[(k+r)^n - C^1_r\,(k+r-1)^n + \ldots + (-1)^r C^r_r k^n]}$$

et

$$(6) \qquad \boxed{R'^{k+r}_n = \frac{1}{r\,!}[(k+r)^n - C^1_r\,(k+r-1)^n + \ldots + (-1)^r C^r_r\, k^n]}$$

ou n prend des valeurs entières positives on négatives.